Nouvelles annales de mathématiques

Arcas Trébert

De la sphère tangente à quatre sphères données

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 101-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__101_1>

DE LA SPHÈRE TANGENTE A QUATRE SPHÈRES DONNÉES,

PAR M ARCAS TRÉBERT.

Le problème qui consiste à trouver une sphère tangente à quatre autres, a occupé nos plus célèbres géomètres : Fermat, Hachette, Poisson, MM. Gergonne, Binet et Cauchy en ont donné des solutions différentes. Toutefois ces solutions sont loin d'offrir toute la simplicité désirable : on va voir dans celle que nous allons donner quel avantage on peut retirer d'une notation symétrique et convenablement choisie.

I.

Soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

l'équation d'une sphère, que je représenterai, aussi pour abréger, par $S = 0$. J'appellerai *puissance* d'un point par rapport à la sphère, le carré de sa distance au centre moins le carré du rayon; en sorte que S représente la puissance du point (x, y, z) par rapport à la sphère dont $S = 0$ est l'équation. Je représenterai par p^2 la puissance de l'origine, et l'on aura toujours

$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = p^2.$$

II.

Soient $S = 0$, $S' = 0$, les équations de deux sphères; l'équation $S = S'$ est celle d'un plan qu'on appelle *plan radical* des deux sphères: ce plan est évidemment d'après la définition précédente, le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport aux deux sphères; il est aussi le lieu géométrique des points communs aux deux sphères, lorsqu'elles se coupent, et dans tous les cas le lieu des points, d'où l'on peut leur mener deux tangentes égales.

La position de ce plan par rapport aux deux sphères ne dépend évidemment pas des axes coordonnés; si donc on prend pour axe des z la droite qui joint leurs centres, l'équation $S = S'$ sera de la forme $z = h$, ce qui montre que le plan radical des deux sphères est perpendiculaire à la ligne des centres.

III.

Soient $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, les équations de trois sphères: les plans radicaux de ces trois sphères considérés deux à deux auront pour équation

$$S = S', \quad S = S'', \quad S' = S''.$$

Ces trois plans se coupent suivant une même droite dont les équations sont

$$S = S' = S'',$$

et qu'on appelle *axe radical* des trois sphères. Cet axe radical est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux trois sphères, il est d'ailleurs évidemment perpendiculaire au plan des trois centres.

Ce qui précède exige que les centres des trois sphères ne soient pas en ligne droite, car si cela était, les trois plans radicaux des sphères prises deux à deux seraient parallèles, et l'axe radical serait situé à l'infini, ou pour mieux dire n'existerait pas; néanmoins il pourrait arriver que ces trois plans coïncidassent, et dans ce cas les trois sphères auraient un plan radical, au lieu d'un axe radical.

On peut aisément construire le plan radical de deux sphères; mais je n'insisterai pas sur cette opération purement graphique.

IV.

Soient

$$S=0,\quad S'=0,\quad S''=0,\quad S'''=0;$$

les équations de quatre sphères. Les plans radicaux de ces sphères prises deux à deux auront pour équation

$$S=S',\quad S=S'',\quad S=S''',\quad S'=S'',\quad S'=S''',\quad S''=S'''.$$

Ces six plans se couperont en un même point qui aura pour équations

$$S=S'=S''=S'''.$$

C'est le point d'égale puissance par rapport aux quatre sphères, et qu'on appelle *centre radical* de ces sphères.

Ce point sera toujours unique, à moins que les quatre sphères n'aient leurs centres dans un même plan; dans ce cas il pourra arriver que le centre radical soit à l'infini, ce qui signifie qu'il n'existe plus, ou bien ce centre sera remplacé par un axe radical, ou même par un plan radical, si les centres des quatre sphères sont en ligne droite.

Dans le problème dont nous allons nous occuper, nous supposerons que les quatre centres ne sont pas dans un même plan, et alors les sphères auront toujours un centre radical unique.

V.

