NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MATHIEU DAURIAC

Question de physique (Éc. normale). Théorie des vapeurs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 127-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__127_1>

QUESTION DE PHYSIQUE (*Éc. normale*).

Theorie des vapeurs.

PAR M. MATHIEU DAURIAC,
Professeur de mathématiques.

Tout le monde sait que, lorsqu'un liquide est contenu dans un vase complétement fermé, il se forme une quantité de vapeur, de ce liquide, capable de saturer l'espace laissé libre, pour la température à laquelle se trouvent et le liquide et l'enceinte.—Si l'on vient, par un moyen quelconque, à élever la température, l'on sait encore que l'espace saturé primitivement ne l'est plus et qu'il est nécessaire pour le saturer de nouveau, qu'une seconde quantité de liquide passe à l'état de vapeur.—C'est le poids du liquide, vaporisé en second lieu, que je me propose de calculer; et comme ce poids n'est point le même dans toutes les circonstances, je distinguerai trois cas principaux :

I. On donne une sphère en cuivre mince, portant une tubulure que l'on peut hermétiquement fermer et qui sert à l'introduction d'un liquide donné, de l'eau, par exemple; la sphère ne contenant que de l'air sec, on y verse un volume donné d'eau et on la ferme. Au bout de quelque temps l'équilibre de température entre la sphère et l'eau étant établi, la saturation dans l'espace, différence des volumes de la sphère et du liquide, étant parfaite, l'on observe la température, qui est de t°; l'on chauffe alors la sphère et la température s'élève jusqu'à T°; par là une nouvelle saturation se produit et l'on demande le poids du liquide qui s'est vaporisé en second lieu.

II. La sphère est pleine d'air saturé de vapeur à la température initiale t°; on y verse un volume donné d'eau à t^{e} et on la ferme. La température de l'enceinte et de l'eau étant la même, la différence des volumes de la sphère et du liquide, se trouve saturée à t°, indépendamment de l'eau introduite. On porte la température à T°, et une nouvelle saturation se produit ici aux dépens, du liquide versé; l'on demande le poids de l'eau qui s'est vaporisée.

III. La sphère est pleine d'air à un certain état hygrométrique, on y verse de l'eau et on ferme, la température est t°; la différence des volumes de la sphère et du liquide se sature bientôt de vapeur pour cette température. Alors on chauffe jusqu'à la température T° ; et une nouvelle saturation ayant lieu, on demande le poids du liquide qui s'est vaporisé, dans le passage de la température t à la température T.

Les énoncés de ces trois problèmes étant ainsi posés, je vais m'occuper de leur résolution ; et d'abord du premier, parce que la marche à suivre sera la même pour les deuxième et troisième, et qu'il présente moins de difficultés.

I.

1° Le volume de la sphère étant représenté par V_1 à 0°, il s'ensuit qu'à T°, ce volume devient $V_1(1+kT)$, k étant le coefficient de dilatation cubique du cuivre pour chaque degré centigrade. De même à t°, ce volume devient $V_1(1+kt)$.

2° Le volume de l'eau renfermée dans la sphère étant représenté par V_0 à 4°, 1 ; ce volume devient $V_0(1+\lambda)$ à la température T° ; λ exprimant l'accroissement de l'unité de volume de l'eau, prise à son maximum de densité, pour la température T°. De même $V_0(1+\lambda')$ exprimera ce volume à t°.

3° Cela posé, le volume de l'eau qui se réduira en vapeur, sera celui qui est capable de saturer l'espace $N=V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)$; *plus* le volume de l'eau qui devra saturer l'espace occupé par cette eau qui vient de se vaporiser ; *plus* le volume de l'eau capable de saturer le nouvel espace, laissé libre par l'eau qui s'est vaporisée en second lieu, et ainsi de suite à l'infini ; *moins* le volume de l'eau qui saturait de vapeur l'espace $N'=V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')$ à la température initiale t ; volume que j'estimerai comme je viens de le dire pour celui qui sature N à la température finale T.

