Nouvelles annales de mathématiques

E. Desmarest

Sur les intersections successives de droites présentées par une équation contenant une variable

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 154-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__154_1>

SUR LES INTERSECTIONS SUCCESSIVES

de droites représentées par une équation contenant une variable (*).

PAR M. E. DESMAREST,
ancien élève de l'Ecole polytechnique.

1° A quelles conditions doivent obéir les quantités a et b pour que toutes les droites représentées par l'équation

(*) Voir t. I, p. 281 ; t. II, p. 110, cor. 2.

$$y = ax + b$$

se coupent au même point?

Soit $b = \varphi(a)$, l'équation devient

$$y = ax + \varphi(a). \tag{A}$$

Remplaçant a par $a + h$, on a

$$y = ax + hx + \varphi(a) + \varphi'(a)h + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \tag{B}$$

Cherchant l'intersection des deux droites, on a

$$hx + \varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} = 0.$$

Divisant par h, puis posant $h = 0$, on a $x = -\varphi'(a)$. Substituant cette valeur dans (A), on a pour les coordonnées du point d'intersection de deux droites :

$$x = -\varphi'(a), \qquad y = \varphi(a) - a\varphi'(a).$$

Or $\varphi'(a)$ doit être constante ; donc $\varphi(a) = pa + q$. Cette condition est nécessaire et suffisante ; car elle donne, pour les coordonnées du point d'intersection,

$$x = -p, \qquad y = +q.$$

Donc, pour que les droites représentées par l'équation $y = ax + b$ se coupent au même point, il faut et il suffit que les quantités a et b soient liées par une fonction du premier degré. L'équation est :

$$y = ax + pa + q \qquad \text{ou} \qquad y - q = a(x + p).$$

2° A quelles conditions doivent obéir les quantités a et b pour que les intersections successives des droites représentées par l'équation $y = ax + b$ soient sur une ellipse donnée ?

Soit cette ellipse donnée,

$$n^2x^2 + q^2 = m^2n^2.$$

Soit $b = \varphi(a)$ et l'équation des droites $y = ax + \varphi(a)$.

Les coordonnées du point d'intersection de deux droites voisines sont

$$x = -\varphi'(a), \qquad y = \varphi(a) - a\varphi'(a).$$

On doit donc avoir

$$n^2[\varphi'(a)]^2 + [\varphi(a) - a\varphi'(a)]^2 = \text{une constante } m^2n^2.$$

Or, même en restant dans les lois ordinaires des dérivées, on peut reconnaître que la valeur $\varphi(a)$, qui réalise cette condition est $\varphi(a) = m\sqrt{n^2 + a^2}$. Donc, toutes les droites représentées par l'équation

$$y = ax + m\sqrt{n^2 + a^2}$$

se coupent sur l'ellipse

$$n^2x^2 + y^2 = m^2n^2.$$

3° Un raisonnement analogue démontrerait que les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = ax + m\sqrt{-n^2 + a^2}$$

sont sur l'hyperbole

$$-n^2x^2 + y^2 = -m^2n^2.$$

Si l'hyperbole était rapportée à ses asymptotes, son équation serait de la forme

$$xy = -m^2.$$

Or les coordonnées du point d'intersection de deux droites voisines étant toujours

$$x = -\varphi'(a), \qquad y = \varphi(a) - a\varphi'(a),$$

on devrait avoir

$$a[\varphi'(a)]^2 - \varphi(a)\varphi'(a) = \text{une constante } -m^2. \qquad \text{(C)}$$

Donc la fonction $\varphi(a)$ devrait être de la forme $\sqrt{a}$, cette quantité étant multipliée par une constante : soit donc $\varphi(a) = s\sqrt{a}$ l'équation (C) devient

$$\frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{2} = -m^2 \qquad \text{ou} \qquad s^2 = 4m^2.$$

Donc, enfin, les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = ax + 2m\sqrt{a}$$

sont sur l'hyperbole

$$xy = -m^2.$$

4° Si la courbe donnée est une parabole

$$x^2 = my,$$

on doit avoir

$$\frac{[\varphi'(a)]^2}{\varphi(a) - a\varphi'(a)} = \text{une constante } m$$

ou $$[\varphi'(a)]^2 + ma\varphi'(a) - m\varphi(a) = 0\,; \qquad \text{(D)}$$

ce qui indique que la fonction de a est de la forme a^2, cette quantité étant multipliée par une constante p dont on déterminera la valeur ; soit, en effet, $\varphi(a) = pa^2$, l'équation (D) devient

$$(4p + m)a^2 = 0\,; \qquad \text{de là,} \qquad p = -\frac{m}{4}.$$

Ainsi, les intersections successives des droites représentées par l'équation $y = ax - \frac{ma^2}{4}$ sont sur la parabole

$$x^2 = my.$$

Les conditions qui précèdent ont été obtenues en évitant toute idée de tangentes. En général, elles ne sont que suffisantes : si nous admettons que la droite primitive est, après une oscillation, transformée en une tangente à la courbe, nous pourrons conserver à la question toute sa généralité. Nous donnerons ici l'ellipse comme exemple.

5° A quelles conditions doivent obéir les fonctions algébriques A et B, pour que les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = Ax + B,$$

soient sur une ellipse donnée, et rapportée à son centre et à ses axes.

