NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

III.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE,

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME TROISIÈME.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V^OR DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1844.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

PHILOLOGIE.

NOTE

Sur les deux locutions : PARTAGER UNE DROITE, UNE QUANTITÉ, EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON; *et* DONNÉE QU'EN RAISON. — *Altérations probables dans le texte d'Euclide.*

PAR A. J. H. VINCENT,
Professeur au collége de Saint-Louis.

I. On connaît la locution employée dans tous les ouvrages élémentaires, pour indiquer le mode de *partage d'une droite en deux parties, dont l'une soit* MOYENNE *proportionnelle entre l'autre partie* devenue ainsi l'un des termes EXTRÊMES de la proportion, *et la ligne entière.*

Or, dès 1405 (1), le Vénitien *Zamberti*, dans son interprétation latine d'Euclide, imprimée cent ans plus tard, remarquait déjà que la locution *secundùm mediam et extremam rationem*, locution d'où la nôtre tire son origine, ne

(1) Voyez la Bibliothèque grecque de Fabricius, édition de Harles, t. IV, p. 52.

dit pas ce qu'elle doit dire. En effet, dans une proportion, il n'y a point deux raisons, l'une moyenne et l'autre extrême ; il n'y en a qu'une seule, la même pour les deux derniers termes que pour les deux premiers ; et l'on ne saurait vouloir dire non plus que cette raison est à la fois moyenne et extrême, ce qui serait également absurde.

Reconnaissant aussi l'inexactitude de la locution, M. le docteur *Terquem*, dans une *note* insérée, il y a peu d'années (en 1838), dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (t. III, p. 97), propose, d'après *Lorentz*, de dire qu'*une droite est partagée en proportion continue, lorsque*, etc. Je souscrirais volontiers à cette rédaction, si elle ne paraissait signifier tout autre chose que ce que l'on veut dire : car comment exprimerait-on différemment que la droite est divisée en *trois* segments fournissant à eux seuls tous les termes de la proportion ?

Mais moi-même précédemment, en 1834, dans la 3e édition de mon *Cours de Géométrie*, j'avais cru devoir, à la phrase vulgaire, en substituer une autre plus simple : *Partager une droite en moyenne et extrême.* Cependant, l'avantage de la brièveté ne serait point un motif suffisant pour justifier ce changement s'il n'était d'ailleurs d'accord avec la logique. Or, en effet, l'expression ordinaire signifie-t-elle autre chose que *partager une droite suivant la raison de moyenne à extrême*, c'est-à-dire de telle façon que l'une des parties soit le terme moyen de la proportion, et l'autre partie un des termes extrêmes, l'autre terme, qu'il faut bien trouver quelque part, étant alors la ligne entière ? Et dès lors, cet énoncé : *Partager une droite en moyenne et extrême* (sous-entendez le mot *parties* au pluriel, et non le mot *raison* au singulier) ne présente-t-il point une locution tout à fait convenable, tant sous le rapport de la justesse que sous celui de la simplicité et de la brièveté ? Quant à moi, son exactitude me paraît si incontestable, qu'ayant été sollicité, à l'occasion de la publication récente de la 5[e] édition de mon *Cours*, de rétablir la locution antique et solennelle *moyenne et extrême raison*, je n'hésitai point à en appeler au texte d'Euclide, persuadé qu'on l'avait mal traduit.

Mon étonnement, je le confesse, fut extrême, quand je lus dans l'édition de Peyrard, comme dans toutes les autres, ces phrases auxquelles je n'avais pas jusqu'alors prêté une attention suffisante : Ἄκρον καὶ μέσον λόγον (sous-ent. κατὰ) εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν.... κ.τ.λ. (liv. VI, déf. 3; tom. I, p. 290); Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν (*ibid.*, prop. 30, p. 366); Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ (liv. XIII, prop. 1[re], tom. III, p. 212).....

Je ne craignis point d'avancer alors que les manuscrits avaient été mal lus, que les apices abréviatifs remplaçant les terminaisons et devenant ainsi, dans les manuscrits, les seuls indices de la déclinaison (apices qu'il est si facile de confondre) avaient été pris les uns pour les autres; que par suite, dans la transcription, les terminaisons ου et ον s'étaient substituées l'une à l'autre par cette sorte d'accident que les grammairiens nomment *attraction*, et qu'en définitive, les mots ἄκρον καὶ μέσον λόγον devaient être lus partout ἄκρου καὶ μέσου λόγου.

Malheureusement encore, ma conjecture ne se trouva nullement confirmée par les manuscrits, dont la plupart même portent écrit en toutes lettres ἄκρον καὶ μέσον.....

En outre, Proclus, Pappus, Ptolémée, lorsqu'ils ont à rendre la même idée, ne s'expriment pas autrement.

Battu ainsi en première instance et en appel, j'avais au moins, semblait-il, la consolation de l'être en compagnie de la logique. Mais après tout, il me restait la ressource des traductions orientales : je résolus d'y recourir. Je m'adressai en conséquence au savant M. Munck, qui eut l'obligeance de consulter à ma prière, la traduction arabe, traduction toute littérale, faite au neuvième siècle par *Isaac ben Honaïn*, et qui me donna en ces termes le sens du texte arabe de la définition 3e du livre VI : *Une ligne droite est dite partagée suivant la proportion d'*UNE *moyenne et de* DEUX *extrêmes, lorsque,* etc. De même, la proposition 30e du même livre s'énonce ainsi d'après le même texte : *Partager une ligne droite suivant la proportion d'une moyenne et de deux extrêmes.* De même enfin la proposition 1re du livre XIII : *Lorsqu'une droite est partagée suivant la proportion d'une moyenne et de deux extrêmes:* Al-khatt al-maksoum à la nisbet dzât ouast outarféïn...

La traduction hébraïque faite au 13e siècle par *Mosé ben Samuel Ebn Tibbon*, s'exprime d'une manière tout à fait analogue ; mais, peut-être, m'a dit M. Munck, cette traduction a-t-elle été faite d'après l'arabe. Quoi qu'il en soit, la traduction hébraïque n'en est pas moins une confirmation de l'arabe.

Il en est de même de la traduction latine d'*Adhélard*, commentée par *Campanus*, et qui vraisemblablement aussi est faite sur l'arabe ; l'hypothèse contraire lui donnerait beaucoup plus encore d'autorité et d'importance dans la question actuelle. Elle s'exprime ainsi, lib. VI, def. 3 : *Linea dicitur dividi secundùm proportionem habentem medium et duo extrema...* Les deux autres passages sont conformes au premier.

Or, de tout cela on peut conclure, ce me semble, avec quelque probabilité, et de plus hardis que moi diront *avec certitude* que si la locution ἄκρον καὶ μέσον λόγον peut être considérée comme passée, depuis un temps immémorial, à l'état d'*idiotisme géométrique*, il n'en est pas moins vrai que la leçon primitive a dû être ἄκροιν καὶ μέσου λόγον ; le mot ἄκροιν, au duel, au lieu du singulier ἄκρου, n'en est que plus expressif, puisqu'il fait voir que l'on trouve tout à la fois, sur la ligne divisée conformément à la définition, les trois termes de la proportion, tant les deux extrêmes que le terme moyen.

En définitive donc, JE MAINTIENS MON ÉNONCÉ.

II. J'en viens à une seconde correction que j'ai aussi à proposer pour le texte grec d'un autre ouvrage du même auteur. Il s'agit ici d'une expression bizarre qui a doté notre langue de cette locution non moins étonnante que celle dont nous venons de nous occuper, savoir : *Quantité donnée qu'en raison*; en latin : *Magnitudo data quam in ratione.*

C'est ainsi que, d'après les définitions 11[e] et 12[e] du livre des *Données d'Euclide*, *Une grandeur est plus* $\left\{\begin{matrix}\textit{grande}\\ \textit{petite}\end{matrix}\right\}$ *à l'égard d'une autre, d'une donnée, qu'en raison, quand la grandeur donnée étant* $\left\{\begin{matrix}\textit{retranchée, le reste}\\ \textit{ajoutée, la somme}\end{matrix}\right\}$ *a avec l'autre une raison donnée.*

Il ne faut nullement être géomètre pour reconnaître ici une locution de pur argot : quel moyen, en effet, de faire l'analyse du *qu'en raison*? Aussi M. *Chasles*, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (page 11, note 1[re]), dit-il que c'est une expression *embarrassante*, et dont le sens est *difficile à comprendre, même dans la définition* qu'en donne Euclide ; après quoi le savant géomètre en fournit l'explication suivante : « Soit A » plus grand que B d'une donnée qu'en raison ; soit C cette » donnée et μ la raison, on aura $\frac{A - C}{B} = \mu$. »

Pour embrasser les deux définitions dans une même formule, nous écrirons $\frac{A \mp C}{B} = \mu$.

Ces préliminaires posés, remontons aux deux définitions précédentes du même livre (déf. 9 et 10) : *Une grandeur est plus* $\left\{\begin{matrix}\textit{grande}\\ \textit{petite}\end{matrix}\right\}$ *qu'une autre grandeur, d'une grandeur donnée, quand la grandeur donnée étant* $\left\{\begin{matrix}\textit{retranchée de}\\ \textit{ajoutée à}\end{matrix}\right\}$ *la plus*

$\left\{\begin{array}{ll}\textit{grande}, & \textit{le reste} \\ \textit{petite}, & \textit{la somme}\end{array}\right\}$ *est égal à la plus* $\left\{\begin{array}{l}\textit{petite} \\ \textit{grande}\end{array}\right\}$.

Ces deux définitions, comme on le voit, ne considèrent qu'un cas particulier des deux autres, celui de $\mu = 1$, ou $A \mp C = B$; ou plutôt, les deux autres ne sont qu'une généralisation de celles-ci. Dans les définitions 9 et 10, la raison donnée est la raison d'*égalité*, ou *l'unité* ; dans les définitions 11 et 12, la raison donnée devient une raison quelconque ; et ainsi ces deux dernières définitions énoncent relativement à une raison quelconque, ce que les deux premières disent d'une manière absolue, ou pour la raison d'égalité ; de sorte que les mots *qu'en raison* doivent être, pour le sens, remplacés par ceux-ci : *relativement à* ou *quant à une raison donnée.*

Or, si maintenant nous remontons au texte : μέγεθος μεγέθους δοθέντι μεῖζον ou ἔλασσόν ἐςιν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν κ.τ.λ., il ne nous sera pas difficile de reconnaître que tout le mal provient d'une faute d'orthographe dans la particule ἢ, que les copistes, éditeurs, traducteurs, semblent s'être primitivement accordés à considérer comme complétive du comparatif : *Magnitudo magnitudine data* $\begin{array}{c}\textit{major} \\ \textit{minor}\end{array}$ *est quam in ratione* (Euclide de Peyrard, tome III, page 302), tandis qu'il eût fallu écrire, *avec l'esprit rude, l'accent circonflexe*, et *l'iota souscrit* : ᾗ, c'est-à-dire *quà, quantùm ad*, *en tant que* ; d'où il résulte qu'en français nous devons dire : *Une quantité est plus grande ou plus petite qu'une autre, d'une quantité donnée, relativement* ou *quant à une raison donnée, lorsque, etc.* (1).

---

(1) Aucune traduction arabe du livre des *Données* ne se trouvant à la bibliothèque du Roi, je n'ai malheureusement pu employer le même moyen de contrôle que pour le cas précédent.

P. S. — Je profite de l'occasion pour adresser à M. le Rédacteur des *Annales*, une observation relative à deux articles de M. *Finck*, insérés, le premier dans le tome I, page 353, le second, tome II, p. 329.

Il s'agit, M. le Rédacteur, dans ces deux articles, d'une note que j'ai donnée dans votre tome I, p. 272, *sur la construction des tables de sinus naturels*. Dans cette note, après avoir reproduit une démonstration qui se trouve à la page 233 du *Géomètre* de M. Guillard, pour la limite de l'erreur que l'on commet en prenant l'arc pour son sinus, démonstration dont l'idée fondamentale est due à M. *Giraud*, alors élève du collége de Toulon, j'ai indiqué l'emploi de la formule de *Th. Simpson* pour la construction des tables de sinus naturels, en faisant voir (je l'ai cru du moins) que les douze premières décimales de π suffisaient pour la détermination des douze premières décimales des sinus et cosinus de tous les arcs croissant de seconde en seconde centésimales.

Pour le premier point, c'est-à-dire pour la limite de l'erreur que l'on commet sur le plus petit arc, M. *Lionnet* y est revenu dans le tome II, p. 216, et j'ai été très-satisfait de reconnaître, d'après son excellent article, qu'il n'est pas même nécessaire, pour arriver à la limite obtenue, de recourir à la formule de trissection, et que la bissection est suffisante. Je m'empresse donc d'adopter la modification qu'il propose, comme rendant la démonstration plus élémentaire.

Quant au second point (l'emploi des formules de *Th. Simpson*), ma *Note* a fait reconnaître à M. *Finck*, comme il le dit au tome I, p. 353, et le répète au tome II, p. 333, qu'*il avait été trop loin* dans sa Trigonométrie, en accusant d'insuffisance lesdites formules ; mais en même temps, cet estimable et savant professeur, dans son premier article, accusait ma méthode de *négliger des erreurs qui modifient l'exactitude de mes résultats*. Cependant comme, après tout, il promettait de revenir sur ce sujet, j'ai supporté pendant un an entier, sans mot dire, l'interdit prononcé contre ma méthode, espérant toujours l'article annoncé. Enfin, cet article a paru dans le n° d'août dernier. M. Finck y emploie le calcul intégral aux différences finies pour évaluer l'erreur que peuvent produire les formules de *Th. Simpson*. Si le but est le même, le moyen est bien différent de celui que j'ai employé, n'ayant eu en vue que les élèves de nos classes élémentaires ; et encore M. Finck termine-t-il son savant article en disant que *rien n'empêche d'en faire autant*, c'est-à-dire de remplacer ses formules d'intégration par un procédé élémentaire, comme si je n'en avais pas donné un. D'où il résulte qu'en définitive M. Finck maintient sa sentence d'interdit, sans toutefois la motiver plus que la première fois, sans rien indiquer pour corriger l'imperfection qu'il a découverte dans mon procédé, et sans proposer lui-même de méthode qui puisse atteindre le même but, puisqu'au contraire, d'après sa conclusion, il reste à *en faire autant* que j'en ai fait, sauf les erreurs dont j'attends la rectification.

Dans cet état de choses, et malgré l'horreur profonde que j'éprouve pour toute espèce de polémique, puis-je me dispenser de prier M. Finck de vouloir bien déclarer s'il reconnaît la vérité de ce principe : que *dans une méthode de calcul qui doit présenter le double caractère d'être* ABRÉVIATIVE *en même temps qu'*APPROXIMATIVE, *si le degré d'approximation demandé est* $\frac{1}{\alpha^n}$, *on doit négliger les erreurs de l'ordre* $\frac{1}{\alpha^p}$, (p *étant* $>$ *n*), *toutes les fois que celles-ci ne se multiplient pas de manière à donner une somme de l'ordre* $\frac{1}{\alpha^n}$?

2° Dans le cas de l'affirmative, de dire en quoi j'ai transgressé ce principe, et de donner l'évaluation des erreurs que j'ai commises ;

3° Enfin, si M. Finck admet que le principe précité est exact, et ne trouve ou ne prouve pas que j'aie commis en l'appliquant aucune erreur de l'ordre proposé, j'attends de la loyauté bien connue de notre estimable confrère, de reconnaître qu'en ceci encore *il a été trop loin.*

Sinon, je suis tout disposé d'avance à me rendre à ses raisons; et je recevrai ce second perfectionnement à ma méthode avec le même plaisir que j'ai reçu le premier.

NOTE SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

PAR M. MOURGUES,

Ancien élève de l'École normale, Professeur au collége de Rhodez.

—

La différence des aires des polygones réguliers de $2n$ côtés, inscrit et circonscrit à un cercle, est inférieure au quart de la différence des aires des polygones réguliers de n côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.

Soient AB et CD (*fig.* 1) les côtés des polygones réguliers de n côtés, EB et GH ceux des polygones de $2n$ côtés : la différence des deux premiers polygones est $2n$.FBDE; la différence des deux derniers est $2n$.EBH. Or, je dis que

$$\mathrm{EBH} < \frac{1}{4}\,\mathrm{FBDE}.$$

Comme ce triangle et ce trapèze ont même hauteur EF, il suffit de prouver qu'on a $\mathrm{EH} < \frac{1}{4}(\mathrm{ED}+\mathrm{FB})$. En effet, en remarquant que la figure EIBH est un losange, c'est-à-dire que $\mathrm{EH}=\mathrm{IB}$, la proportion $\mathrm{DH} : \mathrm{HE} :: \mathrm{BI} : \mathrm{IF}$ donne

$\overline{HE}^2 = DH \times IF$; mais on sait que le côté d'un carré est plus petit que la demi-somme des côtés d'un rectangle équivalent, donc $HE < \frac{DH + IF}{2}$ ou $\frac{HE}{2} < \frac{DH + IF}{4}$; d'ailleurs $\frac{HE}{2} = \frac{HE + IB}{4}$, d'où l'on déduit, en additionnant membre à membre, $HE < \frac{1}{4}(ED + FB)$.

CONSIDÉRATIONS

SUR LES PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA STATIQUE.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Nous avons en vue, dans cet article, les éléments de statique servant aujourd'hui de base à l'enseignement, et en particulier l'ordre dans lequel ils ont été présentés par M. Poinsot. On sait l'usage non moins élégant qu'ingénieux que ce géomètre a su faire de la théorie des couples, théorie que sa fécondité a fait adopter à peu près universellement. Toutefois cette théorie elle-même et ses applications semblent subordonnées à la connaissance de quelques théorèmes, ceux, par exemple, qui se rapportent à la composition des forces parallèles agissant dans un même plan. Nous nous proposons d'examiner quels sont les changements que l'ordre ainsi établi pourrait recevoir sans inconvénient et avec quelque utilité.

I.

Il n'est pas inutile de rappeler d'abord que plusieurs personnes ont émis l'opinion qu'il serait désirable de faire précéder tous les éléments du théorème fondamental de la composition des forces, c'est-à-dire de la règle du parallélogramme, au lieu de placer celle-ci à la suite de la théorie des forces parallèles agissant dans un plan. De là plusieurs démonstrations immédiates du parallélogramme des forces, remplissant plus ou moins parfaitement le but que l'on se proposait, mais dont aucune, jusqu'à présent, n'a prévalu sur les habitudes de l'enseignement. Ces tentatives montrent seulement le besoin qu'éprouve l'esprit humain de placer à la tête de toute doctrine les principes les plus généraux, pour y rattacher les notions d'une importance secondaire. Fût-on parvenu à satisfaire, par une démonstration simple et courte, n'exigeant pas de figure compliquée, à toutes les exigences de l'enseignement élémentaire, il n'en serait résulté aucune simplification *notable* dans l'exposition des premiers théorèmes de la statique. L'on aurait gagné, en un mot, fort peu à intervertir la marche consacrée, laquelle d'ailleurs constitue une véritable synthèse, qui ne laisse presque rien à désirer.

