NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. VIDAL

Solution du problème 42

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 172-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__172_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 42. (Page 519, t. I.)

PAR M. VIDAL (J.),
elève au collége de Montpellier.

Lieu des foyers des paraboles qui ont une tangente commune et une corde commune parallèle à cette tangente.

—

Soit AB, la tangente donnée (*fig.* 21), et DD′ la corde commune ; je prendrai pour axe des x une perpendiculaire menée par le point C, milieu de DD′ sur la tangente, le lieu cherché devant évidemment être symétrique par rapport à cette droite ; et pour axe des y la tangente commune AB. Je désigne par a et b les coordonnées du point D, et celles du point D′ seront $a, -b$. Par le point C je mène une droite quelconque CE, cette droite sera un diamètre d'une des paraboles, dont le foyer est un point du lieu cherché ; la tangente AB touchera la parabole dont CE est le diamètre, au point E; par conséquent si par le point E, je mène GE, faisant avec la tangente un angle égal à CEO, le foyer de la parabole que nous considérons devra se trouver sur cette droite. Je désigne par (x', y') les coordonnées de ce foyer F; si je prends le symétrique R de ce point par rapport à la tangente, j'aurai un point de la directrice de la parabole que nous considérons; si par ce point R, j'abaisse une perpendiculaire sur le diamètre CE, j'aurai la directrice elle-même; exprimant maintenant que le point D, est également distant du foyer (x', y') et de la directrice, j'exprime que DD' est une corde de la parabole, j'obtiens ainsi deux équations de condition entre (x', y'), les quantités connues, et la variable qui fixe la position du diamètre CE; en éliminant cette variable, j'aurai l'équation du lieu cherché; il n'y a plus qu'à exécuter ce que je viens d'indiquer.

L'équation d'une droite quelconque passant par le point C, est

$$y = m(x-a) \qquad (1);$$

celle de la droite GE est par conséquent

$$y = -m(x+a).$$

La première équation de condition sera donc

$$y' = -m(x'+a). \qquad (2)$$

Les coordonnées du point symétrique du foyer par rapport à la tangente sont $(y', -x')$, l'équation de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le diamètre est donc ·

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x+x'),$$

ou bien

$$m(y-y') + (x+x') = 0.$$

La deuxième équation de condition sera donc

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 = \frac{\{m(b-y') + a + x'\}^2}{1+m^2}.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer m entre cette équation, et l'équation (2); pour cela de la 1re on tire la valeur de m, on la porte dans celle qui est ci-dessus, et on trouve que l'équation du lieu cherché est en supprimant les accents :

$$(y-b)^2 (x+a)^2+y^2 (x-a)^2=4ax (x+a)^2-$$
$$-2y(b-y) (x+a)^2.$$

A la seule inspection de cette équation, on voit que si on porte l'origine au point de l'axe des x, symétrique du point C, par rapport à la tangente, elle se simplifiera, il n'y a donc qu'à remplacer x, par $x-a$, et il vient :

$$(y-b)^2x^2+y^2(x-2a)^2=4a(x-a)x^2+2y(y-b)x^2.$$

Effectuant les calculs et simplifiant, on trouve finalement que l'équation du lieu est :

$$4ax^3+4ay^2x-4a^2x^2-4a^2y^2-b^2x^2=0. \qquad (3)$$

Cette équation nous montre tout de suite que l'origine est un point de la courbe et même un point multiple, parce qu'en faisant $x=0$ et $y=0$, on a successivement deux valeurs de x et de y qui se réduisent à zéro; l'équation de la tangente en ce point est:

$$4a^2x^2+4a^2y^2+b^2x^2=0.$$

Cette équation étant formée de la somme de trois carrés, il s'ensuit qu'elle ne représente rien du tout; nous en concluons que l'origine est un point multiple isolé.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des x sont données par l'équation :

$$4ax^3-4a^2x^2-b^2x^2=0.$$

Cette équation est divisible par x^2, ce qui nous donne les deux points situés à l'origine des coordonnées; en divisant par ce facteur, il nous reste

$$4ax-4a^2-b^2=0,$$

d'où $$x = \frac{4a^2 + b^2}{4a}.$$

Comme vérification, on peut chercher directement cette valeur au moyen du théorème que j'ai démontré (page 445 du t. II) ; car cette valeur est a, augmenté du quart du paramètre de la parabole dont l'axe principal serait l'axe des x. D'après ce théorème on a,

$$2pa = b^2,$$

d'où $$2p = \frac{b^2}{a},$$

si au quart de cette quantité nous ajoutons a, nous aurons $\frac{b^2 + 4a^2}{4a}$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

Supposons que le point H, qui nous détermine cette abscisse, soit compris entre les deux points O et C ; construisons le lieu ; de l'équation (3), je tire

$$y^2 = \frac{(b^2 + 4a^2)\,x^2 - 4ax^3}{4a\,(x - a)}.$$

Cette valeur nous confirme dans ce que nous avions dit en commençant, c'est-à-dire, que le lieu est symétrique par rapport à l'axe des x. A la seule inspection de cette valeur, on voit que nous ne pouvons pas donner à x des valeurs négatives, parce que les valeurs correspondantes de y seraient imaginaires. Les valeurs plus petites que a produisent le même effet, excepté $x = 0$, qui donne $y^2 = 0$, ce qui nous fait voir encore plus clairement que l'origine est un point isolé. La courbe cherchée est donc entièrement à droite de l'ancien axe des y.

