NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V.-A. LEBESGUE

Rectification relative aux racines complexes des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 145-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__145_0>

RECTIFICATION

RELATIVE AUX

RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
professeur à la faculté de Bordeaux.

—

La règle donnée à la page 46 du présent volume de ces *Annales*, pour trouver les racines complexes entières de l'équation $a_0x^n+a_1x^{n-1}+..+a_n=0$, à coefficients entiers complexes, et où il faut sans doute lire (ligne 5) : « Diviseurs du module de a_n » au lieu de « diviseurs de $a_n(a-b\sqrt{1})$ » (*), peut se démontrer en deux mots. Soit $x=a+b\sqrt{-1}$, une racine entière, et $a_n=b_n+c_n\sqrt{1}$, $\frac{b_n+c_n\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}$ étant entiers ; il en sera de même du module $\frac{b_n^2+c_n^2}{a^2+b^2}$, il faut donc prendre pour a^2+b^2 des diviseurs de $b_n^2+c_n^2$, en négligeant toutefois ceux dont le module surpasse la limite trouvée. Quant aux racines incomplexes a et $b\sqrt{-1}$, a et b doivent diviser à la fois b_n et c_n.

Cette règle, comme je le montrerai plus loin, est moins simple que la règle ordinaire qui prescrit d'essayer les diviseurs de $b_n+c_n\sqrt{-1}$, lesquels sont en nombre moindre que ceux donnés par la règle précédente. Mais pour l'appliquer, il faut préalablement exposer la décomposition des entiers complexes en facteurs simples.

(*) $a+b\sqrt{-1}$ étant la racine cherchee, $a_n(a-b\sqrt{-1})$ est inconnue. Cette méprise est de moi et non de M. Finck, qui d'ailleurs ne s'est occupé que d'équations à coefficients réels. Tm.

Dans ses Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes (*Journal* de M. Crelle, t. XXIV), M. Dirichlet s'exprime ainsi : « Quoique les pro- » positions élémentaires de la Théorie des entiers com- » plexes aient été déjà exposées par l'illustre Gauss, nous » avons pensé qu'il pourrait être commode pour les lecteurs » de trouver dans une courte introduction, celles de ces pro- » positions dont nous aurons à faire usage. » (Page 4.)

Les six premières pages de cette introduction suffisent pour faire voir que la règle pour trouver les racines réelles entières des équations algébriques à coefficients entiers, s'applique aux racines entières complexes. M. Dirichlet ne se propose nullement cette question dans son Mémoire, dont les propositions principales sortent tout à fait du cadre des *Annales* ; on peut se faire une idée de la méthode suivie par M. Dirichlet en lisant son Mémoire sur cette proposition remarquable : « Toute progression arith- » métique dont les deux premiers termes sont premiers entre » eux, renferme une infinité de nombres premiers » Ce Mémoire a été publié en allemand, mais M. Terquem en a donné la traduction dans le *Journal de Mathématiques*. C'est un service rendu à la science des nombres.

Je me propose d'exposer dans ces *Annales*, quelques propositions élémentaires plutôt indiquées que développées dans l'introduction du Mémoire cité plus haut. Je commencerai par donner la décomposition des entiers complexes en facteurs simples, d'où dérive immédiatement la règle pour trouver les racines complexes entières des équations algébriques à coefficients entiers.