Nommant donc xv, le volume de l'eau qui doit saturer de vapeur l'espace N ; je trouve pour son expression, $x^v=\frac{N}{m}$, en appelant m, le volume de vapeur que donne un centimètre cube d'eau distillée, prise à $4°,1$ et portée à $T°$; il est facile de voir que j'obtiens cette expression en me servant de la loi de Dalton ; *les quantités de vapeur émises par un même liquide dans les mêmes circonstances sont proportionnelles aux espaces à saturer.*

Actuellement, si je nomme x'_v la quantité d'eau en volume qui sature de vapeurs à $T°$, l'espace x_v, je trouve par les mêmes considérations $x'_v = \frac{x_v}{m}$ ou bien $x'_v = \frac{N}{m^2}$. Les expressions x''_v, x'''_v ... $x_{\mu v}$.... sont toutes de la même forme, chacune d'elles est égale à la précédente divisée par m, ce qui, en remplaçant la précédente par sa valeur, donne une suite de fractions dont le numérateur est le même N, et dont les dénominateurs sont les diverses puissances de m. On voit donc que la valeur de X_v, c'est-à-dire le volume de l'eau à $4°,1$, qui sature à $T°$ l'espace N de vapeur, est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le premier terme est x_v et la raison $\frac{1}{m}$, son expression sera donc

$$(1) \qquad X_v = \frac{\left(\frac{N}{m}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{N}{m-1}.$$

4° En suivant la même marche, il est évident que l'expression du volume d'eau à $4°,1$, qui doit, étant porté à $t°$, saturer de vapeur l'espace N', sera identiquement de même forme et donnera

$$(2) \qquad X'_v = \frac{N'}{m'-1}.$$

5° En retranchant de la première expression la deuxième, on trouve

$$Q = X_v - X'_v = \frac{N(m'-1) - N'(m-1)}{(m-1)(m'-1)},$$

pour l'expression du volume d'eau, à son maximum de densité, qui sature de vapeur la sphère, lorsque la température de t^o devient T^o.

Pour passer de cette expression du volume à celle du poids, on n'a qu'à multiplier ce volume par la densité de l'eau à 4°,1, que j'égale à l'unité. Donc, la formule précédente exprime aussi le poids du volume d'eau qui sature de vapeur la sphère, lorsque cette eau passe de la température t à la température T.

II.

1° Dans ce second cas, lorsqu'on verse l'eau à t^o, la sphère se trouve déjà pleine d'air saturé de vapeur à cette température, par conséquent à mesure que l'eau s'introduit, un volume d'air, égal au sien, s'échappe en emportant sa vapeur, de telle sorte que, lorsque toute l'eau est versée et au moment où l'on ferme la sphère, il ne reste plus dans l'espace laissé libre que de l'air à la pression barométrique de l'air extérieur, et à la température ambiante, mais parfaitement saturé à cette température. Dès lors le poids de vapeur, qui saturera la différence des volumes, est indépendant du volume d'eau introduit et, d'après la loi de Dalton, est proportionnel à cet espace; on a donc pour son expression

$$X'_v = \frac{N'}{m'}.$$

2° Actuellement la quantité de vapeur qui saturera l'espace N, sera celle qui le saturerait à T°, moins celle qui le saturait déjà à t^o.

Or, si l'on suppose qu'une couche mince de liquide, se produise spontanément en vapeur, et en quantité suffisante pour saturer à T° l'espace N, supposé sec, en laissant la place, occupée précédemment par cette couche, complètement vide ; l'expression de son poids sera $p = \frac{N}{m}$. Par conséquent la quantité d'eau, prise sur l'eau introduite, qui sature de vapeur l'espace N, est

$$x_v = \frac{N}{m} - \frac{N'}{m'} = \frac{Nm' - N'm}{mm'}.$$

Maintenant il ne reste plus qu'à saturer l'espace laissé libre par la couche mince d'eau qui s'est vaporisée ; mais son expression est, comme nous le savons déjà $x'_v = \frac{x_v}{m}$. La quantité qui saturerait l'espace laissé libre par cette nouvelle couche d'eau vaporisée est $x''_v = \frac{x'_v}{m}$, et ainsi de suite à l'infini. De telle sorte que les expressions x_v, x'_v, x''_v ... x^{μ}_v ...., sont toutes de même forme et constituent une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le premier terme est x_v, et la raison $\frac{1}{m}$. En en faisant la somme, on aurait donc

$$Q = \frac{\left(\frac{Nm' - N'm}{mm'}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{Nm' - N'm}{m'(m-1)}.$$

Pour le poids de l'eau qui s'est vaporisée pour saturer à T°, la sphère, de vapeur.

III.