II.

Un moyen d'obtenir un ensemble moins restreint de simplifications consisterait, si nous ne nous trompons, à faire intervenir la théorie des couples dans la démonstration des premiers théorèmes. Le *couple* et la *force* étant les deux objets dont s'occupe la statique, rien de plus naturel que de rapprocher leurs définitions. L'une et l'autre doivent être en outre accompagnées du petit nombre de notions presque évidentes qui n'ont pas besoin, pour être établies, d'une démonstration proprement dite.

Mais, pour être plus clair, citons tout de suite un exemple. On fait voir très-facilement qu'*un couple peut être transporté et tourné comme l'on voudra dans son plan, sans que son effet statique soit changé*. Il suffit, pour cela, de remarquer que des forces égales, appliquées aux sommets opposés et dans la direction des côtés d'un losange, se font équilibre. De ce théorème on déduit, comme corollaire, que *deux forces égales, parallèles et de même sens, appliquées aux extrémités d'une verge rigide et inextensible, ont une résultante qui leur est parallèle, qui est égale à leur somme, et dont le point d'application est à égale distance des composantes.*

De là on déduit encore que le couple peut être remplacé par un couple égal agissant dans un plan parallèle au sien.

III.

Cette *ubiquité* du *couple* répond évidemment à la propriété de la *force*, qui consiste en ce que l'on peut la supposer appliquée à tel point de sa direction que l'on voudra. Représentons, avec M. Poinsot, le couple par une droite perpendiculaire à son plan, et dirigée de manière à indiquer le sens de la rotation. Transporter le couple d'un plan dans un autre, est alors la même chose que l'*appliquer à volonté à l'un quelconque des points de sa direction*. Les énoncés pour la force et le couple sont ainsi rendus identiques, et mettent les esprits les moins clairvoyants sur la voie des analogies.

IV.

Pour aller plus loin, il est nécessaire de connaître la mesure de l'*effet* exercé par un couple, de même que l'on a déjà celle de la *force*. Or cette mesure se déduit des deux propositions suivantes :

1° *Les efforts de deux couples ayant même bras de levier sont entre eux comme leurs forces ;*

2° *Les efforts de deux couples ayant mêmes forces sont entre eux comme les longueurs des bras de levier.*

La première est démontrée dans les éléments d'une manière à peu près immédiate, sans recourir à la composition des forces parallèles. Il n'en est pas de même pour la seconde. Toutefois la difficulté peut être levée par une démonstration directe très-simple et très-élémentaire.

V.

Soient deux couples (P, a), (P, b) ; P désignant la force commune, a et b les bras de levier. Supposons, b étant le plus petit, qu'on le porte sur a bout à bout autant de fois que faire se pourra, sauf à obtenir un reste c moindre que b. A chaque point de division, perpendiculairement au bras, appliquons deux forces P directement contraires et par suite se faisant équilibre. Il suffit de construire la figure pour apercevoir que l'on peut décomposer le système ainsi établi en autant de couples égaux à (P, b) que b est contenu de fois dans a, plus un couple restant (P, c). Si le reste c était nul, le couple (P, a) contiendrait un nombre entier de fois le couple (P, b), et le théorème serait démontré. Supposons que le contraire arrive, rien n'empêchera de comparer de la même manière c à b ou (P, c) à (P, b), et l'on obtiendra généralement un second reste d avec un couple $(P, d) < (P, c)$ (quant au bras de levier seulement). Ces opérations étant celles qu'il faudrait effectuer sur a, b, pour la recherche de leur commune mesure, il est clair, s'il y en a une, que le couple auquel elle servira de bras de levier sera aussi la commune mesure de (P, a), (P, b). Si, au contraire, il n'y en a pas, comme *les opérations successives et indéfiniment prolongées de la recherche du plus grand commun diviseur entre* (P, a) *et* (P, b) *conduisent à la même série de quotients que* *donnerait cette recherche entre* a *et* b, *nous en conclurons encore*, avec Ampère, *que les efforts des deux couples sont proportionnels à leurs bras de levier.*

VI.

Si l'on admet la vérité du théorème ainsi présenté, rien de plus facile que d'en déduire la mesure de l'effort d'un couple. Les corollaires sont : *la composition des forces parallèles* et *la régle du parallélogramme des forces.* Dans ces applications, qui n'ont besoin que d'être indiquées pour qu'on les trouve, le transport d'une force parallèlement à elle-même d'un point d'application à un autre, transport qui donne naissance à un couple, figure comme moyen de démonstration, de même que dans les recherches les plus générales, les plus complexes de l'équilibre d'un système donné. Ainsi non-seulement la théorie de M Poinsot, au lieu de se présenter à la suite des anciens éléments, pourrait être produite en tête de leur exposition, mais encore elle les réduirait à n'être plus que de simples corollaires presque évidents.

Il ne nous appartient point de décider s'il serait convenable d'intervertir ainsi l'ordre des éléments ; nous savons avec quelle réserve ce qui est consacré par l'usage doit être traité. C'est aux professeurs à juger si l'enseignement de la statique est susceptible d'être modifié en quelques points, et notamment dans la partie tout à fait élémentaire. L'examen auquel nous venons de nous livrer est destiné bien moins à résoudre la question qu'à la signaler à leur zèle éclairé ; et nous serions heureux si notre manière de voir leur paraissait mériter quelque attention.

SOLUTION DU PROBLÈME 63 (tome II, p. 416).

PAR M. A. PROUHET,
Élève de mathématiques spéciales au collége d'Auch.

—

Etant donnés les milieux des côtés d'un polygone convexe, d'un nombre impair de côtés, déterminer ses sommets en faisant seulement usage du compas

1° Soient d'abord A, B, C les milieux des côtés d'un triangle, et proposons-nous d'en déterminer les sommets. Supposons le problème résolu · soient A′, B′, C′ les sommets cherchés (*fig.* 2), d'après un théorème connu, la droite qui joint A et B est parallèle à A′B′, de même BC est parallèle à C′B′, nous aurons donc dans la figure ABCB′ un parallélogramme dont un des sommets est le sommet cherché ; or nous connaissons trois sommets de ce parallélogramme, il nous sera facile de déterminer le quatrième. Pour cela je décris deux circonférences : la première du point A, comme centre, avec un rayon égal à BC ; la deuxième du point C, comme centre, avec un rayon égal à AB ; l'intersection de ces deux circonférences sera le sommet cherché ; on déterminerait de même les points A′, C′.

2° Si maintenant nous avons pour données les milieux des côtés d'un polygone, d'un heptagone, par exemple, le problème sera ramené au cas précédent, dès que nous serons parvenus à trouver les milieux des diagonales qui joignent les extrémités des côtés consécutifs.

Supposons le problème résolu : soient A, B, C.... (*fig.* 3) les milieux donnés, A′, B′, C′..... les sommets opposés.

Dans le quadrilatère C′ D′ E′ F′ on connaît les milieux de trois côtés ; le milieu R du quatrième se déterminera à l'aide du compas, car d'après un théorème connu, ces quatre points doivent être les sommets d'un parallélogramme. De même les milieux de trois côtés du quadrilatère C′ F′ G′ B′ étant connus, on déterminera le milieu S du quatrième ou de la diagonale G′ B′, on aura donc ainsi les milieux des côtés du triangle A′, B′, C′ et par leur moyen les trois sommets A′, B′, G′.

3° On trouvera de même tant de sommets que l'on voudra de l'heptagone ; mais dès que l'on connaît le sommet A′ il suffit, pour avoir les autres, de savoir résoudre ce problème : *Étant donnés l'extrémité* A′ *d'une ligne et son milieu* E (fig. 3) *déterminer à l'aide du compas l'autre extrémite* B′. Du point E, comme centre, avec une ouverture de compas égale à EA′, je décris une circonférence. Portant ensuite la même ouverture de compas sur cette circonférence, à partir de A′, je détermine les sommets de l'hexagone régulier inscrit. Le sommet opposé à A′ est évidemment le point cherché B′, connaissant B′ et F on déterminera de même C′, et ainsi de suite.

La construction que nous venons de donner s'étend facilement à un polygone d'un nombre impair de côtés, car un pareil polygone est toujours décomposable en plusieurs quadrilatères et triangles.

4° On peut se convaincre, à posteriori, que le problème admet toujours une solution, et n'en admet qu'une. En effet, si on construit tous les sommets d'abord depuis A′ jusqu'à D′, ensuite depuis A′ jusqu'à E′, il est bien évident que les points B, C, D, E, F, G sont les milieux des six côtés du polygone obtenu ; mais on ne voit pas aussi clairement que A devra être le milieu du côté D′E′. Nous allons démontrer qu'il est aussi le milieu. La ligne B′ G′ a pour milieu le point S, car ce milieu doit se trouver à la fois sur la ligne DS parallèle à $A'B'$, et sur la ligne ES parallèle à $A'G'$, de même R sera le milieu de $C'F'$, car le milieu doit se trouver sur CR droite parallèle à la diagonale $C'G'$, et sur la droite FR parallèle à $B'F'$: même démonstration pour prouver que A est le milieu de $D'E'$.

5° Le problème analogue pour les polygones d'un nombre pair de côtés, ou admet une infinité de solutions, ou n'en admet aucune. D'abord si on donne quatre points comme étant les milieux des côtés d'un quadrilatère, le problème sera impossible si les quatre points ne sont pas les sommets d'un parallélogramme ; mais supposons cette condition remplie. Par le point B je mène (*fig.* 4) une droite quelconque sur laquelle je prends de chaque côté deux longueurs égales BF, BE, je joins E au point A, et prends $AH = AE$; je joins F au point C, et prends $CG = CF$, on verra par un raisonnement analogue à celui fait dans le n° 3 pour le quadrilatère $B'C'F'G'$, que la ligne HG passera par le point D, et y sera partagée en deux parties égales. Le quadrilatère construit sera donc une solution du problème, qui en admet une infinité, puisque la direction et la grandeur de la ligne EF sont arbitraires.

Ensuite pour un polygone quelconque d'un nombre pair de côtés, on pourra construire un quadrilatère tel que trois des points donnés soient les milieux de trois de ses côtés ; puis un second quadrilatère, ayant un côté commun avec le premier, et tel que deux autres des points donnés, soient les milieux de deux de ses côtés, et ainsi de suite. Le problème sera impossible, si le dernier côté du dernier quadrilatère n'a pas pour milieu le dernier point donné. Si cette condition est remplie, le problème sera possible, mais admettra une infinité de solutions, puisque le premier quadrilatère peut varier d'une infinité de manières.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 68 (p. 327, t. II).

PAR P. A. G. COLOMBIER.
Régent de mathématiques à Béziers.

Quatre points (o, s, o′, s′) (fig. 5) *étant placés harmoniquement* (os : o′s : : os′ : o′s′) *sur une droite* (PQ) ; *une circonférence qui passe par deux points conjugués* (o, o′) *coupe orthogonalement la circonférence décrite sur la distance des deux autres points conjugués* (s, s′) *comme diamètre.*

Démonstration. Soit c le centre d'une circonférence passant par o, o' ; et c' celui de la circonférence décrite sur ss' comme diamètre. La circonférence qui a son centre en c devant passer par un point o' du diamètre ss' de l'autre circonférence, il est certain que les circonférences seront toujours sécantes. Soit A l'un quelconque des deux points d'intersection. Il faut prouver que les tangentes menées aux circonférences par ce point sont orthogonales. Mais s'il en est ainsi, la tangente à l'une quelconque des deux circonférences est normale à l'autre en A ; dès lors, d'après un principe connu, ces deux normales doivent passer par les centres c,c'. Donc la question se réduit à prouver que le triangle cAc' est rectangle en A, ou, plus simplement, qu'on a la relation

$$\overline{cc'}^2 = \overline{cA}^2 + \overline{Ac'}^2 .$$

En effet, désignons par r le rayon de la circonférence c.

On a $$\overline{Ac}^2 = r^2. \qquad (1)$$

Représentons os, $o's$ par a et b ; dès lors, d'après la proportion harmonique, on a $os' = a\dfrac{a+b}{a-b}$, et d'après la figure, il vient

$$2Ac' = ss' = os' - os = \frac{2ab}{a-b}, \text{ d'où}$$

$$\overline{Ac'}^2 = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}. \qquad (2)$$

On trouve facilement d'après la proportion, et de ce que le triangle cBc' est rectangle,

$$\overline{cc'}^2 = \overline{cB}^2 + \frac{(a^2+b^2)^2}{4(a-b)^2}.$$

Si l'on joint co', le triangle rectangle cBo' donne

$$\overline{cB}^2 = r^2 + \frac{(a+b)^2}{4};$$

en éliminant $\overline{cB}^2$ par addition, et réduisant le second membre il vient

$$\overline{cc'}^2 = r^2 + \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}. \qquad (3)$$

De ce que l'équation (3) est la somme des équations (1), (2), il s'ensuit qu'on a

$$\overline{cc'}^2 = \overline{cA}^2 + \overline{Ac'}^2.$$

Donc le triangle $cc'A$ est rectangle en A ; par conséquent les tangentes aux deux premières circonférences, menées par l'un quelconque de leurs points d'intersection, sont orthogonales. C. Q. F. D.

DÉTERMINATION

du centre de gravité de la surface totale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles.

PAR M HUET,
Regent de physique au Collége de Pamiers

—

1re *Solution.*

Il est évident que le moment de la surface totale du tronc de cône ABCD (*fig.* 6) est égal au moment de la surface convexe du cône SCD, plus le moment de la base du cône SAB, plus le moment de la base du cône SCD moins le moment de la surface convexe du cône SAB, tous ces moments étant pris par rapport à la base CD.

Soit $AC = c$, $SC = C$, $SA = c'$, $CE = R$, $AF = r$, $SE = H$, $SF = h'$, $EF = h$.

La surface convexe du tronc de cône est $\pi c(R + r)$, et sa surface totale $\pi\{(R+r)c + R^2 + r^2\}$.

La surface convexe du cône SCD est πRC, et la surface de sa base est πR^2.

La surface convexe du cône SAB est $\pi rc'$, et la surface de sa base est πr^2.

D'ailleurs on a $C : c' :: R : r$, d'où $C - c' : C :: R - r : R$. Donc $C = \frac{cR}{R-r}$. On a de même $C - c' : c' :: R - r : r$; d'où $c' = \frac{cr}{R-r}$. La proportion $H : h' :: R : r$ fournit aussi $H - h' : H :: R - r : R$; d'où $H = \frac{hR}{R-r}$; puis $H - h' : h' :: R - r : r$;

d'où $h'=\frac{hr}{R-r}$. Cela posé, x étant la distance du centre de gravité cherché à la base CD, on a pour moment de la surface totale du tronc, $x.\pi\{c(R+r)+R^2+r^2\}$.

Le moment de la surface convexe du cône SCD est évidemment $\pi RC.\frac{H}{3}$, ou bien, en remplaçant C et H par leurs valeurs $\pi r.\frac{cR}{R-r}\cdot\frac{hR}{3(R-r)}$. Le moment de la base CD est nul. Celui de la surface convexe du cône SAB est $\pi rc'\left(\frac{h'}{3}+h\right)$ ou bien $\pi r.\frac{cr}{R-r}\left(\frac{hr}{3(R-r)}+h\right)$. Enfin, le moment de la base AB du cône SAB est πr^2h. On a donc l'égalité

$$\pi x\left\{c(R+r)+R^2+r^2\right\}=\pi R\,.\frac{cR}{R-r}\cdot\frac{hR}{3(R-r)}+\pi R^2h-$$
$$-\pi r\,.\,\frac{cr}{R-r}\left(\frac{hr}{3(R+r)}+h\right).$$

D'où l'on tire, après avoir fait les réductions et effectué la division par $(R-r)^2$,

$$x=\frac{4}{3}\,\frac{cR+2cr+3r^2}{c(R+r)+R^2+r^2}.$$

DÉMONSTRATION

de trois théorèmes de géométrie, y compris le 64e (p. 416, t. II).

PAR M. LÉON ANNE,

Ancien élève de l'École polytechnique, et répétiteur au Collége Louis-le-Grand.

—

1er *Théorème.*

Si deux polygones (*fig.* 7) ABCD.., A'B'C'D', sont semblables, intérieurs l'un à l'autre, et ont leurs côtés homologues parallèles, tout polygone PQRT à la fois inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre, a une surface moyenne proportionnelle entre celles des deux polygones semblables.

En effet, les droites AA′, BB′, CC′, ... qui joignent les sommets homologues des deux polygones semblables semblablement placés, viennent toutes concourir au même point o, centre de similitude des deux polygones (théorème connu).

Je joins ce point o avec tous les sommets du polygone moyen par les droites oP, oQ, oR, oT..... qui coupent les côtés correspondants du polygone intérieur aux points p, q, r, t..... Cette construction décompose les trois polygones en triangles tels que chaque triangle du polygone moyen est moyen proportionnel entre les deux qui lui correspondent dans les deux polygones semblables.

Par exemple, oQB′ donne, à cause du parallélisme de AB et A′B′,

$$oQB : oQB' :: oB : oB' :: oQ : oq :: oQB' : oqB'.$$

En outre, le point o étant le centre de similitude des polygones ABCD..... A′B′C′D′....., les surfaces de ces triangles qui se correspondent et qui sont homologues, sont entre elles comme celles S,S′ de ces polygones; d'où

$$oQB = \frac{oqB' \times S}{S'} = \frac{oqB'}{S'^2} \times S.S'.$$

Substituant

$$oQB' = \sqrt{oQB \times oqB'} = \sqrt{\frac{\overline{oqB'}^2}{S'^2} \times S.S'} = \frac{oqB'}{S'}\sqrt{S.S'}.$$

Chaque triangle du polygone PQRT..... donnant cette même relation, il vient

$$oPA' + oA'Q + oQB' + \ldots\ldots = \frac{opA' + oA'q + oqB' + \ldots\ldots}{S'}\sqrt{S.S'};$$

mais le numérateur n'est autre chose que S′ lui-même;

donc

$$\text{poly. PQRT} \ldots = \sqrt{\text{poly. ABCD} \ldots \times \text{poly. A'B'C'D'} \ldots}$$

Remarques. 1° Ce théorème a cela de remarquable, qu'il est encore vrai quand même les trois points P, A′, Q ou QB′R ne seraient pas en ligne droite, c'est-à-dire quand même le polygone PQRT ne serait plus convexe, pourvu toutefois que ses sommets soient alternativement un sommet du polygone intérieur et sur un côté du polygone extérieur. Cela tient au parallélisme des côtés.

2° Le théorème serait encore vrai, si les polygones étaient remplacés par des secteurs polygonaux assujettis aux mêmes conditions.

3° La démonstration est évidemment la même pour des triangles assujettis aux mêmes conditions, c'est-à-dire pour le théorème (64) énoncé, p. 416, t. II.

