# Note sur une question d'examen

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 3 (1844), p. 111-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__111_1>

# NOTE

## SUR UNE QUESTION D'EXAMEN.

—

1. *Trouver sur la droite* AB, *qui unit deux points lumineux* A, B, *le point le moins éclairé par ces deux lumières.*

Soient $a$, $b$, les intensités des lumières A, B, à l'unité de distance; $d$ la longueur de la droite AB; $x$ la distance du point A à un point quelconque C de AB, situé entre A, B. La somme des intensités des lumières A, B, au point C, aura pour expression $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$. Si l'on donne au point C toutes les positions qu'il peut avoir entre A et B, en faisant croître $x$ depuis 0 jusqu'à $d$, la fonction $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$ infinie, d'abord, lorsque $x=0$, diminuera pour des valeurs croissantes de $x$ jusqu'à une certaine limite à partir de laquelle la valeur de cette fonction ira en augmentant, puisqu'elle devient une nouvelle fois infinie, quand $x=d$. Il y a donc, entre A et B, un point D dont la distance $x$, au point A, rend minimum la fonction $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$. Le point D est de tous ceux de la droite AB, le moins éclairé par les deux lumières; c'est le point cherché. On conçoit de plus, qu'en prolongeant la droite AB, dans les deux sens BY, AX, on pourra trouver sur ces prolongements BY, AX, deux autres point D′, D″, pour lesquels la somme des intensités des lumières A, B, sera la même qu'au point D. Car, en faisant varier $x$ depuis $d$ jusqu'à l'infini, ou depuis 0 jusqu'à $-\infty$, la fonction qui exprime la somme des intensités des deux lumières passe par tous les états de grandeur, compris entre l'infini et zéro.

Pour déterminer la position du point D, on pourrait chercher directement la valeur de $x$ comprise entre 0 et $d$, qui rend *minimum* la fonction fractionnaire $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$; mais on parvient au même résultat en traitant une question plus générale que la question proposée:

Trouver sur la droite AB indéfiniment prolongée, les points pour lesquels la somme des intensités des lumières A, B, est égale à une quantité donnée $c$.

Il est facile de prévoir que l'équation de ce dernier problème sera du quatrième degré. Supposez, en effet, que la quantité donnée $c$ soit plus grande que le *minimum* $m$ correspondant au point D. Il y aura alors sur la direction de la droite AB, quatre points C, C′, C″, C‴, satisfaisant à la condition proposée. Le premier, C, sera situé entre A et D; le second, C′, entre D et B; un troisième, C″, appartiendra au prolongement BY de AB; et enfin le quatrième, C‴, se trouvera sur l'autre prolongement AX de AB. Ainsi, en comptant les distances positives $x$, dans le sens AB, l'équation aura trois racines positives (deux plus petites que $d$, et la troisième plus grande) et une racine négative.

Si la quantité $c$ diminue progressivement pour devenir égale à $m$, les points C, C′, se rapprocheront du point D, et coïncideront avec ce dernier point, lorsque $c = m$. Les points C″, C‴, seront alors en D′, D″. Dans ce cas, l'équation du quatrième degré, aura deux racines AC, AC′, égales à AD. Si l'on suppose enfin $c < m$, les points C, C′, cesseront d'exister, l'équation aura deux racines imaginaires, et deux racines réelles AC″, AC‴; l'une d'elles sera positive, et l'autre négative. Et d'après cela, on voit que pour obtenir le minimum $m$ et la distance AD correspondante, il suffit d'exprimer que l'équation a deux racines égales et de déterminer la valeur commune à ces deux racines.

L'équation du problème est : $\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(d-x)^2} = c.$

Posons $\dfrac{a}{b} = n$, $\dfrac{c}{b} = p$, $d = 1$, il viendra :

$$\frac{n}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = p, \quad \text{ou} \quad px^2(1-x)^2 - n(1-x)^2 - x^2 = 0.$$

Développant et ordonnant

$$px^4 - 2px^3 + (p - n - 1)x^2 + 2nx - n = 0.$$

Je nomme $\alpha$ la racine double, $6$, $\delta$, les deux autres racines, on a

$$(1) \qquad 2\alpha + 6 + \delta = 2,$$

$$(2) \qquad \alpha^2 + 2\alpha(\beta + \delta) + \beta\delta = \frac{p - n - 1}{p},$$

$$(3) \qquad 2\alpha\beta\delta + \alpha^2(\beta + \delta) = -\frac{2n}{p},$$

$$(4) \qquad \alpha^2\beta\delta = -\frac{n}{p}.$$

Les égalités (1), (4) donnent

$$\beta + \delta = 2(1 - \alpha), \ \delta \ = -\frac{n}{p\alpha^2}.$$

Substituant dans (3), on obtient

$$-\frac{2n}{p\alpha} + 2\alpha^2(1 - \alpha) = -\frac{2n}{p},$$

d'où $\qquad -n + p\alpha^3(1 - \alpha) + n\alpha = 0,$

et par suite $\qquad (p\alpha^3 - n)(1 - \alpha) = 0.$

La racine double $\alpha$ devant être moindre que l'unité, on peut négliger le facteur $1 - \alpha$ ; on a alors

$$p\alpha^3 - n = 0, \quad \alpha^3 = \frac{n}{p}, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{n}{p}}.$$

Il reste à trouver la valeur de $p$.