Soit toujours $S = 0$ l'équation d'une sphère, et (x', y', z') les coordonnées d'un point quelconque de l'espace; on sait que le plan polaire de ce point, par rapport à la sphère, a pour équation

$$(x'-a)(x-a)+(y'-b)(y-b)+(z'-c)(z-c)-r^2=0.$$

On sait en outre que

1° Si le point (x', y', z') est hors de la sphère, son plan polaire n'est autre que le plan des contacts de la sphère et des tangentes issues de ce point;

2° Si le point est sur la sphère, il est aussi sur son plan polaire qui est lui-même tangent à la sphère;

3° Si le point (x', y', z') est à l'intérieur de la sphère, son plan polaire est le lieu géométrique des sommets des cônes circonscrits à la sphère et dont les plans de contact avec cette dernière passent par ce point.

VI.

Soient les deux sphères $S=0$, $S'=0$; les centres de similitude direct et inverse de ces deux sphères auront respectivement pour équations

Centre direct.	Centre inverse.
$x-a=\dfrac{r}{r-r'}(a'-a)$,	$x-a=\dfrac{r}{r+r'}(a'-a)$,
$y-b=\dfrac{r}{r-r'}(b'-b)$,	$y-b=\dfrac{r}{r+r'}(b'-b)$,
$z-c=\dfrac{r}{r-r'}(c'-c)$,	$z-c=\dfrac{r}{r+r'}(c'-c)$.

Les plans polaires de ces deux centres de similitude relativement à la sphère S auront respectivement pour équations

$$2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p^2-p'^2)=$$
$$=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r-r')^2,$$
$$2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p^2-p'^2)=$$
$$=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r+r')^2,$$

ou simplement

$$S'-S=\Delta(r,\ r'),$$
$$S'-S=\delta(r,\ r'),$$

en posant, pour abréger,

$$\Delta(r,\ r')=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r-r')^2,$$
$$\delta(r,\ r')=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r+r')^2.$$

Les plans polaires des deux mêmes centres de similitude, relativement à la sphère S′ auront évidemment pour équations

$$S-S'=\Delta(r,\ r'),$$
$$S-S'=\delta(r,\ r').$$

Si les deux sphères étaient extérieures l'une à l'autre, les deux centres de similitude seraient les sommets de deux cônes circonscrits à la fois aux deux sphères, et les quantités designées par $\Delta(r,\ r')$, $\delta(r,\ r')$ seraient les carrés des parties des arêtes de ces cônes comprises entre les deux sphères.

VII.

Théorème.

Le lieu géométrique des points de contact de l'une quelconque de trois sphères données avec toutes les sphères qui les touchent toutes trois, est un petit cercle de cette sphère, dont le plan est perpendiculaire au plan des centres des sphères données.

Il est bien entendu, dans cet énoncé, que l'une quelconque des trois sphères données doit être touchée de la même manière par toutes les sphères que l'on considère.

Considérons, pour fixer les idées, la série des sphères qui touchent extérieurement trois sphères données dont les équations seront comme d'habitude

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0,$$

et désignons par (α, β, γ) les coordonnées du centre de l'une des sphères tangentes, par ρ son rayon et par x, y, z les coordonnées du point où elle touche la sphère S · on aura d'abord

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho + r}{r} x - \frac{\rho}{r} a, \\ \beta &= \frac{\rho + r}{r} y - \frac{\rho}{r} b, \\ \gamma &= \frac{\rho + r}{r} z - \frac{\rho}{r} c. \end{aligned} \right.$$

Puis

$$\left\{ \begin{aligned} &(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2 - (r + \rho)^2 = 0, \\ &(a' - \alpha)^2 + (b' - \beta)^2 + (c' - \gamma)^2 - (r' + \rho)^2 = 0, \\ &(a'' - \alpha)^2 + (b'' - \beta)^2 + (c'' - \gamma)^2 - (r'' + \rho)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit par la soustraction

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &(a-a')\,\alpha + (b-b')\,\beta + (c-c')\,\gamma + (r-r')\rho - \tfrac{1}{2}(p^2 - p'^2) = 0, \\ &(a-a'')\,\alpha + (b-b'')\,\beta + (c-c'')\,\gamma + (r-r'')\rho - \tfrac{1}{2}(p^2 - p''^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Portant dans les équations (2) les valeurs de α, β, γ tirées de (1), on aura

$$(\rho+r)\left\{ 2(a-a')x + 2(b-b')y + 2(c-c')z - (p^2 - p'^2) \right\} = \rho\Delta(r, r')$$

$$(\rho+r)\left\{ 2(a-a'')x + 2(b-b'')y + 2(c-c'')z - (p^2 - p''^2) \right\} = \rho\Delta(r, r')$$