Ce théorème sur les triangles est cité dans Gergone, t. II, p. 93, sans aucune démonstration; M. Lilatte, professeur à Angers, y est parvenu par des considérations trigonométriques ; on peut en donner cette autre démonstration : Menant (*fig.* 8) C′C″ parallèle à AB, ainsi que les autres lignes tracées sur la figure, le parallélisme donne

$$A'DC' = A'CC', \quad B'FC' = B'CC', \quad A'EB' = A'GB'.$$

Donc $\qquad DEF = A'GC \quad \text{et} \quad A'CB' = A'C''B'.$

Les triangles A′C″B′ et A′GC sont entre eux comme C″B′ et CG ; donc comme les hauteurs des triangles A′C′B′, ACB ; ou enfin comme leurs côtés homologues A′B′ et AB. En outre

$$A'GC : KGC :: CA' : CK :: A'B' : KG$$
$$KGC : ABC :: KG : AB.$$

Multipliant terme à terme, $A'GC : ABC :: A'B' : AB$.

Donc $\qquad A'C''B' : A'GC :: A'GC : ABC,$

ou $\qquad A'B'C' : DEF :: DEF : ABC$;

ce qu'il fallait démontrer.

2e Théorème.

Si aux sommets d'un quadrilatère inscrit dans un cercle on mène des tangentes, les diagonales des deux quadrilatères ainsi construits concourent toutes au même point.

Pour le démontrer, je remarque que si deux triangles ont un angle égal et un angle supplément, les côtés opposés aux angles égaux sont entre eux comme les côtés opposés aux angles supplémentaires (ce qui se démontre en plaçant les deux triangles l'un contre l'autre, de sorte que l'angle intérieur de l'un devienne l'angle extérieur de l'autre.)

Cela admis, soit o la rencontre de BD et de HF (*fig.* 9), les triangles BoF, DoH ont l'angle o commun et l'angle B supplément de D, puisque BF, DH sont tangentes aux extrémités d'une même corde BD. Donc, BF : DH :: Fo : oH.

Soit o' la rencontre de AC et FH, les triangles Fo'C, Ao'H sont dans les mêmes conditions ; FC : HA :: Fo' : o'H, à cause du rapport commun ; Fo : oH :: Fo' : o'H ou Fo : FH :: Fo' : FH. Donc Fo = Fo' ; c'est-à-dire que les deux diagonales coupent FH au même point. Donc aussi EG.

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On peut considérer le cercle comme base d'un cylindre ou comme base d'un cône, et cette figure comme une projection cylindrique ou comme une projection conique. De là ce théorème : Si aux sommets d'un quadrilatère inscrit dans une courbe du second degré, on mène des tangentes à cette courbe, les diagonales des deux quadrilatères ainsi formés concourent toutes au même point.

3e Théorème.

Si de deux points (*fig.* 10) D, D', du côté BC d'un triangle ABC quelconque, on mène des parallèles DE, DF ; D'E',

$D'F'$ aux deux autres côtés du triangle, et si l'on joint un point M quelconque du côté BC aevc les extrémités de ces parallèles, les deux triangles EME', FMF' qui en résultent forment une somme constante et égale au triangle DAD' formé en joignant les deux points DD' avec le sommet opposé.

Pour le démontrer, je remarque que si d'un point M quelconque de la diagonale DD' d'un parallélogramme $KDGD'$, on mène des parallèles à ses côtés, il en résulte quatre parallélogrammes, les deux KRMT, PMSG, qui ne contiennent pas la diagonale, sont équivalents.

En effet, ces parallélogrammes sont entre eux comme les triangles RMT, PMS, c.-à-d. comme $MR \times MT : MP \times MS$. Or le parallélisme donne

$$MR : KD' :: DR : DK \,; \quad MT : DK :: D'T : D'K.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, et supprimant les facteurs communs,

$$MR \times MT = DR \times D'T = MP \times MS.$$

Donc les parallélogrammes RMTK, PMSG sont équivalents. Ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé,

$$EME' = \frac{1}{2}.EPTE' \,; \quad FMF' = \frac{1}{2}FRSF'.$$

Faisant la somme et remplaçant RMTK par PMSG, il vient

$$EME' + FMF' = \frac{1}{2}EGD'E' + \frac{1}{2}FKD'F',$$

somme qui est constante.

En second lieu,

$$DAD' = DAK + DKD' + KAD'$$

ou
$$DAD' = \frac{1}{2}EDKE' + \frac{1}{2}DGD'K + \frac{1}{2}KFF'D'.$$

Donc, $EME' + FMF' = DAD'$;

ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration serait absolument la même si le point M était sur tout autre point de BC non intérieur à DD'. Enfin, si le point M était sur le prolongement du côté BC, ce serait la différence des surfaces des deux triangles MFF', MEE', qui serait constante et égale à celle du triangle DAD'.

NOTE SUR LES PILES DE BOULETS.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'école normale.

Pour démontrer les formules qui servent à la sommation des piles de boulets, on emploie ordinairement celles qui sont relatives aux sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, ou bien on a recours à la théorie des combinaisons : la démonstration suivante, qui n'emploie ni les unes ni les autres, m'a semblé plus simple.

Elle est fondée sur cette remarque. Une tranche de pile carrée de n boulets, sur chaque côté, peut être considérée comme l'assemblage de deux tranches de piles triangulaires, l'une de n boulets, l'autre de $n-1$ boulets de côté.

C'est ce que l'on voit facilement en figurant une tranche de pile carrée, et tirant une ligne droite le long des boulets qui forment la diagonale.

D'ailleurs, on le voit facilement par l'identité suivante :

$$n^2 = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Car

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2} \quad \text{et} \quad 1+2+3\ldots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

La première somme est, comme on sait, le nombre des boulets de la première tranche de pile triangulaire indiquée; la deuxième est relative à la tranche de $n-1$ boulets.

Par suite, en désignant par Q_n le nombre des boulets de toute la pile carrée, et par T_n, T_{n-1} les sommes de boulets de deux piles triangulaires, l'une de n tranches, l'autre de $n-1$, on aura

$$Q_n = T_n + T_{n-1}.$$

Une pile triangulaire de $n-1$ tranches est ainsi composée :

1^re^ tranche, 1 boulet.
2^e^ id. $1+2$.
3^e^ id. $1+2+3$.
. . . .
. . . .
$(n-1)^e$ tranche, $1+2+3+\ldots+n-1$.

Donc $T_{n-1}=1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots(n-1)(n-(n-1))$
$=n(1+2+3+\ldots+n-1)-(1+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2)$.

En changeant $n-1$ en n, ou n en $n+1$, on aura

$$T_n = (n+1)(1+2+3+\ldots+n) - (1+2^2+3^2\ldots n^2)$$
$$= (n+1)(1+2+3+\ldots+n) - Q_n;$$

d'où $\quad T_n + Q_n = (n+1)(1+2+3+\ldots+n).$

Remplaçant Q_n par la valeur ci-dessus, il vient

$$2T_n + T_{n-1} = (n+1)(1+2+3+\ldots n).$$

Ajoutons des deux parts $1+2+3+\ldots n$, valeur d'une n^e tranche, T_{n-1} deviendra égal à T_n, et on aura $2T_n + T_n$

ou $3T_n = (n+2)(1+2+3+\dots n) = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{2}$

ou $T_n = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Pile carrée.

$$Q_n = T_n + T_{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

La formule qui donne la somme des boulets d'une pile rectangulaire se déduisant facilement de la précédente, je n'ajouterai rien de plus.

NOTE

sur les racines infinies des équations.

—

Je me propose d'examiner quelques points de la théorie des asymptotes rectilignes aux courbes algébriques.

Dans l'ordre d'exposition que j'adopte, il est utile de parler en premier lieu des racines infinies des équations à une seule inconnue. Je commence par l'examen du principe suivant :

I. *Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation*,

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots = 0,$$

devient nul, l'équation admet une racine infinie.

Expliquons d'abord quel est le sens précis de cet énoncé, ou du moins celui que nous y attacherons.

Les coefficients B, C, ..., sont supposés réels et déterminés; le coefficient, A, du premier terme est variable, et peut recevoir des valeurs aussi petites que l'on voudra, *tant négatives que positives* : il sera toujours possible de donner à ce coefficient A une valeur, α, assez petite pour que l'équation $\alpha x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0$ ait une racine réelle plus grande que tout nombre déterminé δ, et cette racine réelle deviendra de plus en plus grande, lorsque α diminuera progressivement, en convergeant vers zéro.

C'est seulement cela que je veux exprimer en disant : *Lorsque le coefficient du premier terme devient nul, l'équation admet une racine infinie.*

Et par conséquent, je ne dirai pas : L'équation $A^2x^2+1=0$ a ses racines infinies quand $A = 0$; car ces racines restent constamment imaginaires, quelque petite que soit la valeur réelle attribuée au coefficient A (*).

La même observation s'applique à l'équation $A^2x^6 + x^4 + + x^2 - 1 = 0$, quoique celle-ci ait deux racines réelles pour toutes les valeurs réelles de A. Mais ces racines ne peuvent devenir aussi grandes que l'on voudra, car elles sont, nécessairement, moindres que l'unité.

Au reste, les conclusions tirées de ces deux exemples ne sont nullement en contradiction avec le principe énoncé, puisque, dans l'énoncé même de ce principe, j'ai expressément supposé que le coefficient du premier terme de l'équation considérée pouvait recevoir des valeurs tant négatives que positives ; c'est-à-dire pouvait changer de signe ; tandis que, au contraire, dans les deux équations prises pour exemple, j'ai admis, par la forme même attribuée au coefficient du premier terme, que ce coefficient conserverait constamment le même signe.

Considérons encore l'équation générale du second degré à une seule inconnue $Ax^2 + Bx + C = 0$, dont les deux ra-

(*) On objectera, peut-être, que cela n'empêche pas les racines de devenir infinies quand $A=0$; seulement, elles sont alors infiniment grandes imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Cette manière de parler peut être admise, mais je préfère parler autrement.

cines x', x'', sont déterminées par les formules .

$$x' = \frac{-2C}{B+\sqrt{B^2-4AC}}, \qquad x'' = \frac{-2C}{B-\sqrt{B^2-4AC}}.$$

Je suppose que les coefficients invariables B, C, soient positifs, et je donne au coefficient, A, du premier terme des valeurs positives de plus en plus petites. Dès que l'inégalité $A < \frac{B^2}{4C}$ sera satisfaite, les deux racines de l'équation seront réelles, et la racine x'' ira toujours en augmentant pour des valeurs décroissantes de A, à partir de $\frac{B^2}{4C}$. Il est d'ailleurs évident que l'on peut donner au coefficient A une valeur positive assez petite pour que la valeur de x'' surpasse tout nombre donné δ. Enfin, cette racine x'' reste constamment négative dans tous les états de grandeur qu'elle acquiert, lorsque la valeur positive de A diminue progressivement, en convergeant vers zéro. C'est ce que je conviens d'exprimer ainsi :

L'équation $+Ax^2+Bx+C=0$, a une racine infinie négative, quand le coefficient, $+A$, de son premier terme se réduit à zéro.

Si l'on suppose A négatif, la racine x'' reste constamment positive, et augmente au delà de toute limite assignable, pour des valeurs absolues de A, suffisamment petites. C'est pourquoi je dirai :

L'équation $-Ax^2+Bx+C=0$ a une racine infinie positive, quand le coefficient $-A$ de son premier terme se réduit à zéro.

Si le second terme manque, l'équation est $Ax^2+C=0$. Le coefficient C étant supposé positif, les racines de l'équation restent imaginaires pour toutes les valeurs positives de A ; mais lorsqu'on donne au coefficient A des valeurs négatives, l'équation devient $-Ax^2+C=0$; et si A s'annule, cette dernière équation a deux racines infinies, l'une positive et l'autre négative.

2. Je passe actuellement à la démonstration du principe général énoncé n° 1.

Je considère d'abord l'équation de degré pair

$$Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0,$$

dans laquelle le second terme a un coefficient négatif, et je donne au coefficient A du premier terme des valeurs positives indéfiniment décroissantes.

Dans cette hypothèse, l'équation ne peut admettre une racine infinie négative; car si l'on désigne par N la valeur absolue du plus grand des coefficients B, C, etc., les racines négatives auront pour limite $-\left(\frac{N}{B}+1\right)$.

Mais on peut donner au coefficient A une valeur positive α assez petite pour que l'équation admette une racine positive plus grande que tout nombre donné δ, et si la valeur de A continue à décroître à partir de α, cette racine réelle ira en augmentant.

En effet, soit N la valeur absolue du plus grand des coefficients du polynôme $-Bx^{2m-1}+Cx^{2m-2}+$ etc.; en remplaçant, dans ce polynôme, la variable x par $\left(\frac{N}{B}+1\right)$, ou bien, par une valeur plus grande, le résultat de la substitution sera négatif, et sa valeur absolue augmentera continuellement avec celle de la quantité substituée à x. C'est là un principe démontré dans les Éléments d'Algèbre. Cela posé, désignons par β un nombre au moins égal au plus grand des deux nombres $\frac{N}{B}+1$ et δ; et, substituons β à x dans le premier nombre $Ax^{2m}-Bx^{2m-1}+Cx^{2m-2}+$ etc. de l'équation proposée. Ce polynôme deviendra $A\beta^{2m}-B\beta^{2m-1}+C\beta^{2m-2}$

$+$ etc., ou bien encore : $A\beta^{2m} - n$, en nommant $-n$ la valeur de $-B\beta^{2m-1} + C\beta^{2m-2} +$ etc. Et par conséquent, en donnant au coefficient A une valeur positive α moindre que $\frac{n}{\beta^{2m}}$, le résultat de la substitution de β à x dans le premier membre de l'équation $\alpha x^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} +$ etc. $= 0$, sera négatif. Or, si l'on remplace x par $\frac{N}{\alpha} + 1$, le premier membre de cette équation devient positif, et conserve le même signe pour toute valeur plus grande substituée à x, donc, l'équation aura une racine β' comprise entre β et $\frac{N}{\alpha} + 1$. Il est d'ailleurs évident qu'on a $\beta' > \delta$, puisque β est, par hypothèse, au moins égal à δ.

Il faut encore observer que β' est la plus grande des racines positives de l'équation $\alpha x^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$, car le premier membre de cette équation reste constamment positif pour des valeurs croissantes de x, à partir de β'.

Mais on donnera à l'équation $Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$ une racine plus grande que β', en remplaçant A par une valeur positive α' moindre que α. En effet, l'égalité $\alpha\beta'^{2m} - B\beta'^{2m-1} + C\beta'^{2m-2} + \ldots = 0$ donne :

$$\alpha'\beta'^{2m} - B\beta'^{2m-1} + C\beta'^{2m-2} + \ldots < 0.$$

D'où il suit que l'équation $\alpha' x^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$ a une racine positive supérieure à β'.

Ainsi, l'équation $+Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} +$ etc. $= 0$ admet une racine infinie positive, quand A se réduit à zéro.

Si les valeurs décroissantes attribuées au coefficient du premier terme sont constamment négatives, l'équation prend la forme :

$$-Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0,$$

et ses racines positives ont nécessairement pour limite

$\frac{N}{B} + 1$. Dans ce cas, il sera possible de donner à A une valeur α assez petite pour que l'équation ait une racine négative $-\beta'$ plus grande, en valeur absolue, que tout nombre négatif $-\delta$ assigné. Et la valeur de β' ira en augmentant à mesure que α deviendra plus petit. En d'autres termes :

L'équation $-Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$ aura une racine infinie négative, lorsque $A = 0$.

Le raisonnement est, dans ce second cas, entièrement semblable à celui du premier.

La même analyse s'applique, sans aucune modification :

1° Aux équations de degré pair $\pm Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots = 0$, dont le second terme a un coefficient positif, puisqu'il suffira, pour rendre ces deux nouvelles équations identiques avec les deux premières, de changer les signes de tous leurs termes.

2° Aux équations de degré impair $\pm Ax^{2m-1} \pm Bx^{2m-2} + \ldots = 0$. Car si l'on introduit dans ces équations une racine nulle, en multipliant tous leurs termes par x, elles prendront la forme des équations déjà considérées.

3. Pour compléter la démonstration, il reste encore à examiner les équations privées de leur second terme.

Je prends pour exemple l'équation $Ax^{2m} + Fx^{2n} + Hx^{p} + + \ldots = 0$. de degré pair, et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. Le second terme manquant, je suppose que le premier des termes à coefficient invariable, $+ Fx^{2n}$, soit positif et d'un degré pair. Puis, je donne au coefficient A du premier terme des valeurs indéfiniment décroissantes, mais positives.

Les racines positives ou négatives des équations déterminées de cette manière, ne peuvent devenir infinies, car elles resteront moindres que $\frac{N}{F} + 1$, en désignant par N la valeur absolue du plus grand des coefficients invariables de ces équations.

Mais, si l'on donne au coefficient A des valeurs négatives convergentes vers zéro, l'équation $-Ax^{2m}+Fx^{2n}+Ax^p+\ldots=0$, aura, pour des valeurs de A suffisamment petites, une racine positive, et une racine négative, toutes deux plus grandes, en valeurs absolues, que des nombres quelconques désignés, et ces racines iront en augmentant pour des valeurs décroissantes de A. C'est ce qui résulte évidemment de l'analyse du n° 2 (p. 35-36).

Lorsque A s'annule, l'équation $-Ax^{2m}+Fx^{2n}+\ldots=0$ a donc deux racines infinies, l'une positive, et l'autre négative.

Le premier des termes à coefficient invariable peut être de degré impair, comme dans l'équation

$$Ax^{2m}+Fx^{2n-1}+Hx^p+\ldots=0.$$

Alors, la démonstration donnée n° 2, pour les équations dont le second terme n'est pas nul, s'applique immédiatement. Par conséquent, lorsque $A=0$,

L'équation

$$+Ax^{2m}+Fx^{2n-1}+Hx^p+\ldots=0,$$

a une racine infinie négative, et l'équation

$$-Ax^{2m}+Fx^{2n-1}+Hx^p+\ldots=0,$$

une racine infinie positive.

Toute équation privée de second terme se ramène à l'une des quatre formes d'équations déjà considérées, par un changement de signe dans tous les termes, ou bien, en introduisant une racine nulle. Ainsi, dans tous les cas :

L'équation à une seule inconnue

$$Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots=0$$

admet au moins une racine réelle infinie, quand le coefficient du premier terme, supposé variable et susceptible de changer de signe, se réduit à zéro.

J'ajouterai encore quelques mots sur deux raisonnements très-simples, au moyen desquels on a voulu établir, sans aucune restriction, le principe que je viens d'examiner. Quelque facile que soit la réfutation de ces raisonnements, elle ne peut être déplacée dans un article qui s'adresse uniquement à des commençants.

