NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Démonstration simple du théorème de Fourier

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 119-121

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__119_1>

DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DE FOURIER.

PAR M. BONNET (OSSIAN)

—

Théorème. « Soit $X = 0$ une équation, et $X', X'', \ldots X^{(m)}$ les
» dérivées successives du premier membre : la différence
» entre le nombre des variations de la suite X, X', $X'', \ldots$
» $X^{(m)}$ pour $x = \alpha$, et le nombre des variations de la même
» suite pour $x = \beta$, ne peut jamais être moindre que le
» nombre des racines réelles de l'équation proposée, com-
» prises entre α et β, et la différence quand elle existe, est
» toujours un nombre pair. »

Démonstration. Supposons le théorème vrai pour toute équation du degré $(m-1)$, et démontrons-le pour une équation de degré m ; étant évident pour une équation du premier ou du second degré, il se trouvera ainsi démontré généralement. Soient n et n' les nombres respectifs des racines de la proposée et de la dérivée comprises entre α et β. V_α, V'_α les nombres des variations de la suite X, X', $X'', \ldots$ et de la suite X', $X'', \ldots$ pour $x = \alpha$, et V_β, V'_β les nombres des variations des deux mêmes suites pour $x = \beta$; nous aurons d'après l'hypothèse

$$V'_\alpha - V'_\beta = n' + 2k,$$

(*) Dans ce cas, le maximum est à une des extrémités du grand axe et le minimum à l'autre extrémité.

k étant au moins zéro, et d'après le théorème de Rolle,

$$n' - n = p,$$

p étant au moins -1. Supposons d'abord que p soit un nombre pair $2k'$, k' étant au moins zéro; dans ce cas les valeurs X_α, X_β que prend X quand on fait successivement $x = \alpha$, $x = \beta$, et les valeurs X'_α, X'_β que prend X' pour les mêmes hypothèses présenteront en même temps une permanence ou une variation, par conséquent les valeurs X_α, X'_α que prennent X et X' pour $x = \alpha$, et les valeurs X_β, X'_β que prennent X et X' pour $x = \beta$, présenteront aussi en même temps une permanence ou une variation, donc on aura

$$V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta = n' + 2k = n + 2k + 2k';$$

ce qui est conforme à l'énoncé du théorème.

Supposons ensuite que p soit un nombre impair. Dans ce cas $\frac{X_\alpha}{X_\beta}$ et $\frac{X'_\alpha}{X'_\beta}$, par conséquent $\frac{X_\alpha}{X'_\alpha}$ et $\frac{X_\beta}{X'_\beta}$, auront des signes contraires, donc on aura

$$V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta \pm 1 = n + 2k + p \pm 1;$$

si p est positif, cette égalité est conforme à l'énoncé; si p est négatif, il faut encore démontrer que ± 1 se réduit à $+1$, ou que $V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta + 1$, ou que X_α et X'_α forment une variation. En effet, dans le cas où p est négatif, et par conséquent -1, il ne peut se trouver qu'une racine de la dérivée entre deux racines consécutives quelconques de la proposée comprises entre α et β; comme aussi entre la plus petite de ces racines et α, et entre la plus grande de ces racines et β, il n'y a aucune racine de la dérivée. Cela étant, α doit comme un nombre très-voisin, mais au-dessus d'une racine, rendre X et X' de signes contraires.

Remarque. Pour la manière de compter les variations, lorsque les hypothèses $x = \alpha$, $x = \beta$, font évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite, et pour les conséquences du théorème, *Voyez* l'ouvrage de Fourier, ou l'Algèbre de M. Lefébure de Fourcy.