H. FAURE

Solution du problème 71

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 170-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__170_1>

SOLUTION DU PROBLEME 71. (T. II, p. 327.)

PAR M. FAURE (H.),
élève en spéciales.

Soit l'équation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$.

Posons $A = \sqrt{p^2 - q}$. Si les trois racines sont réelles, elles sont comprises, la première entre $-p - 2A$ et $-p - A$; la deuxième entre $-p - A$ et $-p + A$; la troisième entre $-p + A$ et $-p + 2A$.

Posons $x = y - p$. Si l'on substitue cette valeur à la place de x dans l'équation, la transformée

$$(1) \qquad y^3 - 3A^2y + 2p^3 - 3pq + r = 0, \qquad (*)$$

(*) Cette équation peut se mettre sous la forme $(y - A)^2 (y + 2A) - 2A^3 + 2p^3 - 3pq + r = 0$; tous les resultats deviennent intuitifs. Tm.

manque de second terme. Les racines de cette équation étant égales à celles de la proposée augmentées de p, la question sera ramenée à prouver que l'équation en y a une racine comprise entre $-2A$ et $-A$, la deuxième entre $-A$ et $+A$, et la troisième entre $+A$ et $+2A$, en supposant d'abord que toutes les racines soient réelles.

Pour démontrer qu'il y a une racine entre $-2A$ et $-A$, il suffit de faire voir que si l'on substitue ces quantités à la place de y dans l'équation (1), on obtient deux résultats de signes contraires.

Or, en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation on a :

$$y^2 - A^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \pm A.$$

Si les racines sont réelles, celles de la dérivée le sont aussi ; donc A^2 est une quantité positive. Le second terme de l'équation est donc négatif, quant au dernier il peut être positif ou négatif. Supposons-le d'abord positif. D'après le théorème de Rolle, il y a une racine entre $+A$ et $-A$; or $-A$ donne pour résultat $2A^3 + 2p^3 - 3pq + r$, quantité positive ; donc $+A$ donne un résultat négatif.

Effectuons la substitution de $-A$ et de $-2A$

pour $y = -A$, on a pour résultat $2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2$.

$y = -2A$ » $-2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2$.

Le premier résultat est positif ; je dis que le deuxième est négatif. Si dans l'équation on fait $y = 0$, on obtient un résultat positif, ainsi que pour $y = \infty$. Mais comme l'équation a deux racines positives, puisque son premier membre offre deux variations, et que toutes ses racines sont réelles ; on est certain en vertu du théorème de Rolle, que si l'on substitue la racine positive $+A$ de la dérivée dans l'équation, on doit obtenir un résultat négatif. Faisant la substitution, on trouve

$$-2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2 < 0.$$

Donc entre $y = -A$ et $y = -2A$, il y a une racine de l'équation. Comme $+A$ et $-A$, ont aussi donné des résultats de signes contraires, il y a une racine entre $+A$ et $-A$.

Si l'on fait $y = +2A$, on obtient un résultat négatif ; par conséquent entre $+A$ et $+2A$, il y a une racine de la transformée.

Si l'équation avait son dernier terme négatif, on changerait y en $-y$, et en changeant les signes de tous les termes, on obtiendrait une équation dans laquelle le second terme est négatif et le dernier positif ; on pourra donc en tirer les mêmes conséquences que précédemment.

Si l'équation n'a qu'une racine réelle, la dérivée a ses racines imaginaires. Par conséquent la racine réelle de l'équation ne peut être comprise entre les quantités imaginaires $-2A$ et $+2A$.