La première des démonstrations dont je veux parler consiste à mettre d'abord l'équation proposée

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots . = 0,$$

sous la forme $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots . = 0$. Puis, on fait observer que si $A = 0$, la fonction $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \text{etc.}$ est convergente vers zéro, pour de très-grandes valeurs de x, et s'annule quand x devient *infini*. — *Or, la fonction qu'il s'agit* d'annuler n'est pas $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \text{etc.}$, mais le produit $\left(A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots .\right) x^m$. Si le premier facteur est convergent vers zéro pour de très-grandes valeurs de x, par cela même, le second facteur x^m se rapproche de l'infini; et jusque-là, on ne peut rien conclure pour la valeur du produit.

L'autre raisonnement n'est guère plus concluant. Dans celui-ci, on remplace x par $\frac{1}{y}$, il vient :

$$\frac{A}{y^m} + \frac{B}{y^{m-1}} + \frac{C}{y^{m-2}} + \ldots . = 0\ ;$$

faisant disparaître les dénominateurs, on a :

$$A + By + Cy^2 + \text{etc.} = 0.$$

Cette dernière équation admet une racine nulle, quand $A = 0$; et de là $x = \infty$. — Mais, la fonction de y qu'il faut annuler, est maintenant le produit $(A+By+Cy^2+\ldots.)\times\frac{1}{y^m}$. Et l'objection reste la même. G. (*La suite prochainement.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

80. Théorème. Une parabole ayant un foyer fixe, et passant par un point déterminé : le lieu du sommet est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant sur une circonférence de même rayon (*Chasle*).

81. Construire la courbe donnée par l'équation polaire $\rho = \tang\varphi$. Et démontrer que la polaire de cette courbe, relativement à un cercle, est une seconde courbe égale à la première.

82. Résoudre et discuter l'équation

$$+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1.$$

Afin de bien faire comprendre quelle est ici la question proposée, il suffira de rappeler en peu de mots ce que l'on trouve dans les Traités d'Algèbre, au sujet de la résolution des équations irrationnelles. On fait disparaître les radicaux ; puis on observe que l'équation rationnelle ainsi obtenue *doit avoir parmi ses racines, non-seulement celles de* l'équation proposée, mais encore les racines de toutes les *équations irrationnelles qu'il est possible de former, en prenant* chaque radical avec toutes ses déterminations algébriques. Or, en opérant de cette manière sur l'équation $+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$, on parvient à l'équation $x^2=\frac{3}{4}$, dont les racines sont $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aucune de ces deux valeurs ne peut convenir à l'équation proposée, car il est évident que l'équation $+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$ ne peut admettre une racine réelle. C'est ce que l'on propose d'expliuer.

RECHERCHE

DES

RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES,

PAR M. FINCK,
Docteur ès sciences, professeur au collége de Strasbourg,

ET

M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
Professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

Note. La dénomination de *racine complexe*, introduite par M. Gauss, sert maintenant à désigner une racine imaginaire dont les deux coefficients réels sont commensurables. Dans un beau Mémoire sur la théorie des nombres, M. Dirichlet a donné, pour trouver les racines complexes, une méthode entièrement identique à celle qui est en usage pour les racines réelles commensurables. Nous devons ce renseignement à l'obligeance de M. Lebesgue, professeur à la faculté des sciences de Bordeaux. Cet arithmologue distingué (*) nous promet d'enrichir prochainement les Annales, de démonstrations élémentaires des principales propositions de M. Dirichlet. Les éléments finiront par admettre la nouvelle méthode, dont celle qu'on pratique n'est qu'un cas particulier. En attendant, l'importance de la matière nous engage à publier ce que nous avons reçu à ce sujet, il y a un mois, de

(*) Nous hasardons cette expression qui paraît propre à désigner le petit nombre d'esprits éminents qui font faire des progrès à la plus difficile des branches du calcul, à la théorie des nombres, où il reste encore tant de terrains à défricher.

M. Deladérèere et, récemment, de M. le professeur Finck. Nous réunissons les deux notes en une seule. Tm.

1. *Définition.* Une expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, où a et b sont des nombres entiers, est divisible par le nombre entier d, lorsque dans le quotient $a'+b'\sqrt{-1}$, a' et b' sont des nombres entiers. (D.)

2. *Proposition I.* a et b étant des nombres entiers, si $a+b\sqrt{-1}$ est divisible par d, il faut et il suffit que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ soient des nombres entiers. (D.)

3. *Proposition II.* Si un nombre premier p divise un produit $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})$, où a,b, a',b' sont des nombres entiers ; et si p divise seulement l'un de ces nombres : alors p divise nécessairement le facteur où ce nombre n'entre pas.

Démonstration. On a $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}=c+d\sqrt{-1}$; il faut donc que p divise c et d (1) ; supposons encore que p divise b' sans diviser a' ; donc $\frac{c+bb'}{p}$, $\frac{d-ab'}{p}$, ou bien $\frac{aa'}{p}$, $\frac{ba'}{p}$ sont entiers ; mais p est premier avec a' ; donc $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{p}$ sont des nombres entiers. C. Q. F. D. (D.)

4. *Proposition III.* Tout nombre premier p qui, dans un produit tel que $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})(a''+b''\sqrt{-1})$.... divise seulement dans chaque facteur l'un des deux nombres entiers a, b ; a', b' ; a'', b'' ; ..... ne divise pas le produit.

Démonstration. Ce produit peut se mettre sous la forme $(a+b\sqrt{-1})(P+Q\sqrt{-1})$, où P et Q sont des nombres entiers ; donc si ce produit était divisible par p, le même nombre premier devrait diviser $P+Q\sqrt{-1}$, car p ne divise que l'un des deux nombres a, b (3) ; de même, $P+Q\sqrt{-1} = (a'+b'\sqrt{-1})(P''+Q''\sqrt{-1})$; par le même raisonnement, p devrait diviser $P''+Q''\sqrt{-1}$; en continuant, on parviendrait à démontrer que p devrait diviser l'un des facteurs du produit ; ce qui est impossible. Donc, etc. (D.)

5. *Définition.* Un nombre de la forme $a+b\sqrt{-1}$ est dit *nombre complexe entier*, lorsque a et b sont des nombres entiers ; si a et b ne sont pas des nombres entiers, le nombre est *complexe fractionnaire.* (D.)

6. *Proposition IV.* Soit l'équation $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots a_n=0$ (1) ; les coefficients a_1, a_2, ... a_n étant des nombres complexes entiers, l'équation ne peut admettre des racines complexes fractionnaires.

Démonstration. Supposons que l'équation (1) ait une racine complexe fractionnaire de la forme $\frac{a}{b}+\frac{c}{e}\sqrt{-1}$; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{e}$ peuvent être supposés irréductibles ; soit d le plus grand commun diviseur de b et e ; de sorte que l'on ait $b=db'$; $c=de'$; b' et e' seront des nombres premiers entre eux. Donc $\frac{a}{b}+\frac{c}{e}\sqrt{-1}=\frac{ae'+cb'\sqrt{-1}}{db'e'}$ (2) ; soit p un nombre premier facteur de b' ; p divise donc cb' ; il divise aussi b ; donc il ne divise pas a, puisque a et b sont premiers entre eux ; et par une raison analogue, p ne divise pas e' ; par conséquent le second membre de l'identité (2) est aussi un nombre complexe fractionnaire. Donc aussi $\frac{(ae'+cb'\sqrt{-1})^n}{db'e'}$ est un nombre complexe fractionnaire (Prop. III).

Or en substituant $\frac{ae'+cb'\sqrt{-1}}{db'e'}$ à la place de x dans l'équation (1) et multipliant par $(db'e')^{n-1}$, on déduit

$\frac{(ae'+cb'\sqrt{-1})^n}{db'e'} = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}$, où M et N sont des nombres entiers; équation impossible, puisque le premier membre est un nombre complexe fractionnaire. Donc l'équation n'a pas de racine complexe fractionnaire. (D.)

7. *Problème I.* Étant donnée l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots\ldots a_n = 0$, où les coefficients a_0, a_1, a_2 ..... sont des nombres complexes quelconques, trouver les racines complexes ?

Solution. En chassant les dénominateurs, on peut toujours ramener l'équation à une autre dont les coefficients sont des nombres complexes entiers ; nous supposerons donc de suite que les coefficients a_0, a_1, a_2 ..... a_n sont des nombres complexes entiers; faisons $x = \frac{z}{a_0}$; et chassant les dénominateurs, on obtient une équation en z, où z^n a pour coefficient l'unité, et dont tous les autres coefficients sont des nombres complexes entiers ; conséquemment l'équation en z ne peut admettre que des racines complexes entières (Propos. IV) ; le problème est donc ramené à trouver les racines complexes entières. (D.)

8. *Problème II.* Étant donnée l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots a_n = 0$, les coefficients sont des nombres complexes entiers ; trouver les conditions auxquelles doit satisfaire une racine complexe entière.

Solution. $x = a + b\sqrt{-1}$; a et b étant des nombres entiers ; on a

$$a_0(a+b\sqrt{-1})^n + a_1(a+b\sqrt{-1})^{n-1} + a_2(a+b\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}(a+b\sqrt{-1}) + a_n = 0 ;$$

d'où

$$a_0(a+b\sqrt{-1})^{n-1} + a_1(a+b\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} = \frac{-a_n}{a+b\sqrt{-1}}.$$

Le premier membre est un nombre complexe entier; donc a_n est divisible par $a+b\sqrt{-1}$; et par conséquent $a_n(a-b\sqrt{-1})$ est divisible par a^2+b^2; ainsi le dernier coefficient multiplié par $a-b\sqrt{-1}$ doit être divisible par le carré du module; première condition; désignons le quotient par $c+d\sqrt{-1}$; on en déduit

$$a_0(a+b\sqrt{-1})^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}=\frac{-c-d\sqrt{-1}-a_{n-1}}{a+b\sqrt{-1}}=$$

$$=\frac{-e-f\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}=\frac{-(a-b\sqrt{-1})(e+f\sqrt{-1})}{a^2+b^2}.$$

Ainsi, le premier quotient augmenté du coefficient a_{n-1}, et multiplié par $a-b\sqrt{-1}$, doit être divisible par le carré du module; seconde condition; et ainsi de suite; la dernière condition est que le dernier quotient soit égal à $-a_0$; conditions qui existent aussi pour les racines réelles entières; mais alors b étant nul, la multiplication par $a-b\sqrt{-1}$ devient superflue. On démontre aussi, comme pour les racines entières réelles, que si ces conditions existent, la quantité essayée est racine. (D.) (V. t. II, p. 523.)

9. *Proposition V*. Dans toute équation de la forme $(fx)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots a_n=0$, où a_1, a_2 ..... a_n sont des coefficients quelconques, le plus grand des modules des coefficients, augmenté de 1, est une limite supérieure des modules des racines imaginaires.

Démonstration. En effet, soit C ce module maximum; le module de fx n'est jamais moindre que celui de $x^n-Cx^{n-1}-Cx^{n-2}-\ldots\ldots-Cx-C$; or, $C+1$ rend $x^n>Cx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots\ldots Cx+C$; donc, toute valeur de x dont le module n'est pas inférieur à $C+1$, ne saurait annuler $f(x)$; donc $C+1$ est une limite supérieure des modules des racines imaginaires. (F.)

10. *Problème III.* Trouver les racines complexes entières d'une équation.

Solution. Soit l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots +$ $a_n = 0$; a, a_1 ..... sont des nombres complexes entiers. Soit $C + 1$ le plus grand module des coefficients; on considère tous les diviseurs de $a_n(a - b\sqrt{-1})$ compris entre 0 et $(C + 1)^2$. On rejette les diviseurs qui ne peuvent se décomposer en la somme de deux carrés ; soit D un diviseur compris entre 0 et $(C + 1)^2$ et étant la somme de deux carrés $a^2 + b^2$, il y aura à essayer les quatre valeurs $a + b\sqrt{-1}$; $-a + b\sqrt{-1}$; $b + a\sqrt{-1}$; $-b + a\sqrt{-1}$; ce même essai suffit aussi pour les conjugués de ces nombres. (F).

11. *Proposition VI.* $a + b\sqrt{-1}$ n'est pas racine complexe entière de $f(x) = 0$, 1° si $(a - 1)^2 + b^2$ ne divise pas $f(1)$; 2° si $(a + 1)^2 + b^2$ ne divise pas $f(-1)$; 3° si b^2 ne divise pas $f(a)$.

Démonstration. Si $a + b\sqrt{-1}$ est une racine complexe entière, on a l'identité $f(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)\varphi x$; tous les coefficients de φx sont entiers; faisant dans cette identité successivement $x = 1$, $x = -1$, $x = a$, l'on obtient

$$f(1) = ((a-1)^2 + b^2)\varphi(1) ; f(-1) = ((a+1)^2 + b^2)\varphi(-1);$$
$$fa = b^2\varphi(a) ; \text{ C. Q. F. D. (F.)}$$

12. *Exercice :*

$$(2 + \sqrt{-1})x^5 + (1 - 2\sqrt{-1})x^4 - (41 + 37\sqrt{-1})x^3 -$$
$$-(213 - 93\sqrt{-1})x^2 + (145 + 105\sqrt{-1})x + 350 - 50\sqrt{-1} = 0.$$

Les racines sont

$1 + \sqrt{-1}$; $-2 + \sqrt{-1}$; $-4 - 3\sqrt{-1}$; $2\sqrt{-1}$; 5 (D.)

Réclamation au sujet d'un article des Annales, relatif aux racines commensurables.

M. Finck nous écrit que la méthode sur les racines commensurables (t. II, p. 523) est déjà expliquée dans son Algèbre, publiée en 1839.

THÉORÈME

SUR LE PRODUIT DE DEUX POLYNOMES.

D'après M. Gauss (*).

—

LEMME. La somme $\frac{A}{\alpha^p a}+\frac{B}{\alpha^{p-1}b}+\frac{C}{\alpha^{p-2}c}+\ldots\ldots$ est toujours fractionnaire, ayant α^p comme facteur au dénominateur commun ; on suppose A, B, C ..... a, b, c ..... des nombres entiers premiers avec le nombre entier α. Les exposants de α sont entiers et positifs.

Démonstration. Réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{Abc\ldots\ldots+\alpha Bac\ldots\ldots+\alpha^2 Cab\ldots\ldots+\ldots\ldots}{\alpha^p abc\ldots\ldots}.$$

Or, le numérateur n'est pas divisible par α, donc le facteur α^p reste au dénominateur.

THÉORÈME. Le produit de deux polynômes, ordonnés suivant la même variable, à exposants entiers et positifs, à coefficients réels, mais pas tous entiers, donne un troisième polynôme, dont les coefficients ne sont pas tous entiers ; on

---

(*) Disquisitiones arithmeticæ, sect. 1, § 42.

suppose que les coefficients de la plus haute puissance de la variable dans les deux polynômes sont égaux à l'unité.

Démonstration. Soient les deux polynômes

$$x^p + A_1x^{p-1} + A_2x^{p-2} + \ldots\ldots A_rx^{p-r} + \ldots\ldots \qquad (P)$$

$$x^q + B_1x^{q-1} + B_2x^{q-2} + \ldots\ldots B_sx^{q-s} + \ldots\ldots \qquad (Q)$$

p et q sont des nombres entiers positifs ; r n'est jamais supérieur à p, ni s supérieur à q. Les coefficients A_1, A_2, A_3 ..... B_1, B_2, B_3 ..... sont réels, mais tous ne sont pas entiers.

Soit α un nombre premier facteur d'un des dénominateurs qui se trouvent dans (P); réunissant tous les termes où α est à la plus haute puissance, et parmi ces termes prenons celui où x a le plus haut exposant ; soit t la plus haute puissance de α et $p-r$ le plus haut exposant de x; de sorte que $A_r = \frac{N}{\alpha^t M}$; N et M étant des nombres entiers premiers avec α ; dans tous les termes qui précèdent A_r, α sera élevé à une puissance moindre que t; et dans ceux qui suivent, α ne pourra avoir un exposant supérieur à t; dans le polynôme $\frac{Q}{\alpha}$, le coefficient du premier terme est $\frac{1}{\alpha}$; ainsi il y a au moins un coefficient qui a α comme facteur au dénominateur. Soit $\alpha^{t'}$ la plus haute puissance de α qu'on rencontre dans $\frac{Q}{\alpha}$, et $q-s$ le plus haut exposant de x, où cette rencontre a lieu ; on aura donc $\frac{B_s}{\alpha} = \frac{N'}{\alpha^{t'}M'}$; M' et N' sont des nombres premiers avec α ; dans les termes précédents, α s'élève à une puissance moindre que t' et ne surpasse pas t' dans les termes suivants ; dans le produit des polynômes $P.\frac{Q}{\alpha}$, on obtient d'abord le terme $\frac{NN'}{\alpha^{t+t'}MM''}$, coefficient de $x^{p+q-r-s}$, et $t+t'$ n'est point inférieur à 2. Pour avoir les autres coefficients qui répondent à la même puissance, il faut prendre un terme qui précède x^{p-r} et le multiplier par un terme qui suit x^{q-r} et *vice versâ*; donc dans ces coefficients, α s'élève à une puissance moindre que $t+t'$; et, en vertu du lemme, la somme de ces coefficients renferme $\alpha^{t+t'}$ comme facteur au dénominateur; donc dans le produit P.Q, la puissance $\alpha^{t+t'-1}$ entrera comme facteur dans le coefficient $x^{p+q-r-s}$; donc, ce coefficient est fractionnaire. C. Q. F. D.

Observation. La même démonstration s'applique aux polynômes dont les coefficients des premiers termes ne sont pas égaux à l'unité, pourvu que tous les coefficients de Q ne soient pas divisibles par α^t.

Corollaire. Le théorème subsiste, sous les mêmes conditions, pour un nombre quelconque de polynômes; et par conséquent pour des polynômes égaux. Donc, un polynôme à une variable, ayant un ou plusieurs coefficients fractionnaires, étant élevé à une puissance entière positive, donne pour résultat un polynôme ayant au moins un coefficient fractionnaire.

Tm.

THÉORÈME

SUR LA DIFFÉRENCE ENTRE L'ARC ET SON SINUS,

D'aprés Pappus.

Théorème. La différence entre un arc du premier quadrant et son sinus est moindre que le double du carré de l'arc divisé par le rapport de la circonférence au diamètre.

Démonstration. Faisant le rayon égal à un, représentons la longueur de l'arc par a, de sorte que $2a < \pi$; on a les inégalités suivantes :

$$a < \operatorname{tang} a \qquad (1), \qquad \cot. a > \frac{\pi}{2} - a \qquad (2)$$

$$a \cos a < \sin a \qquad \cos a > \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin a$$

$$a \cos^2 a < \sin a \cos a \qquad \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^2 a < \sin a \cos a$$

$$a - a \sin^2 a < \sin a \cos a$$

$$a \sin^2 a > a - \sin a \cos a;$$

donc

$$\frac{a \sin^2 a}{\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^2 a} > \frac{a - \sin a \cos a}{\sin a \cos a};$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - a}{a} < \frac{\sin a \cos a}{a - \sin a \cos a}; \qquad \frac{\pi}{2a} < \frac{a}{a - \sin a \cos a} \qquad (3)$$

Ainsi $a - \sin a \cos a < \frac{2a^3}{\pi}$ et *à fortiori* $a - \sin a < \frac{2a^3}{\pi}$.

