NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Sur les enveloppes d'une droite, inscrite dans un angle rectiligne et conséquences pour les courbes en général

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 182-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__182_0>

SUR LES ENVELOPPES D'UNE DROITE,

inscrite dans un angle rectiligne et conséquences pour les courbes en général.

—

I. Prenant les côtés d'un angle rectiligne pour axes coordonnés, écrivons les quatre équations

$$ay+bx=ab, (1); \quad \varphi(a, b)=0 \, (2); \quad y+xb'=b+ab' \, (3);$$
$$D_a\varphi+b'D_b\varphi=0 \quad (4).$$

La première équation est celle d'une droite mobile ; la seconde équation est une relation donnée entre les segments formés sur les axes par la droite mobile ; la troisième équation est la dérivée de (1), en regardant x, y comme constantes, a comme variable indépendante, et b' est la fonction prime de b, considérée comme fonction de a, l'équation (4) est dérivée de l'équation (2) ; $D_a\varphi$ désigne la dérivée de $\varphi(a, b)$ prise par rapport à a ; $D_b\varphi$ la dérivée de $\varphi(a, b)$, prise par rapport à b. — Cela posé, éliminant a, b, b' entre ces quatre équations, on obtient une relation entre x et y, qui est l'équation de l'enveloppe de la droite mobile. (*Voir*, pour la théorie, la Note de M. Collard, t. 1, pag. 281.)

II. Si φ est une fonction algébrique entière du degré m, elle peut se mettre sous la forme $P_m+P_{m-1}+P_{m-2}+\ldots + P_1+P_0=0$, où P_m désigne une fonction homogène du degré m, P_{m-1} une fonction homogène du degré $m-1$, et ainsi de suite ; éliminant b' entre les équations (3) et (4), il vient $yD_b\varphi+aD_a\varphi=xD_a\varphi+bD_b\varphi$ (5) ; l'équation (5) est du degré m, l'équation (2) du degré m, et l'équation (1) du second degré, relativement à a et à b ; et x, y sont du premier degré dans ces équations ; donc l'équation finale en x,y ne peut dépasser le degré $2m^2$.

III. Soit $\varphi(a,b) = ap + bq - r = 0$ (2) ; p, q, r sont des constantes données ; on a $D_a\varphi = p$; $D_b\varphi = q$; ainsi l'équation (5) devient $qy + ap = px + bq$; éliminant a, b entre cette équation et les deux équations (1) et (2), il vient

$$(qy + px)^2 - 2qry - 2prx + r^2 = 0 ;$$

equation d'une parabole qui touche l'axe des x, au point où $x = \frac{r}{p}$; et l'axe des y, au point où $y = \frac{r}{q}$ (*).

IV. Éliminant b entre les équation (1) et (2) et entre (2) et (5), on obtient

$$aqy + x(r - ap) = a(r - ap) ;\ qy - px = r - 2ap ;$$

d'où l'on tire $x = \frac{a^2p}{r}$; $y = \frac{b^2q}{r}$; coordonnées du point de contact sur la droite mobile. Soit M ce point de contact ; A et B les points où la droite mobile coupe les axes des x et des y ; et O l'origine ; on aura $\mathrm{OP} = \frac{a^2p}{r}$; $\mathrm{PM} = \frac{b^2q}{r}$; P est le pied de l'ordonnée du point M ;

d'où $\mathrm{AP} = a - \frac{a^2p}{r} = \frac{abq}{r}$; $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{bq}{ap}$;

de là résulte cette construction : Sur AB, construisez le triangle ABC, tel qu'on ait $\mathrm{AC} = bq$; $\mathrm{BC} = ap$, le point où la bissectrice de l'angle C rencontre le côté AB est le point de contact M de la droite mobile avec son enveloppe.

Si $p = q = 1$, la figure OACB est un parallélogramme ; le problème revient à partager AB en deux segments inversement proportionnels à OA et OB.

