NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUGUSTE MATHIEU

Solution de la question 73

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 121-124

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__121_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 73 (t. II, p. 328).

PAR M. MATHIEU (AUGUSTE),
elève de mathématiques spéciales au collége Stanislas.

Un triangle rectangle ayant pour hypoténuse la corde d'une conique et pour sommet un point fixe dans le plan de la conique, l'enveloppe de l'hypoténuse est une seconde conique dont un des foyers est au point fixe.

Je prends pour axes des coordonnées, les parallèles aux axes principaux de la conique menées par le point fixe et l'équation de cette conique est

$$ay^2+cx^2+dy+ex+f=0. \qquad (1)$$

Soit $y=mx+p$ (2) l'équation d'une sécante. Je vais chercher la relation qui doit exister entre m et p, pour que les droites qui joignent les points d'intersection de cette sécante avec la courbe à l'origine soient rectangulaires. Or si (x_1, y_1) (x_2, y_2) représentent les coordonnées de ces points d'intersection, on doit avoir, pour cela, $\frac{y_1}{x_1}=-\frac{x_2}{y_2}$, d'où $x_1x_2+y_1y_2$ $=0$ (3). Reste à exprimer les produits x_1x_2, y_1y_2, au moyen de m et p. Dans l'équation (1), je fais successivement $y=mx+p$, $x=\frac{y-p}{m}$, et il en résulte deux équations à une seule inconnue; l'une en x ayant pour racines les abscisses x_1, x_2, et l'autre en y ayant pour racines les ordonnées y_1, y_2. Ces équations sont

$$x(am^2+c)+x(\ldots\ldots)+ap^2+dp+f=0\ ,$$

$$y(am^2+c)+y(\ldots\ldots)+cp^2-emp+fm^2=0.$$

Les derniers termes de ces équations, divisés par am^2+c, sont les valeurs des produits x_1x_2, y_1y_2, et l'équation (3) se transforme dans la suivante :

$$p^2(a+c)+p\,(d-em)+f(1+m^2)=0. \tag{4}$$

Je considère actuellement les équations (2) et (4), et pour avoir le lieu cherché, je commence par éliminer p entre ces deux équations ; après quoi, j'éliminerai m entre l'équation finale en m et son équation dérivée. Or, de l'équation (2) je tire $p=y-mx$, et substituant dans l'équation (4), je trouve

$$m^2\,[x^2(a+c)+ex+f]-m[2xy\,(a+c)+dx+ey]+$$
$$+y^2(a+c)+dy+f=0,$$

dont la dérivée est

$$2m\,[x^2(a+c)+ex+f]-[2xy\,(a+c)+dx+ey]=0.$$

Tirant la valeur de m de cette dernière équation, et la portant dans la précédente, on trouve l'équation du lieu

$$[2xy\,(a+c)+dx+ey]^2-4\,[x^2(a+c)+ex+f]$$
$$[y^2(a+c+dy+f]=0.$$

Si on développe cette équation, les termes du quatrième et du troisième degré disparaissent, et il reste une équation du second degré,

$$y^2[e^2-4f(a+c)]+x^2[d^2-4f(a+c)]=4f^2+4fdy+4fex+2dexy.$$

Cette équation peut se mettre sous une autre forme, car si on ajoute $d^2y^2+e^2x^2$ aux deux membres, le second membre devient le carré de $dy+ex+2f$, et l'équation se transforme dans la suivante :

$$y^2+x^2=\frac{(dy+ex+2f)^2}{d^2+e^2-4f(a+c)}, \tag{5}$$

équation d'une conique dont l'origine est un foyer et dont la directrice voisine est la droite $dy+ex+2f=0$. Or, il est remarquable que cette droite est précisément la polaire de l'origine par rapport à la conique donnée. Les coordonnées du centre sont $y = \frac{-d}{2(a+c)}$, $x = \frac{-e}{2(a+c)}$, et la courbe est facile à construire avec ces données.

Le rapport constant de la distance d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, déduit de l'équation (5), est $\sqrt{\frac{d^2+e^2}{d^2+e^2-4f(a+c)}}$, sur quoi on remarquera que la nature de la conique varie avec le signe de $4f(a+c)$, et on établirait sur ce signe une discussion à laquelle je ne m'arrêterai pas. Je ferai toutefois remarquer que lorsqu'on a $a+c=0$, ce qui a lieu lorsque la conique donnée est une hyperbole équilatère, la conique trouvée est une parabole.

Lorsqu'on a $f=0$, ce qui a lieu lorsque le point donné est un point de la conique donnée, l'équation se réduit à $dx - ey = 0$; ce qui est l'équation de la normale à la conique au point que l'on considère : cependant alors le lieu se réduit à un point unique situé sur cette normale. (*Nouv. Ann.*, t. II, p. 187.)

Soit $d=0$, $e=0$; l'équation se réduit à $y^2+x^2=\frac{-f}{a+c}$, ce qui est l'équation d'un cercle rapporté à son centre, si toutefois $\frac{-f}{a+c}$ est une quantité positive ; mais si $d=0$ et $e=0$, c'est que le point donné est le centre de la conique donnée. D'ailleurs, on sait que lorsqu'un lieu est engendré par les intersections successives d'une droite, la droite est tangente en chaque point à la courbe qu'elle engendre, on arrive donc à ce théorème : Le lieu des projections du centre d'une conique sur les cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres rectangulaires, est un cercle concentrique à cette conique.

Soient A et B les demi-axes principaux de la conique, dans le cas de l'ellipse, on aura $-f = A^2B^2$, $a = A^2$, $b = B^2$, et le rayon du cercle sera $\dfrac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}}$; dans le cas de l'hyperbole, on aura $-f = -A^2B^2$, $a = A^2$, $b = -B^2$, et le rayon du cercle sera $\dfrac{AB}{\sqrt{B^2-A^2}}$. Ce cercle n'existe donc pas lorsqu'on a $B < A$; et, en effet, alors l'angle des asymptotes étant plus petit que 90°, de deux diamètres rectangulaires, un seul peut rencontrer la courbe.

Note. M. Poncelet a découvert ce théorème, pour un angle quelconque, à l'aide de sa théorie sur les centres d'homologie (Propriétés projectives, p. 279). La belle démonstration de M. Mathieu ne s'applique qu'à l'angle droit. Il serait à désirer qu'on eût un procédé analytique analogue pour le cas général. Lorsque la conique donnée se réduit à deux droites, le théorème est le même que celui qu'on a énoncé t. II, p. 536; il fournit une description organique des coniques, due à Maclaurin. Si par les extrémités de la corde mobile, on mène deux tangentes à la conique donnée, le lieu de leur intersection est encore une conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée; théorème que M. Poncelet déduit aussi de la même théorie. Tm.