Le numérateur de la valeur de y^2 nous montre que nous ne pouvons pas donner à x, des valeurs plus grandes que $\frac{b^2 + 4a^2}{4a}$, pour laquelle on a $y = 0$, la ligne HI est donc une limite de la courbe. A mesure que la valeur de x se rapproche de a, la valeur de y augmente, et lorsque $x=a$, cette valeur devient infinie; la tangente commune est donc asymptote de la courbe ; cherchant en effet directement les équations des asymptotes, on trouve cette droite comme seule et unique asymptote. Nous connaissons maintenant assez de choses sur cette courbe pour pouvoir la tracer. Cette courbe a deux points d'inflexion, placés symétriquement par rapport à l'axe des x. Au moyen de la méthode donnée par M. Midy (page 232, tome II), on trouvera facilement la position de ces deux points.

Si on voulait avoir le lieu des sommets des mêmes paraboles, on pourrait se servir de ce que nous venons de faire. Soit F un foyer, on obtiendra facilement la directrice RS, comme nous l'avons indiqué ci-dessus ; du point F, abaissant une perpendiculaire sur la directrice et prenant le milieu de SF, on aura le sommet de la parabole que nous considérons. En désignant par x et y les coordonnées du sommet, et x', y' les coordonnées du foyer et exprimant toutes les conditions ci-dessus indiquées, on arrive aux équations.

$$y-y'=m(x-x'), \tag{4}$$

$$(x'-x^2)+(y'-y)^2=\frac{\{m(y-y')+x+x'\}^2}{1+m^2}, \tag{5}$$

$$y'=-m(x'+a), \tag{6}$$

$$(x'-a)^2+(y'-b)^2=\frac{\{m(b-y')+a+x'\}^2}{1+m^2}. \tag{7}$$

Si on élimine m entre les équations (6) et (7), nous savons à quoi nous arrivons; il n'y aurait plus qu'à déterminer x', y', m, au moyen des équations (4), (5), (6), mais l'élimination serait très-compliquée.

Note. Ce genre de problèmes se résout d'une manière directe et facile par nos formules générales. Conservons la même notation et les mêmes axes des coordonnées ; on a, pour l'équation de la conique,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ;$$

la conique est une parabole, donc $m = B^2 - 4AC = 0$; l'axe des y est une tangente, donc $l = D^2 - 4AF = 0$; les deux points donnés fournissent l'équation

$$Ab^2 + b(Ba + D) + Ca^2 + Ea + F = 0 ,$$

cette équation devant être satisfaite par $+b$ et $-b$, on a donc $Ba + D = 0$ et $Ab^2 + Ca^2 + Ea + F = 0$; faisant $\frac{B}{A} = z$, on tire de ces diverses équations

$$\frac{C}{A} = \frac{z^2}{4}; \quad \frac{D}{A} = -az ; \quad \frac{E}{A} = -\frac{b^2}{a} - \frac{a}{2}z^2 ; \quad \frac{F}{A} = \frac{a^2z^2}{4} ;$$

$$\frac{k}{A^2} = \frac{2E}{A} - \frac{BD}{A^2} = -\frac{2b^2}{a} ; \quad \frac{k'}{A^2} = 2\frac{C}{A}\cdot\frac{D}{A} - z\cdot\frac{E}{A} = \frac{b^2}{a}z ;$$

$$\frac{l'^2}{A} = \frac{b^2}{a^2}(a^2z^2 + b^2) ; \quad \frac{L}{A^3} = \frac{k^2}{4A^4} = \frac{b^4}{a^2}; \quad N = 1 + \frac{z^2}{4}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de α et de β (p. 432, t. II), et considérant que $\cos\gamma = 0$, il vient, après avoir divisé, numérateur et dénominateur, par A^4,

$$\alpha = \frac{b^2}{a(4+z^2)} ; \quad \beta = \frac{z}{2a} \cdot \frac{az^2 + 4a^2 + b^2}{z^2 + 4} .$$

Éliminant z^2, entre α et β, on en tire $z = \frac{2\beta}{a+\alpha}$; substituant cette valeur de z dans α, il vient

$$(\alpha + a)^2 [4a\alpha - b^2] + 4a\alpha\beta^2 = 0 ; \qquad (1)$$

remplaçant α par $x - a$, et β par y, on obtient l'équation (3) de M. Vidal.

En général, au moyen de nos formules, on peut, sans faire aucune construction nouvelle, écrire de suite les équations et ramener à une question d'élimination tous les problèmes où, connaissant quatre conditions dans une conique, il s'agit de déterminer le lieu géométrique des foyers, du centre, des sommets ou de tout autre point déterminé dans le plan de la conique.

L'équation (9), relative aux coordonnées du sommet, donne (p. 26, t. II), faisant $m = 0$,

$$4N^2 (l - 2Akx) = B^2L,$$
$$4N^2 (l' - 2Ck'y) = B^2L;$$

substituant pour N, l, l', $\frac{k}{A^2}$, $\frac{l'}{A^2}$, $\frac{L}{A^3}$, les valeurs trouvées ci-dessus, on parvient facilement à ces deux équations :

$$z^3ay - 2a^2z^2 + 2(4ax - b^2) = 0;$$
$$(4 + z^2)^2x = \frac{b^2z^2}{a}.$$

Éliminant z, on obtient une équation entre x et y, coordonnées du sommet, et qui peut monter au plus au 16^e degré.

Tm.