NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉLIE GOUGIS

Démonstration du théorème 80

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 124-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__124_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 80. (T. III, p. 40).

PAR M. GOUGIS (ÉLIE),
élève de mathématiques spéciales au collége Stanislas.

Une parabole ayant un foyer fixe et passant par un point fixe, le lieu du sommet est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence de même rayon.

Je prends pour origine des coordonnées, le foyer donné, et pour axes deux droites rectangulaires dont l'une, l'axe des x, passe par le point donné ; je désigne par q l'abscisse de ce point. L'équation d'une quelconque de ces paraboles, ayant pour foyer le point $x=0, y=0$, pourra se mettre sous la forme $x^2+y^2=(my+nx+p)^2$, avec la relation nécessaire

$$m^2+n^2=1, \tag{1}$$

$my+nx+p$ étant la directrice de la parabole. Le sommet se trouvant à l'intersection de la courbe avec une perpendiculaire à la directrice menée par le foyer, les valeurs de x et de y, satisfaisant à la fois aux deux équations

$$x^2+y^2=(my+nx+p)^2, \quad y=\frac{m}{n}x,$$

équation de l'axe de la courbe, seront les coordonnées du sommet. Si x_1 et y_1 sont ces coordonnées, on trouve aisément

$$x_1=-\frac{np}{2}, \quad (2) \qquad y_1=-\frac{mp}{2}. \quad (3)$$

De plus la courbe passant au point fixe, $x=0$, $x=q$, on aura la relation

$$q^2=(nq+p)^2=n^2q^2+2pnq+p^2. \tag{4}$$

L'élimination de m, n, p, entre les équations (1), (2), (3) et (4), donnera la relation cherchée entre x_1 et y_1.

Les équations (2) et (3) élevées au carré, puis combinées avec la relation (1) donnent $\frac{p^2}{4}=x_1^2+y_1^2$. D'ailleurs de l'équation (2), on déduit $np=-2x_1$, $n^2=\frac{x_1^2}{x_1^2+y_1^2}$. Substituant ces valeurs dans l'équation (4), et réduisant autant que possible, on a pour équation du lieu

$$(y_1^2+x_1^2)^2-qx_1(x_1^2+y_1^2)-\frac{q^2}{4}y_1^2=0.$$

Or si l'on cherche l'équation d'une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence de même rayon, en prenant pour axes des coordonnées ceux qui se présentent spontanément, c'est-à-dire, deux droites rectangulaires se coupant au point qui décrit le lieu et qui est supposée commun aux deux circonférences, à l'origine du mouvement, l'une de ces droites, l'axe des x, étant diamètre du cercle fixe, on trouve pour équation de l'épicycloïde

$$(y^2+x^2)^2+4rx(x^2+y^2)-4r^2y^2=0,$$

r étant le rayon commun aux deux circonférences.

Cette équation devient identique avec la précédente, si l'on fait $q=-4r$. D'où l'on conclut que le lieu du sommet de la parabole est le lieu décrit par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence fixe et de même rayon; le centre de la circonférence fixe étant situé au quart de la droite qui joint le foyer au point donné, à partir du foyer, et le foyer étant lui-même le point de la circonférence fixe qui sert d'origine au mouvement.

Démonstration géométrique de la même question (fig. 17).

F et P étant le foyer et le point donnés, je considère l'une des paraboles ayant pour foyer F et passant au point P. Soit DD′ sa directrice, et O le centre du cercle qui a pour diamètre $\frac{\mathrm{FP}}{2}$. Par le point O, je mène OB parallèle à l'axe, et au point B la tangente. Cette tangente divisera SF en deux parties égales. En effet, les triangles PFP′, et BOF étant isocèles et ayant un angle égal BOF=FPP′ sont semblables. Donc les trois points F, B, P′, sont en ligne droite; mais alors les triangles FBC, FP′A sont semblables et par conséquent $\frac{FC}{FA} = \frac{FB}{FP'}$. Mais la similitude des triangles BOF, FPP' donne $\frac{FB}{FP'} = \frac{FO}{FP} = \frac{1}{4}$.

Donc $CF = \frac{1}{4} FA$. Donc le point C est le milieu de FS. De là résulte l'égalité des triangles BSC, BCF.

Alors si je prolonge OB d'une quantité $O'B = OB$, et si je décris le cercle ayant O' pour centre et O'B pour rayon, c'est-à-dire le cercle tangent au cercle O, ce cercle devra passer au point ρ; car les triangles O'BS, OBF sont égaux comme ayant un angle égal $O'BS = OBF$, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc $O'S = O'B = OB$. Mais alors les arcs BS, BF des cercles égaux O et O', sous-tendus par des cordes égales $BF = BS$ seront égaux. Donc le point S sera un point de l'épicycloïde. C. Q. F. D.

Note. M. Mesnard (A.), élève du collége Charlemagne, démontre le même theorème en prenant le point fixe pour origine, et cherchant d'abord le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les directrices; et de là, le lieu des sommets, qu'il compare au lieu connu des epicycloïdes.

M. Rispal, élève du collége de Rouen, fait usage des coordonnées polaires. Nous donnerons sa solution prochainement.