La courbe étant une ellipse, il existe une relation connue entre la droite qui unit l'origine à un point d'intersection, et la droite génératrice correspondante : le produit des tangentes des angles que ces droites forment avec l'axe des x est $-n^2$, c'est-à-dire négatif et constant.

L'équation de la droite étant

$$y = Ax + B, \tag{E}$$

si nous appelons A', A'', etc., B', B'', etc., les dérivées successives que donnent, dans A et dans B, l'accroissement de la variable indépendante, on aura l'équation de la droite changée

$$\text{(F)} \quad y = Ax + A'hx + A''\frac{h^2}{1.2}x^2 + \text{etc.} + B + B'h + B''\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

L'intersection des droites (E) et (F) donne

$$x = -\frac{B'}{A'}, \qquad y = \frac{A'B - AB'}{A'}. \tag{G}$$

La droite qui unit l'origine au point d'intersection est

$$y = \frac{A'B - AB'}{-B'}\,x.$$

Le produit des tangentes A et $\dfrac{A'B - AB'}{-B'}$ étant négatif et constant, on a

$$A\left(\frac{A'B - AB'}{-B'}\right) = -n^2.$$

De là, on déduit

$$A'B - AB' = \frac{B'n^2}{A} \quad \text{et} \quad \frac{B'}{A'} = \frac{AB}{n^2 + A^2}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions (G), on a

$$x = \frac{-AB}{n^2 + A^2}, \qquad y = \frac{n^2B}{n^2 + A^2},$$

ou

$$x = \frac{-AB}{n^2 + A^2}, \qquad \frac{y}{n} = \frac{nB}{n^2 + A^2}. \qquad \text{(K)}$$

L'équation de l'ellipse donnée étant $x^2 + \frac{y^2}{n^2} = m^2$, il est clair que les sommes des carrés des valeurs données en (K) doivent résoudre cette dernière équation. On doit donc avoir

$$\left(\frac{-AB}{n^2 + A^2}\right)^2 + \left(\frac{nB}{n^2 + A^2}\right)^2 = m^2,$$

ou

$$\frac{B^2}{n^2 + A^2} = m^2,$$

ou

$$B = m\sqrt{n^2 + A^2}.$$

Si nous faisons l'hypothèse la plus simple, si nous supposons que A est une variable indépendante a, nous retrouverons la condition donnée précédemment, c'est-à-dire, que les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = ax + m\sqrt{n^2 + a^2}$$

sont sur l'ellipse

$$n^2x^2 + y^2 = m^2n^2.$$

Un calcul analogue résout la question générale pour l'hyperbole et pour la parabole.

6° *Des développées et du cercle osculateur.* Les recherches de la développée et du cercle osculateur d'une courbe sont des conséquences des recherches qui précèdent. Pour la première, il suffira d'obtenir les intersections successives des droites normales aux génératrices primitives, chacune de ces normales passant par le point d'intersection des deux génératrices voisines correspondantes ; pour la seconde, on déterminera la distance d'un point de la courbe primitive au point correspondant de la développée. Ces calculs ne présentent aucune difficulté; nous donnerons seulement comme exemple la développée et le cercle osculateur de la parabole

$$x^2 = my.$$

La droite génératrice est

$$y = ax - \frac{ma^2}{4},$$

les coordonnées du point d'intersection de deux génératrices voisines sont

$$x' = \frac{ma}{4}, \qquad y' = \frac{ma^2}{4},$$

la droite normale à la génératrice primitive, et passant au point x', y', a pour équation

$$y - \frac{ma^2}{4} = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{ma}{2}\right).$$

Si dans cette dernière équation 1° on remplace a par $a + h$; 2° on développe; 3° on cherche l'intersection des deux normales, on a les coordonnées du point d'intersection

$$x = -\frac{ma^3}{2}, \qquad y = \frac{3ma^2 + 2m}{4},$$

si on élimine a entre ces deux dernières équations, on a

$$\frac{27mx^2}{16} = \left(y - \frac{m}{2}\right)^3.$$

Cette dernière équation est celle de la développée. Si on transporte l'axe des x parallèlement à lui-même, en posant $y - \frac{m}{2} = y$, on obtient la forme connue de la développée

$$x^2 = \frac{16y^3}{27m}.$$

Les coordonnées x', y'; x, y d'un point de la parabole et du point correspondant de la développée sont

$$x' = \frac{ma}{2} \qquad x = -\frac{ma^3}{2}$$

$$y' = \frac{ma^2}{4} \qquad y = \frac{3ma^2 + 2m}{4},$$

désignant par R le rayon du cercle osculateur, on a

$$R^2 = \left(\frac{ma}{2} + \frac{ma^3}{2}\right)^2 + \left(\frac{ma^2}{4} - \frac{(3ma^2 + 2m)}{4}\right)^2,$$

ou

$$R^2 = \frac{m^2}{4}(1 + a^2)^3.$$

Substituant pour a sa valeur déduite de l'une des expressions en x' ou en y', on aura le rayon du cercle osculateur en fonction de l'abscisse ou de l'ordonnée du point de la courbe. Pour obtenir ce rayon en fonction de y', on remplacera a^2 par l'expression $\frac{4y'}{m}$, et on aura

$$R^2 = \frac{(4y' + m)^3}{4m}.$$