L'élimination de ρ entre ces deux équations conduit à la suivante

$$(3) \qquad \frac{S' - S}{\Delta(r, r')} = \frac{S'' - S}{\Delta(r, r'')},$$

qui est bien l'équation d'un plan.

Il suit de là que les points de contact des trois sphères données avec la série des sphères qui les touchent extérieurement toutes trois seront sur trois plans ayant pour équations

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{S'-S}{\Delta(r,\ r')}=\dfrac{S''-S}{\Delta(r,\ r'')},\\[2ex]
\dfrac{S''-S'}{\Delta(r',\ r'')}=\dfrac{S''-S}{\Delta(r,\ r'')},\\[2ex]
\dfrac{S-S''}{\Delta(r,\ r'')}=\dfrac{S'-S''}{\Delta(r',\ r'')}.
\end{array}\right.$$

Ces trois plans se coupent évidemment suivant la droite

$$S=S'=S'',$$

qui est l'axe radical des trois sphères ; et comme cette droite est perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, il s'en suit que ces trois plans le seront pareillement.

Si l'une des sphères proposées, la sphère S, par exemple, devait être enveloppée par la série des sphères tangentes, il suffirait de changer le signe de r dans les équations (1) et (2), et par suite dans toutes celles que l'on en déduit; ce qui revient évidemment à remplacer dans les équations (3), $\Delta(r,\ r')$ et $\Delta(r,\ r'')$ par $\delta(r,\ r')$ et $\delta(r,\ r')$.

Si les trois sphères devaient être enveloppées par la série des sphères tangentes, il faudrait changer les signes de r, r', r'' ; ce qui ne produirait aucun changement dans les equations (3).

Il résulte de là que les équations (3) s'appliqueront à tous les cas, si l'on convient de remplacer la caractéristique Δ par δ, lorsque les sphères dont les rayons suivent la caractéristique doivent être touchées de manières différentes.

Dans tous les cas les plans ainsi déterminés passent toujours par l'axe radical des trois sphères.

VIII.

PROBLÈME.

Construire une sphère tangente à quatre sphères données.

Soient $S=0$, $S'=0$, $S''=0$, $S'''=0$ les équations des quatre sphères données, et supposons pour fixer les idées que la sphère cherchée doive toucher les quatre sphères données toutes extérieurement ou toutes intérieurement.

Les lieux des points de contact de la sphère S et des séries de sphères qui touchent extérieurement ou intérieurement cette sphère et deux des trois autres seront

$$\left\{\begin{aligned} \frac{S'-S}{\Delta(r,r')} &= \frac{S''-S}{\Delta(r,r'')} \\ \frac{S'-S}{\Delta(r,r')} &= \frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')} \\ \frac{S''-S}{\Delta(r,r'')} &= \frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')} \end{aligned}\right.$$

Ces trois plans se couperont suivant une même droite qui aura pour équation

$$(1) \qquad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')} = \frac{S''-S}{\Delta(r,r'')} = \frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')}.$$

Cette droite coupera la sphère S généralement en deux points : l'un d'eux sera le point de contact avec la sphère qui touche extérieurement les quatre proposées ; l'autre, le point de contact avec la sphère qui les enveloppe toutes quatre.

La droite (1) serait assez difficile à construire à priori ; mais on peut trouver trois points fort remarquables de cette droite ; ce qui est plus que suffisant pour la déterminer.

1° La droite (1) passe évidemment par le point $S=S'=S''=S'''$, qui est le centre radical des quatre sphères données.

2° Elle passe aussi par le point dont les équations sont

$$S' - S = \Delta(r, r'),$$
$$S'' - S = \Delta(r, r''),$$
$$S''' - S = \Delta(r, r''').$$

Ces trois équations représentent les plans polaires relativement à la sphère S, du centre de similitude directe de cette sphère prise avec chacune des trois autres.