Observation I. On parvient à ce théorème en écrivant en caractères algébriques la proposition XV (théorème XIV) du 5e livre de Pappus ; cette proposition n'est autre que l'inégalité (3), que Pappus énonce ainsi · Le rapport de l'aire d'un secteur à l'aire de son segment est plus grand que le rapport de l'angle droit à l'angle du secteur. C'est ce qu'il démontre par des considérations géométriques.

Observation II. Les séries donnent pour limite $a - \sin a < \frac{a^3}{6}$ (t. II, p. 216); cette limite, moindre que celle de Pappus, est par conséquent préférable.

Observation III. Lorsque a est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on a $a < \frac{2a^3}{\pi}$, et alors la limite de Pappus est intuitive.

Observation IV. Pappus se sert de cette même proposition XV pour démontrer celle-ci · Si une demi-circonférence et un arc de cercle sont de même longueur, l'aire du demi-cercle est plus grande que l'aire du segment formé par l'arc et sa corde (prop. XVII du liv. 5).

Observation V. Pappus, auteur du quatrième siècle, ne connaissait pas nos lignes trigonométriques. On doit les sinus et sinus-verse à Mohammed-ben-Geber, de Batan en Mésopotamie, auteur arabe du neuvième siècle, surnommé Albategnius, et mort en 928. Les tangentes et cotangentes ont été introduites par Mohammed-ben-Yahya, prince de Syrie, auteur astronome du X[e] siècle connu sous le nom de Aboul-Wéfa, le même auquel on voulait attribuer, il y a quelques années, la découverte de la *variation*, inégalité lunaire; assertion détruite récemment par M. Munk, orientaliste distingué et par l'illustre M. Biot, de l'Académie. L'emploi des sécantes est dû à Joachim (Georges), surnommé Rhéticus, né à Feldkirk, dans le pays des Grisons (Rhetia), le 16 février 1514, mort en Hongrie le 4 décembre 1576; mais son ouvrage, *Opus palatinum de triangulis*, n'a paru qu'en 1596. Tm.

GRAND CONCOURS. (Année 1843.)

Exposer d'une manière concise la théorie des racines égales et la méthode qu'on en tire pour mener les tangentes aux courbes algébriques.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. ROGER (ÉMILE-LOUIS),
né le 29 avril 1825 à Nîmes (Gard). Institution de M. *de Reusse*.
Collége royal Saint-Louis, professeur M. *Vincent*.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie des racines égales.

Soient a, b, c... les racines d'une équation algébrique

$f(x)=0$: on sait que $f(x)$ sera le produit des facteurs binômes $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$...; en sorte que l'on aura

$$f(x)=N(x-a)(x-b)(x-c)...,$$

(N étant le coefficient du premier terme de cette équation). Il peut arriver que les racines a, b, c... ne soient pas toutes différentes entre elles; ainsi la racine a pourra se trouver répétée n fois, la racine b, p fois... : on dit alors que $f(x)$ admet n racines égales à a, p racines égales à b...; et on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=N(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q...,$$

expression qui s'applique aussi en particulier au cas des racines simples, en faisant $n=1$, $p=1$, etc.

Cela posé, l'objet de la théorie qui nous occupe consiste principalement à ramener une équation qui admet des racines égales, à un système d'équations tel que chacune d'elles n'admette plus que des racines simples, et que, en supposant le système résolu, on puisse en conclure les racines de l'équation proposée, chacune avec leur *degré de multiplicité.*

Ainsi, soit X_1 le produit des facteurs simples de $f(x)$ ou X, X_2 le produit des facteurs doubles, mais élevés chacun à la première puissance, X_3 le produit des facteurs triples, mais élevés chacun à la première puissance...; alors on aura

$$X=X_1X_2^2X_3^3X_4^4...$$

Il s'agit d'obtenir isolément chacun des facteurs X_1, X_2...

Première méthode. Cette méthode découle naturellement de la forme de l'équation

$$f(x)=N(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q...$$

On voit en effet que si $f(x)$ admet une racine a au degré n de multiplicité, ce polynôme devra être exactement divisible par $(x-a)^n$. D'après cela, pour découvrir cette racine, il faudra effectuer la division de $f(x)$ par $(x-a)^n$, comme si a était connu ; on écrira ensuite que le reste de la division est identiquement nul. Comme ce reste sera ordinairement du degré $(n-1)$ en x, on obtiendra ainsi n équations de condition entre a et les coefficients de l'équation proposée. Soient

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0\ldots,$$

ces équations de condition ; toute valeur de a qui annulera à la fois tous ces polynômes sera *au moins* n *fois* racine dans $f(x)$. Il faudra donc chercher les solutions communes aux polynômes A, B, C..., considérés comme fonctions de a ; le plus grand commun diviseur D entre tous ces polynômes contiendra toutes les racines qui entrent dans $f(x)$ au degré n de multiplicité, *ou à un degré supérieur.*

Cette dernière indétermination vient compliquer la méthode, qui paraît au premier abord si naturelle; mais on peut y remédier. En effet, si l'on a pour le polynôme proposé

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 X_5^5 \ldots,$$

et que l'on cherche d'abord les racines doubles, en divisant X par un facteur de la forme $(x-a)^2$, et que l'on détermine le plus grand commun diviseur entre les équations de condition ainsi trouvées, on aura évidemment, en appelant D_2 ce plus grand commun diviseur,

$$D_2 = X_2 X_3 X_4^2 X_5^2 X_6^3 \ldots;$$

car un facteur tel que $(x-a)^5$ pourra être considéré comme donnant $(x-a)^2(x-a)^2(x-a)$. De même, si l'on cherche le plus grand commun diviseur qui correspond aux racines triples, on doit trouver

$$D_3 = X_3 X_4 X_5 X_6^2 \ldots, \text{ etc.}$$

Or, au moyen des polynômes D_2 et D_3, on peut isoler le facteur X_2. En effet, X_2 est le produit des facteurs étrangers aux deux polynômes D_2 et D_3, et voici comment on peut l'obtenir.

Soit δ le plus grand commun diviseur que l'on peut chercher entre D_2 et D_3; divisons D_2 par δ, et soit D_2' le quotient; on a alors

$$D_2 = D_2' \delta.$$

Cherchons de même le plus grand commun diviseur entre D_2' et D_3. Soit δ' ce plus grand commun diviseur : on aura de même en divisant D_2' par δ'

$$D_2' = D_2'' \delta'$$
$$D_2'' = D_2''' \delta'',$$
$$\cdots\cdots$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un plus grand commun diviseur égal à l'unité, ce qui arrivera certainement, attendu que les degrés D_2' et D_2'' vont en diminuant au moins d'une unité à chaque opération :

$$D_2^{n-1} = D_2^n \delta^{n-1}$$
$$D_2^n = D_2^n . 1$$

Multipliant ensemble toutes ces égalités, on en déduit

$$D_2 = D_2^n \delta \delta' \delta'' \ldots;$$

alors D_2^n sera le produit des facteurs de D_2 qui ne divisent pas D_3; car 1° D_2^n ne divise pas D_3, puisque, d'après la manière dont on a opéré, D^n_2 et D_3 ont pour plus grand commun diviseur $\delta^n = 1$; 2° tous les autres facteurs de D_2, savoir : δ, δ'..., divisent D_3.

De là on conclut que le polynôme D^n_2 est précisément le polynôme cherché

$$X_2.$$

En opérant de même sur D_3 et D_4, on obtiendrait le polynôme X_3, et ainsi de suite. (On aurait pu isoler d'abord le polynôme X_1 au moyen de X et de D_2.) Le problème des racines égales doit donc être considéré comme résolu.

Mais la méthode que je viens d'exposer, quoique suffisante en théorie, devenant le plus souvent impraticable à cause de la longueur des calculs qu'elle exige, il est nécessaire d'avoir recours à une autre méthode; c'est celle que je vais expliquer sommairement.

Seconde méthode. Elle est fondée sur la considération des polynômes dérivés.

Si dans un polynôme $f(x)$ on remplace x par $x+h$, on sait que l'on obtient un développement de la forme

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+f^m(x)\frac{h^m}{1.2\ldots m},$$

$f'(x)$, $f''(x)\ldots$ étant les polynômes dérivés successifs de $f(x)$.

Supposons, pour un moment, que $f(x)$ n'ait que des racines simples,

$$f(x)=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots;$$

je vais chercher quelle sera la composition de $f'(x)$:

$f'(x)$ est le coefficient de la première puissance de h dans le développement de $f(x+h)$. Remplaçant x par $x+h$ dans l'identité précédente, on aura encore identiquement

$$f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+\ \ldots\ =(\overline{x-a}+h)\,(\overline{x-b}+h)\,(\overline{x-c}+h)\ldots$$

On peut développer le second membre suivant la loi qu'on démontre au sujet du binôme de Newton; on aura ainsi

$$f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+\ldots=S_m+S_{m-1}h+\ldots,$$

S_m, $S_{m-1}\ldots$ désignant respectivement les produits des facteurs $(x-a)$ $(x-b)\ldots$ m à m, $m-1$ à $m-1$..... De là on déduit la composition de $f'(x)$

$$f'(x)=S_{m-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$f'(x)=\Sigma\,\frac{f(x)}{x-a}.$$

Voici maintenant le théorème sur lequel s'appuie cette seconde méthode.

THÉORÈME. *Il existe toujours entre* f(x) *et* f'(x) *un plus grand commun diviseur; et ce plus grand commun diviseur est le produit des facteurs binômes de* f(x) *élevés à des puissances dont les exposants sont moindres d'une unité.*

Démonstration. Soit $f(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots\ldots$; puisque les racines sont devenues égales à $a,\ldots\ldots$ on aura évidemment

$$f'(x)=n\frac{f(x)}{x-a}+p\frac{f(x)}{x-b}+q\frac{f(x)}{x-c}+\ldots\ldots$$

$$=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots\left\{\begin{array}{l}n(x-b)(x-c\ldots\\+p(x-a)(x-c)\ldots\\+q(x-a)(x-b)\ldots\\+\ldots\ldots\end{array}\right.$$

et l'on voit déjà que le polynôme

$$D=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots\ldots$$

divise exactement $f(x)$ et $f'(x)$. Pour faire voir qu'il est leur plus grand commun diviseur, il suffit de montrer que $\frac{f(x)}{D}$ et $\frac{f'(x)}{D}$, ou simplement $f(x)$ et $\frac{f'(x)}{D}$, sont premiers entre eux. Or, $f(x)$ n'admet pas d'autre facteur que $(x-a)$, $(x-b)\ldots\ldots$ L'un quelconque de ces facteurs, $(x-a)$ par exemple, divisant toutes les parties de $\frac{f'(x)}{D}$, hors une, ne peut diviser $\frac{f'(x)}{D}$. Donc puisque tous les facteurs de $f(x)$ sont étrangers à $\frac{f'(x)}{D}$, il s'ensuit que $f(x)$ et $\frac{f'(x)}{D}$ sont premiers entre eux; ce qui démontre le théorème, car D est le produit de tous les facteurs binômes de $f(x)$ élevés chacun à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité.

(Cela s'étend même aux facteurs simples de X, lesquels sont élevés dans D à la puissance zéro.)

Cela posé, voici comment on peut décomposer $f(x)$ en ses facteurs des différents degrés de multiplicité.

Écrivons, comme tout à l'heure,

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots\ldots$$

Soit D le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f'(x)$; alors

$$D = X_2^1 X_3^2 X_4^3 \ldots\ldots$$

De même, soit E le plus grand commun diviseur entre D et son dérivé,

$$E = X_3^1 X_4^2 \ldots\ldots$$

$$F = X_4^1 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Divisant chaque polynôme par celui qui le suit, nous aurons

$$\frac{Q}{Q'} = X_1,$$

$$\frac{Q'}{Q''} = X_2,$$

$$\frac{Q''}{Q'''} = X_3,$$

$$\ldots\ldots$$

Voilà donc les facteurs simples de X qui se trouvent isolés.

On voit, d'après cela, comment il faudra opérer toutes les fois qu'il s'agira de séparer les racines des divers degrés de multiplicité d'une équation.

Mais avant tout, il sera bon de débarrasser l'équation donnée des racines commensurables qu'elle peut contenir. On trouvera d'abord ces racines par les procédés connus, et pour reconnaître quel est leur degré de multiplicité, on opérera par des divisions successives, ou bien en se fondant sur le théorème suivant :

Si une équation $f(x) = 0$ admet n racines égales à a, les *polynômes dérivés* f(x), f′(x), ... *jusqu'au* (n — 1)^e, *admettent la même racine* a; *et réciproquement.*

En effet, diminuons toutes les racines de $f(x)=0$, de la quantité a, en posant

$$y = x - a, \quad \text{d'où} \quad x = a + y,$$

la transformée en y devra admettre n racines nulles. Or cette transformée est

$$f(a+y) = f(a) + f'(a)\frac{y}{1} + f''(a)\frac{y^2}{1.2} + \ldots..$$
$$+ f^{n-1}(a)\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots.. f^m(a)\frac{y^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Donc on devra avoir

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \ldots \quad f^{n-1} = 0.$$

La réciproque est évidente.

On pourra donc trouver quel est le degré de multiplicité d'une racine commensurable a, en cherchant quel est l'ordre du dernier dérivé que cette racine anéantit. C'est ce qu'on pourra voir encore en supprimant la racine a dans $f(x)$ par la division, autant de fois qu'il sera possible.

On sent pourquoi ce mode de vérification ne peut être appliqué aux racines incommensurables. C'est parce que toute racine incommensurable ne peut s'obtenir qu'avec une approximation plus ou moins grande. Mais, dans tous les cas, le nombre a n'étant qu'approché, la vérification, qui consiste à voir si $f(a)$, $f'(a)$ ..... sont nuls, ne pourrait être qu'approchée, c'est-à-dire défectueuse.

A la rigueur, ce mode de vérification pourrait s'appliquer aux racines imaginaires ($\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant commensurables). Il faudrait alors résoudre $f(x)$ en substituant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x, ce qui donnerait un résultat de la forme $\quad P + Q\sqrt{-1}$, et par suite les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

équations à deux inconnues, dont on pourrait déterminer les racines réelles commensurables. Mais il vaut mieux, pour la simplicité des calculs, n'opérer la recherche des racines imaginaires qu'après la séparation effectuée des diverses racines suivant leur multiplicité.

Voilà donc comment on arrive au but principal que l'on se propose dans la théorie des racines égales. A cette théorie se rattachent d'ailleurs une foule de questions particulières. Par exemple, on peut demander les conditions pour qu'un polynôme donné $f(x)$ admette un certain nombre de racines égales entre elles. On opérera sur $f(x)$ comme si on voulait isoler X_n, et on écrira à mesure les conditions nécessaires pour l'existence de ce polynôme. A cet effet, on pourra employer l'une quelconque des méthodes que nous avons données; mais il sera généralement plus simple de s'appuyer sur la remarque que nous avons faite tout à l'henre. En désignant par a la racine inconnue qui doit entrer dans $f(x)$ au degré n de multiplicité, on devra avoir :

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots\ldots \quad f^{n-1}(a) = 0.$$

Les conditions demandées s'obtiendront en éliminant a entre ces n équations; on aura ainsi $(n-1)$ équations de condition. On pourrait aussi exprimer qu'il existe entre $f(x)$ et $f'x)$ un plus grand commun diviseur du $(n-1)^e$ degré, ce qui donnerait $(n-1)$ équations de condition, en identifiant à zéro le dernier reste de l'équation; et de plus, il faudrait exprimer que ce plus grand commun diviseur est une $(n-1)^e$ puissance exacte, ce qui donnerait en sus $(n-2)$ conditions. Toutes ces conditions devraient ensuite se réduire à $(n-1)$ ..... etc.

SECONDE PARTIE.

Méthode qu'on peut tirer de la théorie des racines égales pour mener les tangentes aux courbes algébriques.

Soit une droite MN qui coupe une courbe en divers points M, N, ... Si l'on conçoit que la droite MN tourne autour du point M, jusqu'à ce qu'un second de ses points d'intersection N vienne coïncider avec le premier, dans cette position, la sécante sera devenue *tangente*.

Ainsi, on peut définir la tangente à une courbe, en la considérant comme une droite dont deux points d'intersection se sont réunis en un seul, la droite ayant tourné autour de l'un d'eux comme fixe. Par là on voit qu'une tangente peut avoir un nombre illimité de points communs avec la courbe, sans cesser d'être tangente, et qu'une droite qui n'aurait qu'un point commun avec la courbe, ne serait pas pour cela tangente.

Cela posé, il s'agit de mener une tangente à une courbe algébrique
$$f(x, y) = 0,$$
d'après la théorie des racines égales.

Soit
$$y = ax + b,$$
l'équation de la tangente cherchée; je vais déterminer les conditions auxquelles cette droite doit satisfaire pour être tangente. Si l'on cherche les coordonnées d'intersection de cette droite avec la courbe, on aura, pour déterminer x, l'équation
$$f(x, ax + b) = 0.$$
Cette équation admet autant de valeurs réelles de x, que la droite aura de points sur la courbe. Si maintenant on veut que la droite devienne tangente, c'est-à-dire que deux de ses points d'intersection viennent se réunir en un seul, il faudra que l'équation
$$f(x, ax + b) = 0$$

admette une racine double. Cette condition est suffisante; car la droite ayant deux points qui coïncident, c'est-à-dire deux points infiniment voisins sur la courbe, sera évidemment tangente.

La question est donc ramenée à déterminer les conditions pour qu'une équation algébrique

$$f(x,\ ax+b)=0$$

ait deux racines égales entre elles.

Pour cela, on pourra, ainsi que nous l'avons indiqué, chercher le plus grand commun diviseur entre $f(x,\ ax+b)$ et $f'(x,\ ax+b)$, et exprimer que ce plus grand commun diviseur est du premier degré, ce qui se fera en égalant le dernier reste de l'équation à zéro, et donnera une condition de la forme $\qquad \varphi(a,\ b)=0;$
ou bien on pourra diviser $f(x,\ ax+b)$ par un facteur de la forme $(x-\alpha)^2$, et exprimer que le reste, qui sera du premier degré en x, doit être identiquement nul. On aura deux équations de la forme $M=0$, $N=0$, M et N étant des fonctions de a, b, α. Éliminant α entre ces deux relations, on devra trouver la condition cherchée $\varphi(a,\ b)=0$. Le procédé qui consiste à éliminer x entre les deux équations $f(x,\ ax+b)=0$, $f'(x,\ ax+b)=0$, ramènerait au premier mode de calcul.

