Nouvelles annales de mathématiques

Tarnier

Condition de réalité des racines de l'équation complète du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 161-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__161_1>

CONDITION DE RÉALITÉ

des racines de l'équation complète du troisième degré.

PAR M. TARNIER,
professeur.

Problème. Chercher la relation des coefficients de l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$, pour que ses trois racines soient réelles.

Solution. En faisant usage du théorème de M. Sturm, on obtient les polynômes suivants :

(1) $$X=x^3+px^2+qx+r$$

(2) $$X'=3x^2+2px+q$$

(3) $$X''=(2p^2-6q)x+(pq-9r)$$

(4) $$X'''=-4p^3r+p^2q^2-4q^3+18pqr-27r^2.$$

Pour que toutes les racines soient réelles, il faut et il suffit qu'en attribuant à x des valeurs très-grandes négatives, ces quatre polynômes ne présentent que des variations (corollaire du théorème de M. Sturm). Or le premier sera négatif et le second positif, il est donc nécessaire et suffisant que le troisième soit négatif et le quatrième positif, c'est-à-dire que l'on ait

$$\left.\begin{array}{r} 2p^2-6q>0 \\ \text{ainsi que } -4p^3r+p^2q^2-4q^3+18pqr-27r^2>0 \end{array}\right\}$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{r} p^2-3q>0 \\ -4p^3r+p^2q^2-4q^3+18pqr-27r^2>0. \end{array}\right\}$$

Telles sont les conditions cherchées.

Discussion. Pour savoir si le calcul que l'on vient de faire ne peut pas se simplifier, et par suite si les conditions ci-dessus ne peuvent pas être exprimées plus simplement, faisons disparaître le second terme de l'équation proposée,

$$x^3+px^2+qx+r=0;$$

posant $x=y-\frac{1}{3}p$ et substituant, on arrive à l'équation

$$y^3+\left(-\frac{1}{3}p^2+q\right)y+\frac{2}{27}p^3-\frac{1}{3}pq+r=0,$$

équation de la forme

$$(m) \qquad y^3+ay+b=0,$$

en posant

$$a=-\frac{1}{3}p^2+q$$

$$b=\frac{2}{27}p^3-\frac{1}{3}pq+r.$$

Appliquant à l'équation (m) les mêmes calculs qu'à la proposée, et observant que l'on a $p=0$, $q=a$, $r=b$, on obtient la suite des polynômes

$$y^3 + ay + b$$
$$3y^2 + a$$
$$-2ay - 3b$$
$$-4a^3 - 27b^2,$$

et pour que les valeurs de y soient réelles, il faut et il suffit qu'en attribuant à y des valeurs très-grandes négatives, les quatre polynômes ne présentent que des variations de signe.

Or le premier sera négatif, le second sera positif; le troisième doit donc être négatif, ce qui exige la condition $a < 0$, et le quatrième doit être positif, ce qui exige la condition

$$-4a^3 - 27b^2 > 0$$

ou

$$-\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}.$$

Or cette condition exigeant que $-\frac{a^3}{27}$ soit positif, renferme implicitement la condition de $a < 0$; si donc la première condition est une conséquence de la seconde, la seule et unique condition de réalité des trois racines sera exprimée par

$$-4a^3 - 27b^2 > 0,$$

ou

$$4a^3 + 27b^2 < 0,$$

ou

$$\frac{-a^3}{27} > \frac{b^2}{4},$$

ou, remplaçant a et b par leurs valeurs,

$$\frac{\left(\frac{1}{3}p^2 - q\right)^3}{27} > \frac{\left(\frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r\right)^2}{4}.$$

Cette condition et la condition $a < 0$ ou $\frac{1}{3}p^2 > q$, qui y est implicitement renfermée, doivent être identiques avec celles que nous avions trouvées primitivement, savoir :

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0 \\ -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 > 0, \end{cases}$$

et pour qu'il n'y ait aucune contradiction entre les deux calculs, il faut que la condition $p^2 - 3q > 0$ soit une conséquence de la condition

$$-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 > 0,$$

chose qui nous est enseignée par le second calcul et qui, de plus, va nous mettre sur la voie pour nous faire trouver que la première condition est une conséquence de la seconde ; à cet effet, retranchons vingt-sept fois le second polynôme de quatre fois le cube du premier, nous aurons

$$4p^6 - 36p^4q + 108p^3r + 81p^2q^2 - 486pqr + 729r^2.$$

Le second calcul nous avertit que ce polynôme est un carré parfait, et en effet il est le carré du polynôme $2p^3 - 9pq + 27r$; le reste étant donc une quantité positive, il en résulte que quatre fois le cube de $p^2 - 3q$ est plus grand que vingt-sept fois le second polynôme ; si donc le second polynôme est positif (c'est-à-dire si la seconde condition est remplie), quatre fois le cube de $p^2 - 3q$ sera aussi positif, et par conséquent $p^2 - 3q > 0$, c'est-à-dire enfin que la première condition est une conséquence de la seconde ; d'où l'on peut conclure qu'une seule condition suffit pour établir la réalité des trois racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, condition qui est exprimée par

$$-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 > 0 \qquad \text{(P)},$$

qui se réduit à $4a^3 + 27b^2 < 0$, lorsque l'équation se réduit à $y^3 + ay + b = 0$.

Note. Nous rappellerons ici une observation de Legendre, qu'on peut ainsi généraliser : Étant donnée une équation algébrique de degré m, formons les produits différents des racines deux à deux ; donnons, dans chaque produit, au premier facteur l'exposant positif entier p', et au second facteur l'exposant positif entier q' ; désignons par y la somme de ces produits ainsi obtenus, et par z la somme de ces produits, en changeant p' en q', et *vice versâ* ; $y+z$ et yz sont des fonctions symétriques des racines ; on peut donc les obtenir en fonctions entières des coefficients de l'équation, et par conséquent $(y-z)^2=(y+z)^2-4yz$ peut aussi s'exprimer en fonctions des mêmes coefficients : si cette fonction est négative, l'équation a des racines imaginaires, et si cette fonction n'est pas un carré parfait, l'équation ne peut avoir toutes ses racines irrationnelles ; si $m=3$, $p'=2$, $q'=1$, alors $(y-z)^2$ est la fonction (P) de M. Tarnier. Il faut remarquer qu'une telle condition est suffisante pour l'équation du troisième degré, mais non pas pour les équations de degré supérieur. (*Voir* t. I, p. 151 et 513.) Tm.