1° La sphère étant pleine d'air à un état hygrométrique marqué par α degrés de l'hygromètre de Saussure et à une température t°, l'on verse le volume donné d'eau et l'on ferme, de sorte qu'il ne reste plus dans la différence des volumes de la sphère et de l'eau, que de l'air dans les conditions indiquées.

Le volume à saturer d'abord à t° est N', et la quantité de vapeur qui devra saturer cet espace est celle qui le saturerait s'il était parfaitement sec, moins l'eau hygrométrique, existant déjà dans la sphère.

Or, si l'on cherche dans la table des *tensions de la vapeur d'eau correspondantes à chaque degré de l'hygromètre*, table construite par M. Biot, sur les données expérimentales de M. Gay-Lussac, la tension a correspondante à α degrés; *les quantités de vapeur renfermées dans le même espace et à la même température étant entre elles comme les tensions*, il s'ensuit que a peut représenter en même temps que la tension de la vapeur, la quantité de vapeur qui aurait cette tension et qui serait contenue dans l'unité de volume, en appelant 100 le poids de vapeur qui le saturerait. Par conséquent la quantité de vapeur qui se trouve dans un espace donné est les $\frac{a}{100}$ de celle qui le saturerait à la température indiquée.

Cela posé : le poids de vapeur qui sature à t° l'espace N', est $q = \frac{N'}{m'}$; et celui qui se trouve dans N' lorsque l'hygromètre marque α degrés, est $q' = \frac{aq}{100} = \frac{aN'}{100m'}$; de là on tire

$$\gamma = q - q' = \frac{N'(100 - a)}{100m'},$$

pour le poids de vapeur qui saturerait à t° l'espace N', si l'eau en se vaporisant n'avait laissé un nouvel espace à saturer; or ici, comme dans le cas précédent, la couche d'eau qui s'est vaporisée a laissé sa place parfaitement vide et sèche, donc la quantité de vapeur qui saturera cet espace lui est proportionnel et est exprimé par

$$\gamma' = \frac{\gamma}{m'} = \frac{N'(100 - a)}{100m'^2};$$

le poids de vapeur qui saturerait ce nouvel espace γ', laissé libre, serait de même forme et égal à

$$\gamma'' = \frac{\gamma'}{m'} = \frac{N'(100 - a)}{100m'^3};$$

et ainsi de suite à l'infini. Il est aisé de voir que là encore, le poids de vapeur qui saturera à $t°$ la différence des volumes de la sphère et de l'eau, est la somme d'une progression géométrique dont le premier terme est γ et la raison $\frac{1}{m'}$, et que l'expression de ce poids est

$$X'_v = \frac{N'(100 - a)}{100(m' - 1)}.$$

2° Actuellement, la sphère étant toujours pleine d'air contenant de la vapeur d'eau, si l'on y introduit le volume donné d'eau, que l'on ferme et que l'on recherche le poids de vapeur qui saturerait à T° la différence des volumes de la sphère prise à 0°, et de l'eau prise à 4°,1, en ne tenant pas compte pour un moment, des espaces successifs laissés libres par l'eau qui se vaporise, on trouve en appelant N l'espace à saturer et q' le poids d'eau hygrométrique existant déjà dans N,

$$x_v = \frac{N}{m} - q' = \frac{100Nm' - aN'm}{100mm'}.$$

Mais si l'on tient compte des diverses quantités d'eau qui se sont vaporisées pour saturer les espaces x_v, x'_v, x''_v, x'''_v, ... x^v_v ....., il est facile de voir que ces quantités sont les divers termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont x_v est le premier terme et $\frac{1}{m}$ la raison, et que la somme de tous ces termes représente la quantité de vapeur qui sature l'espace N à T°. En faisant donc cette somme, on aura.

$$X_v = \frac{\left(\frac{100Nm'-aN'm}{100mm'}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)} = \frac{100Nm'-aN'm}{100m'(m-1)}.$$

Or, il est évident que X_v est trop grand de la quantité X'_v de vapeur qui saturerait l'espace N' à $t°$; faisant la soustraction, on obtient l'expression

$$Q=X_v-X'_v=$$
$$=\frac{100Nm'(m'-1)-aN'm(m'-1)-N'm'(m'-1)(100-a)}{100m'(m'-1)(m-1)},$$

pour le poids de vapeur qui sature la difference des volumes de la sphère et de l'eau, lorsqu'on porte la température de $t°$ à $T°$, cette différence de volumes étant remplie d'air à un état hygrométrique marqué par α degrés.