Observation. L'équation (5) renferme le problème traité au

(*) Apollonius, liv. III, prop. XLI

tome I, pag. 449 ; car $a'Ab'$ étant le segment sur l'axe par une seconde droite mobile, l'on aura $\frac{a'-a}{b'-b}=-\frac{q}{p}$, rapport constant.

V. *Problème.* Sur une courbe continue, on prend des arcs de longueur équivalente ; trouver sur chaque corde de l'un quelconque de ces arcs, le point où cette corde touche son enveloppe.

Solution. Le point cherché est celui qui divise cette corde en deux segments réciproquement proportionnels aux longueurs des tangentes qui passent par les deux extrémités de la corde. Ces longueurs sont comptées depuis les points de contact jusqu'au point de rencontre des deux tangentes ; car, dans deux positions voisines, la droite mobile peut être considérée comme terminée, soit à la courbe, soit aux tangentes ; et alors on rentre dans le problème précédent.

VI. *Problème.* Étant données, dans le même plan, deux courbes continues M et N ; mener une tangente à la courbe N, de manière qu'elle intercepte un arc minimum ou maximum sur la courbe M.

Solution. On mène, s'il est possible, à la courbe N une tangente qui devienne corde dans la courbe M, et telle que le point de contact divise la corde en deux segments inversement proportionnels aux longueurs des tangentes menées par les extremités de la corde à la courbe M ; ces longueurs sont comptées à partir des extrémites de la corde jusqu'au point de rencontre des deux tangentes. En effet, dans une position infiniment voisine, la corde intercepte encore un arc de même longueur (*voir* Prob. précédent) ; donc la différentielle de l'arc est nulle, donc, etc.

Si la courbe M est fermée, il y a deux arcs sous-tendus par la corde ; et nécessairement l'un est un minimum, et l'autre, un maximum ; si la courbe est ouverte, alors la partie ouverte est toujours un maximum, et par conséquent la partie fermée, un minimum (*).

Corollaire I. Un angle étant circonscrit à une courbe, si on partage la corde de contact en deux segments *additifs*, inversement proportionnels aux côtés de l'angle ; de toutes les cordes qui passent par le point de division, c'est la corde de contact qui intercepte un arc minimum.

Coroll. II. M. Bonnet a démontré (pag. 68) que, si la courbe M est une parabole, et la courbe N sa développée ; le point de contact sur N, le même que le centre de courbure, divise la normale en deux segments, dont l'un, le rayon de courbure, est représenté par 2, et l'autre segment par 1 ; donc les tangentes menées par les extrémités de la corde, sont dans le même rapport.

Coroll. III. Dans les coniques, la corde qui passe par un point donné et intercepte un arc minimum, n'est jamais la corde conjuguée au diamètre qui passe par ce point ; à moins que le point ne se trouve sur un axe principal.

VII. Soit $\varphi(a, b) = nab + pb + qa - r = 0$ (2) ;

$$ay + bx = ab \ (1); \quad D_b\varphi = na + p$$
$$D_a\varphi = nb + q;$$

l'équation (5) devient $a(ny + q) - b(nx + p) = qx - py$; éliminant ab, entre (1) et (2), on obtient

$$a(ny + q) + b(nx + p) = r;$$

de ces deux équations l'on tire

$$a = \frac{r + qx - py}{2(ny + q)}; \quad b = \frac{r + py - qx}{2(nx + p)}.$$

Substituant ces valeurs, dans l'équation (1), on obtient, toute réduction faite,

$$(qx - py)^2 - 4nrxy - 2pry - 2rqx + r^2 = 0.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole, touchant l'axe des y au point $y = \frac{r}{p}$; et l'axe des x au point $x = \frac{r}{q}$.

(*) Si les deux courbes ont une tangente commune, elle résout le problème.

VIII. On a $y(an+p) - x(bn+q) = bp - aq$

$$any + bnx = r - aq - bp;$$

d'où l'on déduit $x = \dfrac{a(r-bp)}{r+abn}$; $y = \dfrac{b(r-aq)}{r+abn}$; coordonnées du point de contact sur la droite mobile.