L'intersection de ces trois plans faciles à construire donne donc un second point de la droite (1).

3° Enfin, cette droite passe encore par le point

$$(S - S') = \Delta(r, r'),$$
$$(S - S'') = \Delta(r, r''),$$
$$(S - S''') = \Delta(r, r''').$$

Ces trois équations, ainsi qu'on l'a dit précédemment, sont celles des plans polaires par rapport aux sphères S′, S″, S‴ des centres de similitude de ces sphères considérées séparément avec la sphère S.

Si la sphère S étant toujours touchée extérieurement, quelques-unes des trois autres devaient être enveloppées, nous avons vu que, pour ces dernières, il fallait remplacer la caractéristique Δ par δ; ce qui revient, comme on voit, à prendre le centre de similitude directe, si les deux sphères doivent être touchées de la même manière, et le centre de similitude inverse, si elles doivent être touchées différemment.

D'où résulte la construction suivante.

IX.

Construction.

Pour construire une sphère tangente à quatre sphères données, dont les centres ne sont pas dans un même plan, on cherchera les centres de similitude de chacune des quatre sphères avec chacune des trois autres, et on prendra chaque centre de similitude direct ou inverse, suivant que les deux sphères correspondantes devront être touchées de la même manière ou d'une manière différente ; on construira les plans polaires des trois centres de similitude ainsi déterminés correspondants à chaque sphère par rapport à cette sphère, et l'on obtiendra, dans chacune d'elles, un point que l'on joindra à leur centre radical. Les quatre droites ainsi obtenues couperont les quatre sphères en huit points; quatre de ces points constitueront une solution du problème, et les quatre autres une solution parfaitement inverse de la première.

Si les centres des quatre sphères étaient dans un même plan, on ne pourrait plus appliquer la construction précédente; il faudrait alors faire usage du troisième point que nous avons précédemment déterminé.

Note. Cette belle analyse peut également servir à trouver un cercle tangent à trois cercles donnés. M. Steiner s'est déjà servi du mot *puissance* pour désigner le produit constant de deux segments d'une sécante ou corde passant par ce point et coupant une circonférence donnée, et à l'aide de cette désignation commode, ce géomètre résout plusieurs problèmes de tangence, dont nous rendrons compte. On voit ici, par un nouvel exemple, combien est peu fondé le reproche souvent adressé à l'analyse, de fournir des constructions sans élégance et difficilement obtenues. C'est un instrument, comme tout autre, qu'il faut savoir manier. Voici, à ce sujet, une anecdote peu connue consignée dans un mémoire d'Euler intitulé : *Solutio problematis geometrici circà lunulas à circulis formatas* (Mém. de Pétersb , 1737). Le problème consiste en ceci : Étant donnés deux cercles qui se coupent de manière à former deux lunules; soit O un point commun aux deux lunules ; A un point donné sur le petit arc de la première lunule, et a un point donné sur le petit arc de la seconde lunule; il s'agit de trouver sur le grand arc de la première lunule un point b, et sur le grand arc de la seconde lunule un point B, tel qu'on ait $Ab = aB$; aire AOb = aire BOa; l'aire AOb est le triangle mixtiligne formé par les arcs AO, Ob, et la droite bA.

Lorsque les carrés des rayons ont un rapport rationnel et pour certaine position des cercles, le problème a une solution algébrique; elle n'existe pas pour le cas général. Ce problème a été proposé à Bernoulli (D.), lors de son passage par Venise. Ayant trouvé une solution géométrique pour le cas particulier où Ab est parallèle à Ba, il l'adressa à Euler, en disant qu'il croyait, ainsi qu'il arrive souvent, que la question était intraitable par l'analyse, Euler rédigea alors le mémoire mentionné, attaqua le problème général par l'analyse, et, parvenu à une construction plus élégante que celle de Bernoulli, il ajoute cette réflexion : *Quod analysios incommodum, etiamsi in pluribus problematis geometricis allegari soleat, tamen mihi quidem non tam* analysi *quam* analystæ *imputandum videtur* (p. 207)

Tm.