Ce cas est, comme on vient de le voir, le plus général; il présente aussi la formule la plus compliquée, mais qui a l'avantage de renfermer celles de I et de II. En effet, pour passer de ce cas-ci au I, on n'a qu'à supposer l'air parfaitement sec, et par conséquent à égaler à zéro a, alors :

$$Q=\frac{100Nm'(m'-1)-N'm'(m-1)100}{100m'(m'-1)(m-1)}=\frac{N(m'-1)-N'(m-1)}{(m'-1)(m-1)},$$

ce qui est bien la première formule

Si, au contraire, on fait $a = 100$; ce qui suppose l'espace saturé déjà à $t°$, on a :

$$Q=\frac{100Nm'(m'-1)-100N'm(m'-1)}{100m'(m'-1)(m-1)}=\frac{Nm'-N'm}{m'(m-1)};$$

ce qui est bien encore la deuxième formule.

Il ne reste plus qu'à calculer m et m'.

J'ai déjà dit que m et m' étaient les espaces saturés par un gramme de vapeur d'eau aux temperatures T et t; si on appelle donc d la densité de la vapeur à T°, et d' cette densité à $t°$, on aura $m = \frac{1}{d}$ et $m' = \frac{1}{d'}$. Mais ces deux expressions étant de même forme, je vais seulement m'occuper de m.

Or, la densité de l'air à 0° et sous la pression normale $0^m,760$ étant 0,0012991 ; celle de l'air à T° et sous la pression h est $\frac{0,0012991 \times h}{760(1+0,00366.T)}$, et comme la densité de la vapeur d'eau est, d'après les calculs de M. Gay-Lussac, corrigés du coefficient de dilatation des gaz, les 0,620 de celle de l'air placé dans les mêmes circonstances, il s'ensuit que

$$m = \frac{760}{h} \cdot \frac{(1+0,00366.T)}{0,620 \times 0,0012991} \text{ centimètres cubes,}$$

ou bien, tout calcul fait,

$$\left.\begin{array}{l} m = 943581 \dfrac{(1+0,00366.T)}{h} \\ \text{De même, } m' = 943581 \dfrac{(1+0,00366.T)}{h'} \end{array}\right\} \text{centimètres cubes.}$$

Si l'on reprend actuellement les trois formules que j'ai données pour le poids de vapeur qui sature la sphère dans le passage de la température t à la température T, et que l'on y substitue les valeurs de N et de N', ces formules deviennent :

$$\text{I. } Q = \frac{(m'-1)\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)\right\}-(m-1)\left\{V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')\right\}}{(m-1)(m'-1)}$$

$$\text{II. } Q = \frac{m'\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)\right\}-m\left\{V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')\right\}}{m'(m-1)}$$

$$\text{III. } Q = \frac{100m'(m'-1)\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)\right\}-am(m'-1)}{100m'(m'-1)}$$

$$\frac{\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda')\right\}-m'(m-1)(100-a)\left\{V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')\right\}}{(m-1).}$$

Si l'on voulait faire une application numérique de l'une quelconque de ces formules, il n'y aurait plus qu'à calculer les valeurs de m et de m', et à les substituer dans l'expression dont l'on voudrait faire usage. Alors, dans ces formules, h et h' désigneraient des colonnes de mercure comptées en millimètres, d'après la table de Dalton (*tensions de la vapeur d'eau*).

k. . . . . le coefficient de dilatation cubique du cuivre pour 1° centigrade, il est à peu près $=0,00005154$, d'après MM. Dulong et Petit.

λ et λ'. . . . . les accroissements de volume de l'unité de volume d'eau, prise à 4°,1, pour les températures T et t. On les prendra dans la table de Hallström.

T et t. . . . . des degrés centigrades donnés par des thermomètres à mercure.

0,00366. . . . . . . le coefficient de dilatation des gaz, donné en même temps par MM. Régnault, en France, et Magnus, en Allemagne.

Enfin, a. . . . . . la tension de la vapeur d'eau correspondante au degré observé de l'hygromètre de Saussure. On devra prendre cette valeur, comme je l'ai déjà dit, dans la table de MM. Biot et Gay-Lussac.

J'ai donné ces détails, parce que, dans quelques cas, on peut avoir besoin de rechercher le poids de la vapeur d'eau qui sature un espace donné, et que, sous ce point de vue, ils pourraient être utiles aux physiciens, indépendamment de l'intérêt que présentait cette recherche comme application du calcul à la physique.