IX. Si $p = q = 0$, l'équation de la courbe devient $xy = \dfrac{r}{4n}$; et les coordonnées du point de contact sont $\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}$; donc il est alors au milieu de la droite interceptée; propriété très-connue de l'hyperbole entre ses asymptotes, et ab est proportionnel à l'aire du triangle formé par la droite mobile et les droites fixes (*).

X. *Problème.* Sur une courbe continue on prend des segments d'aires équivalentes; trouver sur chaque corde le point de contact, avec l'enveloppe de cette corde.

Solution. Le point de contact est au milieu de la corde. Même raisonnement que pour le problème V.

XI. *Problème.* Etant données deux courbes, désignées par M et N, mener une tangente à la courbe N, telle qu'elle intercepte, dans la courbe M, un segment d'une aire minima ou maxima.

Solution. On mène la tangente de manière que le point de contact soit au milieu de la corde qu'elle forme dans la courbe M.

Corollairè. I. Ainsi de toutes les cordes qui passent par un point fixe, celle qui a son milieu en ce point, retranche le segment de moindre aire.

Corollaire II. Les théorèmes énoncés pag. 65 et 66, appartiennent à toutes les lignes planes continues, il suffit de prendre pour N la développée de M.

XII. $\varphi(a,b) = a^2 + b^2 + mab - r = 0$. (*Voir* p. 265, du tome I.)

(*) Apollonius, lib. III, prop. XLIII.

XIII. *Problème*. **Une corde de longueur constante étant inscrite dans une courbe, trouver le point où la corde touche l'enveloppe.**

Solution. Ayant mené par l'extrémité de la corde deux normales à la courbe, la projection du point d'intersection des deux normales sur la corde, est le point de contact cherché. (*Voir* t. II, p. 289.)

Observation. Dans une ellipse, l'enveloppe est une ligne du quatrième degré. (*Annales de Gergonne.*)

XIV. *Problème*. Étant données deux courbes M et N dans un même plan; mener une tangente à la courbe N, de manière que la corde interceptée dans la courbe M soit un maximum ou un minimum.

Solution. Il faut que la normale à la courbe N, menee par le point de contact et les deux normales à la courbe M passant par les extrémités de la corde, se rencontrent en un même point.

Coroll. 1. De toutes les cordes qui passent par un point donné, la corde maxima ou minima est celle où la perpendiculaire à la corde passant par ce point, et les deux normales menées par les extrémités de la corde, convergent vers le meme point.

Coroll. II. Si la corde est elle-même normale en une de ses extrémités, il faut aussi qu'elle soit normale par l'autre extrémité; alors elle est une corde maxima ou minima.

Si le point donné est sur la courbe, il faudra de ce point mener une normale, à une autre partie de la courbe.

Observation. Il est inutile d'avertir que chaque question peut admettre plusieurs solutions, et qu'il y a lieu à des *maxima maximorum*, etc.

Toutes ces questions ont été résolues à l'aide du calcul différentiel, par M. Magnus. (*V.* Gergonne, t. XVI, p. 80.)

Ces diverses solutions ne se rapportent qu'aux points où la courbe a son cours ordinaire, et sont susceptibles de modifications dans les points dits *singuliers*.

XV. Toutes les fois qu'on a

$$\varphi(a,b) = 2kab^2 + 2k'ba^2 - lb^2 + 2nab - l'a^2 - m = 0,$$

l'enveloppe de la droite $ax + by = ab$ est une conique (*voir* tom. II, p. 110, corol. 2); il suffit de remplacer d et c par $-\frac{f}{b}$ et $-\frac{f'}{a}$; $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$, $\frac{l}{m}$, $\frac{n}{m}$, $\frac{l'}{m}$, sont cinq rapports donnés; les identités (tom. I, p. 490) font connaître les cinq rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$, $\frac{F}{A}$, et l'espèce de la courbe dépend du signe de l'expression suivante :

$$\frac{2nkk' + r^2 + lk'^2 + l'k^2}{m^3} + \frac{n^2 - ll'}{m^2}.$$

Tm.