On aura donc ainsi l'équation de la tangente à la courbe $f(x,y)=0$; et cette équation sera

$$y=ax+b, \qquad \text{avec la condition} \qquad \varphi(a,\ b)=0.$$

Dès lors on peut résoudre toutes les questions qu''il est possible de se proposer sur les tangentes. Par exemple :

Mener une tangente qui passe par un point donné $(x',\ y')$.

Il faudra joindre à la condition $\varphi(a,\ b)=0$ la condition $y'=ax'+b$; et les deux équations détermineront complétement a et b.

Mener une tangente parallèle à une droite donnée.

Le coefficient angulaire a de la tangente cherchée sera le même que celui de la droite donnée; et l'ordonnée de la tangente sera donnée par l'équation à une inconnue

$$\varphi(a, b) = 0.$$

Généralement, on pourra demander que la tangente satisfasse à une condition exprimée par une relation de la forme

$$\psi(a, b) = 0.$$

On aura, pour déterminer a et b, les deux équations

$$\psi(a, b) = 0, \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

Deux conditions déterminent la tangente, ainsi que toute droite. Ce n'est que dans des cas particuliers qu'on pourra assujettir la tangente à satisfaire à plusieurs conditions à la fois, marquées par des équations de la forme

$$\psi(a, b) = 0, \quad \psi_1(a, b) = 0. \; . \; . \; . \; . \text{ outre } \varphi(a, b) = 0.$$

Il faudra que toutes ces équations admettent un certain nombre de solutions communes.

Cette manière de mener les tangentes à une courbe ne pourrait être regardée comme complétement satisfaisante, si elle ne faisait pas connaître la forme remarquable qu'est susceptible de prendre le coefficient angulaire de la tangente menée par un point donné sur la courbe. Or la détermination de ce coefficient angulaire peut se rattacher à la théorie des racines égales.

En effet, supposons d'abord que l'origine des coordonnées soit sur la courbe, et que ce soit par ce point qu'on veuille lui mener une tangente. L'équation de la courbe sera de la forme $\qquad Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \ldots\ldots = 0,$

et celle de la tangente $\qquad y = ax.$

Les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe seront données par l'équation

$$(B + Ca)x + (D + Ea + Fa^2)x^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Il faut actuellement exprimer que cette équation a des racines égales ; et l'on sait déjà que ces deux racines égales doivent être nulles. On a donc immédiatement

$$B + Ca = 0.$$

Du reste, en appliquant les procédés ordinaires, ils donnent le même résultat. En effet, la première méthode consiste à diviser $f(x)$ par $(x-\alpha)^2$, ici égal à x^2 à cause de la valeur connue $\alpha = 0$, et à égaler à zéro le reste $B + Ca$. La seconde méthode consiste à chercher le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$; et comme on sait d'ailleurs quel doit être ce plus grand commun diviseur, $x - \alpha = x$, cela revient à dire que $f'(x)$ ou $B + Ca + x(\ldots\ldots) + \ldots\ldots = 0$ admet une racine nulle, ce qui donne $B + Ca = 0$. Enfin, on a vu que le troisième procédé, dans le cas d'une racine double, est le même que le second.

Ainsi, on voit que la théorie des racines égales indique la condition

$$B + Ca = 0,$$

d'où $\quad a = -\dfrac{B}{C} = -\dfrac{f'\alpha}{f'\beta}$ (puisque l'on a $B\alpha + C\beta + \ldots = 0$).

Nous avons supposé que le point de la courbe par lequel on veut mener la tangente était à l'origine des coordonnées. Or, on peut toujours transporter l'origine au point par lequel on voudra mener la tangente. Ainsi, soit (α, β) ce point : il faudra substituer dans l'équation,

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y';$$

et l'on aura, comme on sait,

$$f(\alpha, \beta) + f'_\alpha x' + f'_\beta y' + \ldots = 0.$$

En appliquant la méthode qui précède, on aura encore

$$a = -\frac{f'_{\alpha}}{f'_{\epsilon}}.$$

Telle est donc la valeur générale du coefficient angulaire de la tangente, obtenue par un procédé qui se rattache à la théorie des racines égales.

La théorie des racines égales fournit encore le moyen de déterminer les points d'inflexion d'une courbe

$$f(x, y) = 0;$$

il suffit en effet d'exprimer que la droite MN,

$$y = ax + b,$$

a trois points communs infiniment voisins sur la courbe, ou que l'équation $\qquad f(x, ax + b) = 0$

a trois racines égales entre elles; et de même pour les cas de contact plus intime, où la courbe est coupée par la droite en un plus grand nombre de points. Mais il existe pour toutes ces déterminations des méthodes plus expéditives; ces méthodes ne doivent pas être exposées ici.

QUESTIONS

SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA,

PAR M. OSSIAN BONNET.

(Suite.)

—

IV.

PR. *Trouver dans la parabole la normale qui intercepte la plus petite aire.*

Sol. Soit $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole donnée. Désignons par $-m$ la tangente de l'angle que la normale cherchée fait avec l'axe des x ; l'équation de cette normale sera

$$y = -mx + \frac{p}{2}(m^3 + 2m),$$

et les points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe auront respectivement pour coordonnées

$$x' = \frac{pm^2}{2}, \quad y' = pm, \quad x'' = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2+2}{m}\right), \quad y'' = -p\,\frac{m^2+2}{m};$$

on en déduit aisément l'aire interceptée par la normale

$$S = \frac{p^2m^3}{3} + \frac{p^2m}{2} + \frac{p^2(m^2+2)^3}{3m^3} - \frac{p(m^2+2)}{2m}\left(\frac{p}{2}\,\frac{(m^2+2)^2}{m^2} - p - \frac{pm^2}{2}\right),$$

ou en simplifiant

$$S = \frac{2}{3}p^2\left(\frac{m^2+1}{m}\right)^3 = \frac{2}{3}p^2 \cdot \left(\frac{m^2+1}{(m^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^3.$$

Maintenant, d'après le théorème du § I, le minimum de cette aire aura lieu quand

$$m^2 + 1 = 2m^2, \quad \text{d'où} \quad m = \pm 1.$$

Ainsi la normale cherchée fait un angle de 45° avec l'axe des x ; pour cette normale, on a

$$x' = \frac{p}{2}, \quad y' = \pm p, \quad x'' = \frac{9p}{2}, \quad y'' = \mp 3p, \quad S = \frac{16}{3}p^2, \text{ etc.}$$

Si on calcule la portion de la normale comprise dans la courbe et le rayon de courbure correspondant au point x', y', on trouve successivement

$$\delta = 4p\sqrt{2}, \quad \rho = 2p\sqrt{2};$$

ce qui fait voir que la partie de la normale comprise dans la courbe est divisée en deux parties égales par son point de rencontre avec la développée ; on verrait aussi sans peine que si, par ce point de rencontre, on mène une parallèle à l'axe des x, on divise l'aire interceptée par la normale en deux parties égales, etc.

V.

Pr. *Trouver dans l'ellipse la normale qui intercepte la plus grande et par conséquent la plus petite aire.*

Sol. Soit $y^2 + b^2x^2 = b^2$ l'équation de l'ellipse proposée (nous faisons pour simplifier $a = 1$), et m la tangente de l'angle que la normale cherchée fait avec l'axe des x, l'équation de cette normale sera

$$y = mx - \frac{c^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}},$$

et les points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe auront respectivement pour coordonnées

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+b^2m^2}}, \quad y' = \frac{b^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}},$$

$$x'' = \frac{(1-2b^2)m^2 - b^2}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}}, \quad y'' = -\frac{(2-b^2+m^2)\,b^2m}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}}.$$

D'ailleurs l'aire interceptée par la normale

$$S = \frac{\pi ab}{2} \pm \left[\int_0^{x'} y'dx' - \int_0^{x''} y''dx'' - \frac{b^2x'y'}{2} - \frac{y''}{2}(c^2x' - x'')\right].$$

Pour que cette aire soit maximum ou minimum, il faut que sa différentielle soit nulle ce qui donne

$$2y'dx' - 2y''dx'' - b^2x'dy' - b^2y'dx' - c^2x'dy'' +$$
$$+ x''dy'' - c^2y''dx' + y''dx'' = 0,$$

ou

$$y'dx' - x'dy' + x''dy'' - y''dx'' +$$
$$+ c^2(y'dx' + x'dy' - x'dy'' - y''dx') = 0,$$

ou

$$-x'^2d.\frac{y'}{x'} + x''^2d.\frac{y''}{x''} + c^2d.x'(y' - y'') = 0,$$

d'où, en vertu des valeurs de x', y', x'', y'' écrites ci-dessus

$$-\frac{1}{1+b^2m^2}+\frac{(2b^2-1)m^4+2m^2(b^4-b^2+1)+b^2(2-b^2)}{(m^2+b^2)^2(1+b^2m^2)}-$$
$$-2c^2\,\frac{b^2m^6-(b^4-3b^2+1)m^4+(b^4-3b^2+1)m^2-b^2}{(m^2+b^2)^2(1+b^2m^2)^3}=0,$$

d'où
$$m^6+m^4-m^2-1=0.$$

Cette équation donne ± 1 pour valeurs admissibles de m.

Cela nous montre que dans l'ellipse comme dans la parabole la normale qui intercepte la plus petite aire fait un angle de 45° avec l'axe des x ; pour cette normale on a

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}},\quad y'=\pm\frac{b^2}{\sqrt{1+b^2}},\ \text{etc.},$$

la valeur de S n'offre rien de remarquable. Si on calcule la portion de la normale comprise dans la courbe et le rayon de courbure correspondant au point x', y', on trouve la portion de la normale double du rayon de courbure; ce qui montre que la portion de la normale comprise dans la courbure est divisée en deux parties égales par son point de rencontre avec la développée, etc.

VI.

Pr. *Déterminer dans la parabole la normale qui intercepte le plus petit arc.*

Sol. Soit $y^2=2px$ l'équation de la parabole. Considérons une de ses normales, et soient x', y' ; x'', $-y''$, les coordonnées des points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe. Soit enfin S l'arc intercepté sur la courbe, nous aurons

$$y'^2=2px',\quad y''^2=2px'',\quad y'+y''=-\frac{y'}{p}(x'-x''),$$
$$p\mathrm{S}=\int_0^{y'}\sqrt{p^2+y'^2}\,dy'+\int_0^{y''}\sqrt{p^2+y''^2}\,dy''.$$

Des deux premières équations on tire

$$x'-x''=\frac{y'^2-y''^2}{2p},$$

et portant dans la troisième

$$2p^2=y'(y''-y'). \qquad (1)$$

Maintenant pour que S soit minimum, il faut que sa différentielle soit nulle, ce qui donne

$$\sqrt{p^2+y'^2}\,dy'+\sqrt{p^2+y''^2}\,dy''=0, \qquad (2)$$

mais de l'équation (1) on tire

$$0=dy'(y''-y')+y'(dy''-dy'), \quad \text{d'où} \quad dy'=\frac{y'dy''}{2y'-y''},$$

portant dans (2) et supprimant dy'', il vient

$$y'\sqrt{y'^2+p^2}+(2y'-y'')\sqrt{p^2+y''^2}=0,$$

éliminant y'' entre cette équation et l'équation (1), on trouve

$$3y'^4-p^2y'^2-4p^4=0,$$

d'où

$$y'^2=\frac{4p^2}{3} \text{ et } y'=\pm\frac{2p}{\sqrt{3}},\ x'=\frac{2}{3}p,\ y''=\pm\frac{5p}{\sqrt{3}}\ \ x''=\frac{25}{6}p.$$

La valeur de S n'offre rien de remarquable. Si on calcule la portion de la normale comprise dans la courbe et le rayon de courbure correspondant au point x', y', on trouve successivement

$$\delta=\frac{7}{2}p\sqrt{\frac{7}{3}} \qquad \rho=\frac{7}{3}p\sqrt{\frac{7}{3}},$$

ce qui montre que la portion de la normale comprise dans la courbe est divisée par son point de rencontre avec la développée dans le rapport de 2 à 1, etc.

VII.

Pr. *Déterminer dans l'ellipse la normale à laquelle correspond le plus petit arc.*

Sol. Soit toujours $y^2+b^2x^2=b^2$ l'équation de l'ellipse donnée, et m la tangente de l'angle que la normale cherchée fait avec l'axe des x, de sorte que

$$y=mx-\frac{c^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}}$$

soit l'équation de cette normale, et

$$(1)\qquad x'=\frac{1}{\sqrt{1+b^2m^2}},\qquad y'=\frac{b^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}},$$

$$x''=\frac{(1-2b^2)m^2-b^2}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}},\qquad y''=-\frac{(2-b^2+m^2)b^2m}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}}$$

les coordonnées des points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe; nous devons avoir

$$\int_0^{x'}\sqrt{dx'^2+dy'^2}+\int_0^{x''}\sqrt{dx''^2+dy''^2}=\text{max. ou min.},$$

ce qui exige que la différentielle du premier membre soit nulle, ou que

$$\sqrt{dx'^2+dy'^2}+\sqrt{dx''^2+dy''^2}=0,$$

d'où $$dx'^2+dy'^2=dx''^2+dy''^2,$$

d'où $(dx'+dx'')(dx'-dx'')+(dy'+dy'')(dy'-dy'')=0$,

ou $d(x'+x'')\,d(x'-x'')+d(y'+y'')\,d(y'-y'')=0$,

substituant à $x'+x''$, $x'-x''$, $y'+y''$, $y'-y''$ les valeurs que l'on déduit des équations (1), on trouve sans difficulté

$$(m^6-b^2m^4-2m^2)\left(b^2m^4+b^2(3-b^2)m^2+b^4-2b^2+2\right)$$
$$+(2b^2m^4+m^2-b^2)\left\{(2b^4-2b^2+1)m^4+(3b^2-1)m^2+b^2\right\}=0,$$

ou en simplifiant et posant $m^2=u$

$$b^2u^5+b^2(4b^4-6b^2+5)u^4+(b^6+6b^4-8b^2+3)u^3-$$
$$-(3b^6-8b^4+6b^2+1)u^2-(5b^4-6b^2+4)u-b^4=0.$$

Cette équation admet pour racine -1, supprimant cette racine, qui est évidemment étrangère, il vient

$$b^2u^4+2b^2(2b^4-3b^2+2)u^3-3(b^6-4b^4+4b^2-1)u^2-$$
$$-2(2b^4-3b^2+2)u-b^4=0,$$

équation du quatrième degré qu'il ne me paraît pas facile de résoudre. On peut reconnaître pourtant qu'elle n'a qu'une racine réelle positive, que cette racine n'est ni entière ni fractionnaire, et qu'enfin elle ne correspond pas comme l'indiquerait l'analogie de la parabole, à la normale dont la partie intérieure à la courbe est divisée par le point de contact avec la développée dans le rapport de 2 à 3.

VIII.

Pr. *Parmi tous les triangles de même périmètre et de même surface, trouver celui dans lequel la distance entre les centres de gravité du périmètre et de la surface est maximum, et celui dans lequel la même distance est minimum.*

Sol. Soient a, b, c les trois côtés du triangle cherché ; appelons x, y, et x', y' les coordonnées respectives des centres de gravité de la surface et du périmètre de ce triangle, prises par rapport à deux de ses côtés a et b, par exemple, que nous supposerons faisant entre eux un angle θ.

Il s'agira de trouver a, b, c de manière que

$$(1)\qquad \Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta$$

soit maximum ou minimum, sachant que ces variables vérifient les conditions

$$(2)\qquad a+b+c=2p,\ p(p-a)(p-b)(p-c)=S^2,$$
$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b,$$

où les constantes $2p$ et S, qui représentent respectivement le périmètre et la surface du triangle cherché, sont supposées telles que $27S^2 \leqq p^4$, afin que ce triangle soit possible.

On déduit aisément du principe des moments

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3},\ x'=\frac{a(a+c)}{2(a+b+c)},\ y'=\frac{b(b+c)}{2(a+b+c)},$$

substituant ces valeurs dans l'égalité (1), il vient, en se rappelant que $\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$$(3)\qquad 144p^2S^2=a^2(2b-a-c)^2+b^2(2a-b-c)^2+$$
$$+(2b-a-c)(2a-b-c)(a^2+b^2-c^2)$$
$$=a^2(2b-a-c)(b+a-2c)+$$
$$+b^2(2c-a-b)(b+c-2a)+c^2(2a-b-c)(a+c-2b),$$

posons

$$(4)\qquad a=\frac{2}{3}p+x \qquad b=\frac{2}{3}p+y, \qquad c=\frac{2}{3}p+z,$$

les équations de condition (2) remplaceront par

$$(5)\ x+y+z=0,\ p(xy+xz+yz)-3xyz=\frac{27S^2-p^4}{9p}=-3k^3,$$

$$x>-\frac{2}{3}p,\ y>-\frac{2}{3}p,\ z>-\frac{2}{3}p$$

$$x<\frac{1}{3}p,\quad y<\frac{1}{3}p,\quad z<\frac{1}{3}p;$$

et l'équation (3) deviendra

$$144p^2\Delta^2=-(2p+3x)^2yz-(2p+3y)^2zx-(2p+3z)^2xy=$$
$$=-4p^2(xy+xz+yz)-36pxyz,$$

d'où

$$36p\Delta^2=-p(xy+xz+yz)-9xyz,$$

d'où, en ajoutant la seconde des équations (5), multipliée par 3,

$$36p\Delta^2+9k^3=-4p(xy+xz+yz).$$

Cela nous fait voir que les valeurs maximum ou minimum de Δ^2 et de $-(xy+xz+yz)$ ont lieu en même temps. Ainsi considérons la fonction $-(xy+xz+yz)$. Posons

$$(6)\qquad -(xy+xz+yz)=3m^2,$$

ce qui donne, d'après la seconde des équations (5),

$$xyz=k^3-pm^2\,;$$

l'équation dont les racines sont x, y, z sera

$$(7)\qquad u^3-3m^2u+pm^2-k^3=0,$$

et comme d'après les six dernières des conditions (5) x, y, z doivent être compris entre $-\frac{2}{3}p$ et $\frac{p}{3}$, l'équation (7) devra avoir ses racines réelles et toutes les trois comprises entre $-\frac{2}{3}p$ et $\frac{p}{3}$; exprimons que cela a lieu, et nous connaîtrons les limites de m.