Des égalités $\alpha^2\beta\delta = -\frac{n}{p}$, $\alpha^3 = \frac{n}{p}$, on tire immédiatement $\beta\delta = -\alpha$. D'ailleurs $\beta + \delta = 2(1 - \alpha)$. Substituant ces valeurs de $\beta\delta$, $\beta + \delta$, dans l'égalité (2), il en résulte

$$\alpha^2 + 4\alpha(1 - \alpha) - \alpha = \frac{p - n - 1}{p};$$

d'où $\qquad -3\alpha^2 + 3\alpha = 1 - \frac{n}{p} - \frac{1}{p} = 1 - \alpha^3 - \frac{1}{p};$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p} = 1 - \alpha^3 + 3\alpha^3 - 3\alpha = (1 - \alpha)^3.$$

Cette dernière équation donne successivement

$$1 = \left(\sqrt[3]{p} - \alpha\sqrt[3]{p}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{n}\right)^3;$$

$$\sqrt[3]{p} = 1 + \sqrt[3]{n}, \quad p = \left(1 + \sqrt[3]{n}\right)^3.$$

La valeur correspondante de $\alpha$ est $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt[3]{n}}$.

En remplaçant $p$, $n$, par les valeurs $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}$, dans les équations $p = \left(1 + \sqrt[3]{n}\right)^3$, $\alpha = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt[3]{n}}$, on a :

$$c = \left[\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}\right]^3, \quad \alpha = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}}.$$

La valeur de $c$ montre que le minimum cherché est le cube de la somme des racines cubiques des intensités des deux lumières $a$, $b$. Et de la valeur de $\alpha$, on conclut que pour obtenir le point D de la droite AB, le moins éclairé par les deux lumières, il faut partager cette droite en deux parties AD, DB, proportionnelles aux racines cubiques des intensités $a$, $b$, des deux lumières.

Les points D′, D″, seront déterminés par les valeurs de $\beta$, $\delta$. Or, $\beta + \delta = 2(1 - \alpha)$, $\beta\delta = -\alpha$; donc

$$AD' = 1 - \alpha + \sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha}, \quad AD'' = \alpha - 1 + \sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha}.$$

Pour montrer une application de ces formules, supposons que $a = 1$, $b = 8$. On aura

$$c = 27, \quad AD = \frac{1}{3}.AB, \quad AD' = AB\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right),$$

$$AD'' = AB\left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right).$$

G.

*Note* I. Le problème est donc réduit à partager une droite en deux segments, dont les cubes soient dans un rapport donné. Pappus indique la solution *mécanique* suivante, d'une admirable simplicité (*livre III*, *prop.* 5) : soit BD une longueur donnée ; du point D comme centre et du rayon DB, on décrit une circonférence ; ADC est un diamètre perpendiculaire à DB ; entre B et D, on prend sur BD un point E tel qu'on ait $\frac{BE}{DE}$ = rapport donné entre les cubes ; on mène la corde CEF, rencontrant la circonférence en F ; et ensuite la corde AGHK, rencontrant CF en G ; BD en H et la circonférence en K, et de telle sorte que l'on ait $GH = HK$ ; alors on aura $\frac{BD^3}{HD^3} = \frac{BE}{ED}$ = au rapport donné. Nous engageons les elèves à chercher la démonstration qui ne présente pas de difficulté.

Le point K peut aussi s'obtenir par l'intersection du cercle et d'une hyperbole, d'après la propriété suivante de cette courbe : par le point M d'une hyperbole, on mène une parallèle à la première asymptote et une seconde parallèle à la seconde asymptote ; prolongez la première parallèle, jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la seconde asymptote ; par le milieu de MN, on mène une parallèle à la seconde asymptote, qui rencontre nécessairement la courbe en un point O ; si par O, on mène une corde quelque OPQR, dans l'hyperbole, coupant la seconde parallèle en P, la première parallèle en Q, la courbe en R, on a constamment $QP = QR$.