A cet effet, j'applique le théorème de M. Sturm à l'équation dont il s'agit, je trouve pour la suite

$$\begin{aligned}
U &= u^3-3m^2u+pm^2-k^3,\\
U_1 &= u^2-m^2,\\
U_2 &= 2m^2u-pm^2+k^3,\\
U_3 &= 4m^6-(pm^2-k^3)^2\,;
\end{aligned}$$

je fais maintenant dans cette suite successivement

$$u=-\frac{2p}{3},\quad u=\frac{p}{3},$$

ce qui me donne pour $u=-\frac{2p}{3}$:

$$-\frac{8p^3}{27}+3pm^2-k^3,\ \frac{4p^2}{9}-m^2,\ -\frac{7}{3}pm^2+k^3,\ 4m^6-(pm^2-k^3)^2$$

pour $u=\frac{p}{3}$:

$$\frac{p^3}{27}-k^3,\quad \frac{p^2}{9}-m^2,\quad -\frac{1}{3}pm^2+k^3,\quad 4m^6-(pm^2-k^3)^2.$$

La première suite ne doit présenter que des variations, et la seconde que des permanences; j'ai donc

$$3pm^2 < k^3 + \frac{8p^3}{27}, \quad m^2 < \frac{4p^2}{9}, \quad \frac{7}{3}pm^2 > k^3,$$

$$4m^6 - (pm^2 - k^3)^2 > 0, \quad m^2 < \frac{p^2}{9}, \quad \frac{1}{3}pm^2 < k^3.$$

Je n'écris pas la relation $\frac{p^3}{27} - k^3 > 0$ qui est, on le voit aisément, une identité.

La seconde inégalité est inutile à cause de l'avant-dernière; la première et l'avant-dernière sont également inutiles à cause de la dernière; on peut donc ne considérer que les trois inégalités

$$m^2 > \frac{3k^3}{7p}, \quad 4m^6 - (pm^2 - k^3)^2 > 0, \quad m^2 < \frac{3k^3}{p}. \qquad (8)$$

la seconde de ces dernières peut se mettre sous une autre forme, elle revient d'abord à

$$(2m^3 - pm^2 + k^3)(2m^3 + pm^2 - k^3) > 0,$$

et puis à

$$(m^2 - \alpha^2)(m^2 - \alpha'^2)(m^2 - \alpha''^2) > 0, \qquad (9)$$

en appelant α, α', α'', les racines de l'équation

$$2m^3 - pm^2 + k^3 = 0.$$

Je fais remarquer, maintenant, que les racines α, α', α'', sont toutes trois réelles, que deux sont positives et une négative, et qu'enfin la racine négative est en valeur absolue la plus petite des trois. En effet si l'on substitue à m dans $2m^2 - pm^2 + k^3$, successivement $-\infty$, 0, $\frac{p}{3}$, ∞, on ne trouve que des variations; cela fait voir déjà que les trois racines sont réelles et qu'il y en a deux positives et une négative; puis si α'' est la racine négative, le troisième terme manquant dans l'équation, on a

$$\alpha''(\alpha+\alpha')+\alpha\alpha'=0, \quad \text{ou} \quad -\alpha''=\frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'},$$

d'où

$$-\alpha''-\alpha=-\frac{\alpha^2}{\alpha+\alpha'}, \quad \text{et} \quad -\alpha''-\alpha'=-\frac{\alpha'^2}{\alpha+\alpha'}.$$

Ce qui fait voir que α et α' sont plus grandes que la valeur absolue de α''.

Cela étant, si nous supposons $\alpha^2>\alpha'^2>\alpha''^2$, l'inégalité (9) revient à l'inégalité

$$m^2>\alpha^2, \tag{10}$$

ou aux deux inégalités

$$m^2<\alpha'^2, \quad m^2>\alpha''^2. \tag{11}$$

L'inégalité (10) est inadmissible, car m^2 doit être $<\frac{3k^3}{p}$ en vertu de la troisième des inégalités (8) et $\frac{3k^3}{p}$ est $<\alpha^2$, ainsi qu'on le reconnaît en substituant $\sqrt{\frac{3k^3}{p}}$ à m dans $2m^3-pm^2+k^3$; nous ne devons donc prendre que les deux inégalités (11). Je dis maintenant qu'à cause de ces deux dernières inégalités la première et la troisième des inégalités (8) sont inutiles; en effet si l'on substitue à m dans $2m^3-pm^2+k^3$ successivement $-\sqrt{\frac{3k^3}{7p}}$ et $\sqrt{\frac{3k^3}{p}}$, on trouve d'abord un résultat positif et puis un résultat négatif. Cela prouve que $-\sqrt{\frac{3k^3}{7p}}$ est $>\alpha''$, et que $\sqrt{\frac{3k^3}{p}}$ est $>\alpha'$, ou bien que $\frac{3k^3}{7p}$ est $<\alpha''^2$ et que $\frac{3k^3}{p}$ est $>\alpha'^2$, donc, etc. Ainsi nous n'avons, en définitive, qu'à satisfaire aux deux inégalités

$$m^2<\alpha'^2, \quad m^2>\alpha''^2.$$

Nous en conclurons que $m^2 = \alpha''^2$ est la plus petile valeur de m^2 et que $m^2 = \alpha'^2$ est la plus grande. Pour chacune de ces valeurs de m^2 l'équation (7) admet deux racines égales, donc pour les valeurs maximum et minimum de m^2 ou de Δ, deux des trois quantités x, y, z, et par conséquent deux des trois quantités a, b, c, sont égales, ainsi les triangles cherchés sont des triangles isocèles; de plus comme dans le cas de $x = y$, on a $x^2 = m^2$ en vertu de l'équation (6) et de la première des relations (5), on voit que le triangle isocèle pour lequel Δ est maximum, est celui qui a le plus grand côté double, et que le triangle isocèle pour lequel Δ est minimum est celui qui a le plus petit côté double. (*La fin prochainement.*)

QUADRATURE DE LA COURBE REPRÉSENTÉE PAR L'ÉQUATION

$$y^2 = x^3 - x^4.$$

PAR M. OSSIAN BONNET.

—

On peut aisément construire et discuter la courbe dont il s'agit. On reconnaît ainsi qu'elle est symétrique par rapport aux axes, qu'elle est comprise entre l'axe des y et une parallèle à cet axe menée à la distance 1, que son point le plus haut a pour coordonnées $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, qu'elle est tangente à la parallèle à l'axe des y menée à la distance 1, qu'elle a un point de rebroussement de première espèce à l'origine, qu'elle a une inflexion au point $x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, $y = \frac{1}{8}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$, etc.

Je me contenterai de faire remarquer une propriété qui conduit d'une manière élémentaire à la quadrature de la courbe.

Considérons le cercle représenté par l'équation

$$Y^2 = x - x^2$$

et retranchons d'une ordonnée positive quelconque de ce cercle l'ordonnée positive correspondante à la même abscisse de la courbe proposée, il viendra

$$Y - y = (1 - x)\sqrt{x(1-x)}$$

Or, le second membre n'est autre chose que la valeur de l'ordonnée de la courbe correspondante à l'abscisse $1 - x$; on conclut de là, par la méthode des infiniment petits, que l'espace compris entre l'axe des x et la partie de la courbe située au-dessus de cet axe est égal à l'espace compris entre cette même partie de la courbe et la demi-circonférence placée au-dessus, et par conséquent que l'aire de la courbe est moitié de celle du cercle, ou $\frac{\pi}{8}$.

NOTE SUR UN THÉORÈME D'ALGÈBRE ;

PAR ARCAS TRÉBERT (*).

On trouve à la page 468 du tome II de cet ouvrage une démonstration du théorème suivant, qu'on peut, ce me semble, présenter beaucoup plus simplement.

Théorème. A *et* B *sont deux nombres entiers et positifs, ayant plus de la moitié des chiffres à gauche en commun, et*

(*) M. Arcas Trébert nous a adressé un Mémoire qui sera publié dans notre prochain numéro.

$A > B$. *On a toujours* $A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}$ (p *étant entier et positif*).

Démonstration. On a identiquement

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} = x^{p-1} + yx^{p-2} + \ldots\ldots + y^{p-1},$$

et si $y < x$,

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} > py^{p-1}.$$

Posant $x^p = A$, $y^p = B$, on aura

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}\sqrt[p]{\frac{(A - B)^p}{B^{p-1}}}.$$

Soit k le nombre des chiffres de $A - B$, B aura au moins $2k + 1$ chiffres, donc

$$A - B < 10^k \text{ et } B > 10^{2k},$$

d'où $\quad \frac{(A - B)^p}{B^{p-1}} < \frac{10^{pk}}{10^{(2p-2)k}} < \frac{1}{10^{(p-2)k}} < -1,$

puisque p est au moins égal à 2.

Donc enfin $\qquad A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}$.

C. Q. F. D.

NOTE
SUR
LES CENTRES D'HOMOLOGIE.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

—

Soient dans un plan deux figures semblables, d'ailleurs quelconques, ABC.... et *abc*..., (*fig.* 11), dont les côtés soient parallèles et de même sens ; ou bien ABC.... et $a'b'c'$.... dont les côtés soient parallèles et de sens contraires.

On sait que les droites Aa, Bb, Cc, etc., ou Aa', Bb', Cc', etc., qui joignent deux à deux leurs points homologues, concourent en un même point I, situé sur le prolongement de ces droites dans la première hypothèse, et entre les points homologues considérés dans la seconde.

Ce point a été nommé centre de similitude ou d'homologie, direct dans le premier cas, inverse dans le second. Comme la théorie des centres d'homologie est encore peu répandue, nous croyons utile d'exposer ici quelques-unes des propriétés de ces centres qui ne nous paraissent pas suffisamment éclaircies.

Nommons d la distance de deux côtés homologues et parallèles des deux figures, X et x les distances du point I à ces droites, et $\frac{L}{l}$ le rapport d'homologie, l'on aura dans le premier cas

$$X = \frac{dL}{L - l} \text{ et } x = \frac{dl}{L - l},$$

et dans le second :

$$X = \frac{dL}{L + l} \text{ et } x = \frac{dl}{L + l}.$$

On voit par ces valeurs que si l'une des deux figures vient à se mouvoir parallèlement à elle-même dans le plan, de manière que la distance d demeure constante, le centre I se mouvra aussi sur une parallèle aux deux côtés homologues considérés, et pourra prendre sur cette parallèle telle position que l'on voudra.

D'ailleurs, si l'on fait varier d, la distance de cette parallèle à chacun des deux côtés homologues pourra devenir aussi grande et aussi petite que l'on voudra ; d'où il suit qu'il n'est pas de point du plan qui ne puisse être considéré comme le centre d'homologie de deux figures semblables et parallèles données placées convenablement dans ce plan.

Si l'on fait tourner l'un des deux systèmes *abc*..., je suppose, autour du point I, de sorte que chaque sommet décrive un arc de cercle du même nombre de degrés dont ce point soit le centre, alors les droites A*a*, B*b*, B*c*, etc. (*fig.* 12) ne passeront plus par le point I; mais le point I sera toujours, comme dans la première figure, le sommet commun des triangles semblables ayant pour bases les côtés ou lignes homologues AB et *ab*, AC et *ac*, BC et *bc*, etc.; il sera encore le point unique du plan où deux points homologues des deux systèmes seront confondus en un seul, et l'on aura les proportions suivantes :

$$\mathrm{IA} : \mathrm{I}a :: \mathrm{AB} : ab$$
$$\mathrm{IB} : \mathrm{I}b :: \mathrm{AB} : ab$$
$$\mathrm{IC} : \mathrm{I}c :: \mathrm{AB} : ab$$

Etc.

Réciproquement, si le point I est tel que deux des proportions précédentes aient lieu, il est facile de reconnaître que toutes les autres auront lieu également, et que par suite le point I sera le centre d'homologie des deux figures.

Supposons maintenant que la figure *abc*... tourne sur *ab* comme axe et vienne prendre, dans le plan, de l'autre côté de *ab*, la position symétrique *abc'*..., etc.

S'il existe un point K entre les droites AB et *ab*, tel que les triangles KAB, K*ab* soient semblables, les triangles KAC et K*ac*, KBC et K*bc'*, etc., le seront aussi, et l'on aura les proportions suivantes :

$$\mathrm{KA} : \mathrm{K}a :: \mathrm{AB} : ab$$
$$\mathrm{KB} : \mathrm{K}b :: \mathrm{AB} : ab$$
$$\mathrm{KC} : \mathrm{K}c' :: \mathrm{AB} : ab,$$

Etc.

C'est-à-dire que le point K sera le centre d'homologie par symétrie des polygones symétriquement semblables ABC... et abc'...

Cela posé, je vais démontrer que deux systèmes de points, directement, inversement ou symétriquement semblables dans un plan, qui ont deux droites données pour côtés homologues, ont toujours un centre d'homologie et ne peuvent en avoir qu'un seul, quelles que soient la grandeur et la position de ces droites dans le plan.

On sait que dans un plan le lieu des points dont les distances à deux points donnés A et B (*fig.* 13) sont dans le rapport donné de p à q, est une circonférence de cercle dont le centre, en supposant $p > q$, est au delà du point B, sur le prolongement de AB, et que si O est le centre de cette circonférence, et I le point où elle coupe AB, l'on a

$$\mathrm{OI} = \frac{\mathrm{AI} \times \mathrm{IB}}{\mathrm{AI} - \mathrm{IB}} \quad \text{et} \quad \mathrm{OB} = \frac{\mathrm{IB}^2}{\mathrm{AI} - \mathrm{IB}}.$$

En nommant l la longueur de AB, r le rayon du cercle et d la distance OB, les expressions précédentes deviennent

$$r = \frac{lpq}{p^2 - q^2}; \qquad d = \frac{lq^2}{p^2 - q^2}.$$

Soit maintenant un quadrilatère quelconque ABba (*fig.* 14) dont les côtés Aa, Bb se rencontrent en O.

Je dis que la circonférence, lieu des points dont les distances aux points A et a sont dans le rapport de AB:ab, et la circonférence, lieu des points dont les distances aux points B et b sont aussi dans le rapport de AB:ab, se coupent toujours.

En effet, soit K le centre de la première et L celui de la seconde; nommons p et q les deux côtés AB et ab, et soit $p > q$; désignons les distances OA, Oa, OB, Ob respectivement par α, α', β, β'; les rayons des deux circonférences par R et r, et les distances OK et OL par k et l, nous aurons d'abord

$$R = \frac{(\alpha - \alpha')pq}{p^2 - q^2} \quad \text{et} \quad r = \frac{(\beta - \beta')pq}{p^2 - q^2},$$

puis

$$aK = \frac{(\alpha - \alpha')q^2}{p^2 - q^2},$$

par suite

$$OK = k = \frac{\alpha'(p^2 - q^2) - (\alpha - \alpha')q^2}{p^2 - q^2},$$

ou réduisant

$$k = \frac{\alpha' p^2 - \alpha q^2}{p^2 - q^2};$$

de même

$$OL = l = \frac{\beta' p^2 - \beta q^2}{p^2 - q^2}.$$

Cela posé, appelons θ l'angle AOB et d la distance KL des deux centres. Le triangle OKL donnera

$$d^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta.$$

Il faut donc, si la proposition énoncée est vraie, que l'on ait à la fois

$$d < R + r \quad \text{et} \quad d > R - r,$$

ou, ce qui est l'équivalent, que l'on ait les deux inégalités suivantes :

$$k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta < (R + r)^2 \tag{1}$$
$$k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta > (R - r)^2. \tag{2}$$

Or

$$R + r = \frac{pq(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')}{p^2 - q^2}$$

et

$$R - r = \frac{pq(\alpha - \beta - \alpha' + \beta')}{p^2 - q^2}.$$

Remplaçons dans (1) les quantités k, l et $R+r$ par leurs valeurs, il viendra

$$(\alpha' p^2 - \alpha q^2)^2 + (\beta' p^2 - \beta q^2)^2 - 2(\alpha' p^2 - \alpha q^2)(\beta' p^2 - \beta q^2)\cos\theta$$
$$< p^2 q^2 (\alpha + \beta - \alpha' - \beta')^2 ; \qquad (3)$$

ou, développant et ordonnant,

$$p^4(\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta'\cos\theta) + q^4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta) - p^2q^2[2\alpha\alpha' +$$
$$+ 2\beta\beta' - 2(\alpha'\beta + \alpha\beta')\cos\theta] < p^2q^2[\alpha^2 + \beta'^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 -$$
$$- 2\alpha(\alpha' + \beta') - 2\beta(\alpha' + \beta') + 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta']. \qquad (4)$$

Remarquons que l'on a

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta$$
$$\text{et } q^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta'\cos\theta,$$

et que par suite le facteur p^2q^2 est commun à tous les termes. Alors en le supprimant et en remplaçant p^2 et q^2 par leurs valeurs, il viendra, en effaçant les termes communs aux deux membres et divisant par 2, l'expression suivante :

$$\cos\theta(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta') < -(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta'),$$

ou, en passant tout dans le premier membre,

$$(\cos\theta + 1)(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta') < 0. \qquad (5)$$

Or on passe de l'inégalité (1) à l'inégalité (2), en changeant le signe de r ; ce qui revient, en remontant à l'expression de cette quantité, à changer le signe de β et de β' dans le second membre de (4).

La seconde condition équivaut donc à

$$(\cos\theta - 1)(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta') > 0. \qquad (6)$$

Or quel que soit le signe de $\cos\theta$, $\cos\theta + 1$ est toujours positif et $\cos\theta - 1$ toujours négatif. Pour que les inégalités (5) et (6) soient satisfaites, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' > \alpha\beta' + \beta\alpha', \qquad (7)$$

ou bien que la somme

$$\text{aire OAB} + \text{aire O}ab > \text{aire OA}b + \text{aire OB}a.$$

ou, en supprimant 2 Oab communs aux deux membres, que

$$\mathrm{AB}b + ab\mathrm{A} > ab\mathrm{A} + ab\mathrm{B},$$

ou enfin que $$\mathrm{AB}b > ab\mathrm{B}.$$

Or cette dernière inégalité est manifeste. Donc les deux circonférences se coupent. Donc en revenant à la proposition primitive, quelle que soit la position des figures semblables directes, inverses ou symétriques, le centre d'homologie existe toujours. Mais les circonférences R et r se coupent en deux points, et nous avons vu que le centre cherché était unique pour les deux systèmes considérés. Ainsi l'un des deux points d'intersection trouvés, toujours facile à choisir d'après l'espèce de similitude donnée, conviendra seul à la question. L'autre sera lié au premier par les considérations que nous avons précédemment exposées.

Pour mettre cette dernière assertion hors de doute, examinons les cas particuliers où les deux systèmes sont parallèles.

Dans cette hypothèse, soient AB et ab (*fig.* 15) deux côtés homologues des deux figures. Prolongeons Aa et Bb jusqu'à leur rencontre en I. Tirons Ab et Ba qui se coupent en i, puis menons par les points I et i des parallèles $m'm''$, $m'''m^{\text{IV}}$ à AB, et par ces mêmes points les perpendiculaires IK, ik sur cette même droite. Les points I et i seront les centres d'homologie cherchés suivant que les deux systèmes auxquels appartiennent les lignes homologues AB et ab seront directs ou inverses.

Les points I et m', I et m'' seront conjugués harmoniques par rapport à Aa et Bb, et les points i et m''', i et m^{IV} le seront aussi par rapport à Ab et Ba. Les circonférences décrites sur Im' et Im'' comme diamètres se couperont en K, et celles décrites sur im''' et im^{IV} se couperont en k.