II. Cette solution qu'on doit à Pappus, pour la multiplication et la division du cube, renferme la célèbre duplication comme cas particulier. Les habitants de Delos, tourmentés de la peste, ayant consulté l'oracle de Delphes, obtinrent pour réponse que le dieu, pour faire cesser le fléau, demandait un autel en or semblable à l'autel existant qui était un cube, mais double de volume ; on s'adressa à des artistes, à des architectes sans pouvoir réussir ; enfin on eut recours à Platon, qui répondit qu'en faisant cette demande, le dieu n'avait pas pour but principal d'avoir un autel double ; mais qu'il voulait reprocher aux Grecs, leur négligence des études géométriques ; cette réponse de Platon, fait présumer que c'est lui ou un autre géomètre qui aura soufflé à la Pythie cet oracle qui donna un grand essor aux travaux sur les lignes courbes.

III. On peut être curieux de connaître le lieu des points du plan, où l'intensité de la lumière est un *maximum* ou un *minimum* sur un système de droites parallèles à AB. Conservant la même notation, prenant AB pour axe des $x$, A, pour origine des coordonnées rectangulaires ; z étant l'intensité de la lumière, au point $x, y$ ; on a l'équation

$$z(x^2+y^2)\,[y^2+(d-x)^2]=(a+b)(x^2+y^2)+ad(d-2x). \quad (1)$$

Considérant $y$ comme constante, $x$ comme la variable indépendante, prenant la fonction prime de $z$ et l'égalant à zéro, on obtient

$$z[(2x-d)\,(x^2+y^2-dx)]=bx+a(x-d); \quad (2)$$

éliminant z, il vient

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y^2)\,[y^2+x^2+d(d-2x)]\,[bx+a(x-d)]=\\ =(2x-d)(x^2+y^2-dx)[(a+b)(x^2+y^2+ad(d-2x)]=0.\end{array}\right\}(3)$$

L'équation (3) est du 5$^e$ degré ; les termes de cet ordre sont $(a+b)x(x^2+y^2)^2$. Ainsi l'axe des $y$, ayant pour équation $x=0$, est une asymptote, passant par l'origine et deux fois tangente à la courbe ; ce qui équivaut à cinq points d'intersection.

Les points A et B appartiennent à la courbe ; car l'équation est satifaite par $x=y=0$, et par $x=d, y=0$ ; en effet en ces points l'intensité est un maximum.

En faisant $y=0$, dans l'équation (1), il vient, après avoir ôté les diviseurs $x$ et $d-x$ qui répondent aux points A et B et fait les réductions,

$$a(x-d)^3=-bx^3\;;\quad \text{d'où}\quad x=\frac{d\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}},$$

comme ci-dessus. La courbe a trois branches infinies passant par les points A, C, B; la première et la troisième renferment les *maxima*, et la seconde les *minima*. Les droites parallèles à l'axe des $x$, coupent la courbe en cinq points dont trois sont réels. Les droites parallèles à l'axe des $y$, rencontrent la courbe en quatre points, dont deux sont imaginaires, le cinquième est à l'infini.

IV. Soit en général une courbe donnée par l'équation bifocale $\varphi(z, z')=0$; $z$ et $z'$ sont les distances d'un point de la courbe aux deux foyers A et B. L'intensité de lumière en ce point est $\frac{a}{z^2}+\frac{b}{z'^2}$; pour que cette expression soit un maximum ou un minimum, il faut qu'on ait l'équation différentielle $\frac{adz}{z^3}+\frac{bdz'}{z'^3}=0$, (2); le rapport $\frac{dz}{dz'}$ est connu par l'équation de la courbe; on a donc deux équations entre $z$ et $z'$ qui font connaître les points de la courbe où la lumière est au maximum ou au minimum. Soit, par exemple, $pz+qz'=r$, l'équation bifocale de la courbe, on en tire $\frac{dz}{dz'}=-\frac{q}{p}$, et l'équation (2) donne $\frac{aq}{z^3}=\frac{bp}{z'^3}$; d'où $\frac{z}{z'}=\sqrt[3]{\frac{aq}{bp}}$; ce rapport est indépendant de $r$; donc en faisant varier le paramètre $r$, les points cherchés sur ces diverses courbes sont situés sur une circonférence.

Si $p=q=1$, la courbe est une ellipse, et l'on a $\frac{z}{z'}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; ainsi le problème traité ci-dessus est un cas particulier de l'ellipse, il suffit de poser $r=\text{AB}=d$, il se pre sente ici une difficulté, l'ellipse peut être de telle sorte que le rapport $\frac{z}{z'} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ y soit impossible; et cependant il doit toujours exister des points sur l'ellipse, où la lumière parvienne à sa plus grande ou à sa moindre intensité (*). Tm.