Donc, indépendamment des proportions

$$IA : Ia :: IB : Ib :: AB : ab$$
$$iA : ib :: iB : ia :: AB : ab,$$

on aura encore celles-ci :

$$KA : Ka :: KB : Kb :: AB : ab$$
$$kA : kb :: kB : ka :: AB : ab.$$

Donc les triangles KAB et Kab sont semblables, ainsi que les triangles IAB et Iab, et les triangles kAB et kab le sont aussi, de même que les triangles iAB et iab. Le point K a donc réellement, entre les droites AB et ab, la position analogue à celle du point I au-dessus de ces droites.

Il en est de même du point k relativement au point i. Les points I et K, i et k sont donc des centres d'homologie distincts correspondant aux diverses hypothèses que l'on peut faire sur le genre de similitude des systèmes auxquels appartiennent les côtés AB et ab. On conçoit que quoique nous n'ayons pris qu'un cas particulier, des considérations analogues auraient lieu dans le cas général.

1[er] *Corollaire*. Nommons C la première circonférence décrite du rayon R, ou sur Aa (*fig.* 14). Désignons par C′, C″, C‴, etc. les circonférences analogues décrites sur Bb, Cc, Dd, etc. : il suit de ce qui précède que C, C′, C″, C‴, etc. auront une corde commune, ou se couperont toutes aux mêmes points.

2[e] *Corollaire*. Si $p = q$, c'est-à-dire si les systèmes semblables deviennent égaux, les rayons R, R′, R″, etc. deviendront infinis; les circonférences C′, C″, C‴, etc. se changegeront en des droites perpendiculaires sur le milieu des droites Aa, Bb, Cc, etc.; d'où il suit que ces perpendiculaires iront toutes concourir en un même point.

3[e] *Corollaire*. Soient deux droites AN, AN′ (*fig.* 16) issues du point A et terminées à la droite OX. Faisons $N'n' = Nn$ et $n'H' = nA$. En conséquence du corollaire (2), les perpendiculaires sur les milieux des droites AH', nn', NN' se rencontreront en un même point. Si l'on fait tourner AN' sur le point A, et qu'on suppose les droites $N'n'$, $n'H'$ invariables de grandeur, quand le point N' se rapprochera du point N, le point n' décrira un arc de conchoïde. A la limite, ou quand les points N' et N se confondront, les points H' et A se confondront aussi. La droite nn' deviendra tangente à la courbe, et la perpendiculaire sur cette droite deviendra normale. Cette normale passe donc alors par le point de concours des perpendiculaires en N et en A sur les droites ON et NA. Ce qui fournit un moyen facile de mener par un point de la conchoïde une tangente à cette courbe.

DES RACINES INFINIES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

(Suite d'un premier article. Voy. t. III, pages 32... 40.)

4. Dans la discussion complète d'une équation à deux inconnues $F(x, y) = 0$, on peut aussi avoir à considérer des solutions composées d'une valeur infinie et réelle pour l'une des inconnues, y, et d'une valeur finie et réelle pour l'autre x.

Quand je dirai : l'équation proposée admet la solution $x = \alpha$, $y = \infty$ (α étant une quantité réelle et finie), voici ce qu'il faudra sous-entendre :

On peut donner à l'inconnue x une valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$, assez peu différente de α pour que l'autre inconnue y ait une valeur correspondante, β, plus grande que tout nombre déterminé δ ; et si l'on fait converger la valeur de x vers α, par la diminution progressive de h, la valeur correspondante de y ira continuellement en augmentant à partir de β.

C'est à ce genre de solutions que se rapporte, en définitive, la détermination des asymptotes rectilignes aux courbes algébriques.

Dans la recherche des solutions de la forme $x=\alpha, y=\infty$, j'ordonnerai l'équation proposée suivant les puissances décroissantes de y, en l'écrivant de cette manière :

$$Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0.$$

Je supposerai que A, B, C, etc. soient des fonctions entières de x, premières entre elles, et à coefficients numériques réels et finis. Aucune valeur substituée à x ne pourra annuler à la fois toutes les fonctions A, B, C, etc., puisqu'elles sont débarrassées de tout diviseur commun.

5. L'équation $Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0$ ne peut admettre la solution $x=\alpha, y=\infty$, qu'autant que la substitution de α à x annule le coefficient A du premier terme. Car si A ne se réduit pas à zéro, les racines de l'équation à une seule inconnue y, obtenue par la substitution dont il s'agit, ont évidemment une limite supérieure que l'on peut assigner. Ainsi, l'équation n'admet aucune solution de la forme indiquée, lorsque le coefficient A est indépendant de x; et il en est encore de même si, A contenant x, l'équation $A=0$ n'a aucune racine réelle.

Mais il n'en faut pas conclure que toute racine réelle α de $A=0$, donne à l'équation proposée la solution $x=\alpha, y=\infty$. Pour écarter cette conclusion, il suffira de prendre comme exemple les équations :

$$(x-1)^2y^4 + (x^2+1)y^2 + 1 = 0$$
$$(x-1)^2y^4 + (x^2+1)y^2 - 1 = 0.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de y de chacune de ces deux équations se réduit à zéro lorsque $x=1$; et, cependant, si l'on donne à x des valeurs plus grandes ou plus petites, aussi peu différentes de l'unité que l'on voudra, les valeurs correspondantes de y seront, dans la première équation, toujours imaginaires; et dans la seconde, toujours moindres que l'unité.

Pour reconnaître quelles sont les racines α réelles et finies de $A=0$, qui donnent à l'équation proposée $Ay^m+By^n+Cy^p+\ldots\ldots=0$, des solutions de la forme $x=\alpha$, $y=\infty$, je distinguerai deux cas : suivant que le nombre des racines de $A=0$, égales à α, est impair ou pair.

6. *Si l'équation* $A=0$ *a un nombre impair de racines égales au nombre* α *réel et fini, l'équation* $Ay^m+By^n+Cy^p+\ldots\ldots=0$ *admettra nécessairement la solution* $x=\alpha$, $y=\infty$.

C'est-à-dire que

1° En remplaçant x par $\alpha+h$ ou $\alpha-h$ (h étant un nombre réel suffisamment petit), l'équation à une seule inconnue $Ay^m+By^n+Cy^p+\ldots\ldots=0$, aura au moins une racine réelle plus grande que tout nombre donné δ.

2° Si l'on fait converger vers α la valeur $\alpha+h$, ou $\alpha-h$, substituée à x, la valeur correspondante de y ira toujours en augmentant.

Ce sont les deux points qu'il faut établir.

La valeur α qui, substituée à x, annule A, peut de même annuler quelques-uns des coefficients suivants B, C, etc.; mais tous ces coefficients ne sont pas à la fois réductibles à zéro : je nomme A′ le premier des coefficients que α n'annule pas; B′, C′, etc. ceux qui peuvent suivre A′; et h un nombre réel assez petit pour que l'équation $A'=0$ n'ait aucune racine comprise entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$. Et de plus, je suppose qu'en faisant varier x depuis $\alpha+h$ jusqu'à $\alpha-h$, la fonction A soit seulement réduite à zéro par $x=\alpha$.

D'après la notation indiquée, l'équation proposée est

$$Ay^m+By^n+\ldots\ldots+A'y^r+B'y^s+\ldots\ldots=0.$$

Afin d'apporter plus de précision dans l'examen des valeurs et des signes que prend le premier membre, lorsque x et y reçoivent différentes valeurs, je considérerai d'abord séparément chacun des deux polynômes $A'y^r + B'y^s + \ldots\ldots$, et $Ay^m + By^n +$ etc.

On peut donner à l'inconnue y une valeur y' assez grande pour que, en faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$, le polynôme $A'y^r + B'y^s +$ etc. ait constamment le signe de son premier terme $A'y^r$. En effet, soient a' la plus petite valeur que prend A', et M le maximum de B', C', etc., lorsque x varie depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$: il suffira, pour satisfaire à la condition énoncée, de remplacer y par un nombre y' au moins égal à $\frac{M}{a'} + 1$ (*). La même condition étant remplie par tout nombre plus grand que $\frac{M}{a'} + 1$, je supposerai y' au moins égal au nombre donné δ.

En substituant y' à y dans le second polynôme $Ay^m + By^n +$, etc., et faisant varier x depuis $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ jusqu'à α, on donnera à ce polynôme des valeurs absolues aussi petites que l'on voudra : car, lorsque $x = \alpha$, tous les coefficients A, B, ..., s'annulent à la fois (**). Pour des valeurs de h suffisamment petites, on aura toujours, en valeurs absolues, l'inégalité $Ay'^m + By'^n + \ldots < A'y'^r + B'y'^s + \ldots$ En effet, nommons N le minimum des valeurs de $A'y'^r + B'y'^s \ldots$, correspondantes aux valeurs de x comprises entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$, l'inégalité indiquée existera nécessairement

(*) Car toutes les équations à une seule inconnue, y, déterminées par la substitution des valeurs attribuées à x, auront leur premier terme plus grand que la somme de tous les autres termes, lorsqu'on y remplacera y par $\frac{M}{a'} + 1$, ou bien par une valeur plus grande. C'est un principe démontré dans tous les traités d'algèbre.

(**) Les fonctions A, B..., admettant le diviseur $x - \alpha$ à des puissances m', n', etc., prendront la forme $ah^{m'}$, $bh^{n'}$, etc., lorsqu'on y substituera $\alpha + h$ à x; c'est pourquoi le polynôme $Ay'^m + By'^n \ldots$ devient aussi petit que l'on veut, en donnant à h une valeur suffisamment petite.

dès que $Ay'^{m} + By'^{n} + \ldots$ deviendra moindre que N.

Enfin, je ferai encore observer qu'il est possible, en disposant convenablement du signe de h, de donner aux coefficients A et A' des signes contraires. Si, par exemple, les valeurs de x comprises entre $\alpha + h$ et α rendent ces deux coefficients positifs : pour les valeurs de x comprises entre $\alpha - h$ et α, le premier deviendra négatif et l'autre ne changera pas de signe; ils auront donc alors des signes contraires. La possibilité de satisfaire à cette dernière condition tient, comme on voit, à ce que l'équation $A = 0$, a un nombre impair de racines égales à α.

Cela posé, remplaçons y par y', et x par $\alpha \pm h$, dans le premier membre de l'équation $Ay^{m} + By^{n} + \ldots + A'y^{r} + B'y^{s} + \ldots = 0$. En disposant du signe et de la grandeur de h, comme nous venons de l'indiqner, les termes Ay'^{m}, $A'y'^{r}$ auront des signes contraires, et la valeur absolue du polynôme $Ay'^{m} + By'^{n} +$ etc., sera moindre que celle du polynôme $A'y'^{r} + B'y'^{s} +$ etc.; alors le premier membre de l'équation proposée aura un signe contraire à celui de son premier terme Ay^{m}.

Puis, sans rien changer à la valeur ni au signe de h, faisons croître y à partir de y', jusqu'à ce que le premier membre de l'équation prenne le signe de son premier terme, et conserve ce signe pour toute valeur plus grande de y. Par cette augmentation progressive de la variable y, le premier membre de l'équation s'annulera au moins une fois, puisqu'il change de signe dans l'intervalle des valeurs attribuées à y. Ainsi l'équation en y aura au moins une racine réelle 6 plus grande que y'. On peut d'ailleurs prendre, pour la valeur de 6, la plus grande des racines de l'équation. Donc,

1° En remplaçant x par $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ (h étant un nombre réel suffisamment petit) l'équation proposée $Ay^{m} + By^{n}$

$+$ etc., $= 0$, aura au moins une racine réelle, β, plus grande que le nombre donné δ.

Si plusieurs valeurs différentes de h correspondent à $y = \beta$, je prendrai pour h la plus petite de toutes. Ainsi $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ représentera, parmi les valeurs de x qui peuvent correspondre à $y = \beta$, celle qui diffère le moins de α. Alors, en faisant diminuer h, le polynôme $A\beta^m + B\beta^n + \ldots\ldots\ldots + A'\beta^r + B'\beta^s + \ldots$, qui était annulé, reprendra immédiatement le signe du terme $A'\beta^r$, pour $h' < h$, quelque petite que soit d'ailleurs la diminution de h (*). Et comme, en augmentant la valeur de y à partir de β, on pourra de nouveau donner au polynôme $Ay^m + By^n + \ldots + A'y^r + B'y^s + \ldots$, le signe de son premier terme Ay^m, l'équation admettra, pour $h' < h$, une racine $\beta' > \beta$. D'où je conclus que

2° Si l'on fait converger vers α, la valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ attribuée à x, la valeur cerrespondante de y ira toujours en augmentant.

Et, par conséquent, l'équation proposée admettra réellement la solution $x = \alpha$, $y = \infty$.

7. En général, l'équation proposée admettra toujours pour l'inconnue y une valeur infinie réelle, correspondante à la valeur réelle et finie α de l'autre inconnue x, qui annule le coefficient A de la plus haute puissance de y : lorsque, en attribuant à x une valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$, suffisamment rapprochée de α, il sera possible de donner des signes contraires au premier terme Ay^m de l'équation et au premier des termes $A'y^r$ dont le coefficient A' n'est pas annulé par la substitution de α à x (**).

(*) Si la substitution de h' à h donnait au polynôme un signe contraire à celui du terme $A'\beta^r$, il y aurait entre h' et 0 une valeur $h'' < h$ correspondante à $y = \beta$; car lorsque $h = 0$, le polynôme a évidemment le signe du terme $A'\beta^r$.

(**) Je ne veux pas dire que cette condition soit indispensable, elle est seulement suffisante. J'examinerai plus loin (n. 9) comment, lorsqu'elle n'est pas remplie, on peut reconnaître si la valeur de y correspondante à $x = \alpha$ est encore l'infini réel.

C'est là une conséquence évidente de la démonstration qui vient d'être donnée n° 6.

Que si nous avons considéré α comme une racine simple, ou d'un ordre de multiplicité impair, de l'équation $A=0$, c'est parce qu'il est alors toujours possible de faire prendre des signes contraires aux deux termes Ay^m, $A'y^r$, en disposant convenablement des signes de h et de y.

Dans chaque cas particulier, il sera facile de distinguer quels sont les signes de h et de y qui donnent aux deux termes Ay^m, $A'y^r$ des signes différents. Cette observation est utile pour la construction des courbes; j'en montrerai immédiatement l'utilité, en appliquant le principe du n° 6 à la recherche des asymptotes, parallèles à l'axe des ordonnées, d'une courbe algébrique.

8. Pour reconnaître si l'équation

$$Ay^m + By^n + \text{etc.} = 0$$

représente une courbe ayant une ou plusieurs asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées, il faut précisément savoir si cette équation admet des solutions de la forme $x=\alpha$, $y=\infty$, en définissant, comme nous l'avons fait, les solutions de cette forme; car à chacune de ces solutions correspond une branche de courbe qui a pour asymptote la droite $x=\alpha$; et réciproquement, à chacune des asymptotes, $x=\alpha$, parallèles à l'axe des ordonnées correspond une solution de la forme $x=\alpha$, $y=\infty$.

D'après cela, pour déterminer les asymptotes dont il s'agit, on cherche d'abord les racines réelles de l'équation à une seule inconnue $A=0$, et il reste ensuite à examiner si les valeurs de x ainsi obtenues donnent à y des valeurs réelles infinies.

Lorsque la racine obtenue α est simple ou multiple d'ordre impair, une des valeurs correspondantes de y est toujours réelle infinie (n° 6); donc l'équation proposée représente une courbe dont une branche au moins a pour asymptote la droite $x = \alpha$.

Afin que cette première donnée puisse servir à construire une partie de la courbe avec quelque précision, il faut encore savoir de quel côté de l'axe des abscisses et de la droite $x = \alpha$ les branches de la courbe deviennent asymptotes à cette droite.

A cet effet, je substitue à x la valeur α dans les coefficients successifs B, C, etc., jusqu'à ce que je parvienne à un terme $A'y^r$ dont le coefficient A' ne soit pas annulé par la substitution de α. Ce coefficient A' se réduira à un nombre r' dont le signe est déterminé.

Puis, après avoir divisé le coefficient A du premier terme Ay^m par la plus haute puissance de $x - \alpha$ qui entre comme facteur dans ce coefficient, je remplace encore x par α dans le quotient obtenu; il en résulte un nombre m' positif ou négatif.

Supposons d'abord que les deux nombres r', m' aient le même signe.

Les termes $A'y^r$, Ay^m prendront des signes contraires lorsqu'on fera varier x depuis $\alpha - h$ jusqu'à α, en donnant de plus à y des valeurs positives; par conséquent, la droite $x = \alpha$ sera asymptote à une branche de la courbe située du côté des ordonnées positives; et si α est positif, en laissant aux axes la disposition ordinaire, cette branche sera située à gauche de l'asymptote $x = \alpha$.

Lorsque les exposants r, n de y dans les termes $A'y^r$, Ay^m seront tous deux pairs ou tous deux impairs, ces termes prendront encore des signes contraires pour des valeurs négatives de y, les valeurs de x étant toujours comprises entre $\alpha - h$ et α. Ainsi, la droite $x = \alpha$ est encore asymptote à une branche de la courbe située au-dessous de l'axe des x; cette nouvelle branche sera, comme la première, dirigée à gauche de l'asymptote.

Mais si l'un des deux exposants r, n est pair et l'autre impair, en donnant à y des valeurs négatives, il faudra faire varier x depuis $\alpha+h$ jusqu'à α, pour que les termes Ay^m, $A'y^r$ prennent des signes contraires ; alors les deux branches sont situées de différents côtés de l'asymptote.

On déterminera de même la situation relative de la droite $x=\alpha$ et des branches auxquelles elle est asymptote, dans le cas particulier où les deux nombres r' et m' ont des signes contraires. G.

(*La fin prochainement.*)

QUESTION D'EXAMEN.

SOLUTION DE M. E. LIONNET,
Professeur de mathématiques au Collége royal de Louis-le-Grand.

—

Trouver le volume d'un segment sphérique à une base en fonction du rayon r *de la base du segment et de sa hauteur* h, *connaissant le volume de la sphère et sachant que la fonction demandée est entière par rapport aux quantités* r *et* h.

Soit ACB le demi-cercle générateur de la sphère, BD la hauteur du segment, CD le rayon de sa base et v son volume ; on aura

$$(1)\qquad v=Ah^3+Bh^2r+Chr^2+Dr^3,$$

A, B, C, D désignant des nombres constants qu'il s'agit de déterminer.

La droite CD étant une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre AB, on a la proportion

$$AD:CD::CD:BD,$$

d'où l'on tire $AD = \frac{\overline{CD}^2}{BD} r^2 h^{-1}$; mais la ligne AD est la hauteur d'un autre segment de même base que le premier ; donc, pour exprimer le volume v' de ce segment en fonction de r et h, il suffit de remplacer h par r^2h^{-1} dans le second membre de l'égalité (1), ce qui donne

$$v' = Ah^{-3}r^6 + Bh^{-2}r^5 + Ch^{-1}r^4 + Dr^3.$$

Pour exprimer le volume V de la sphère en fonction des mêmes quantités r et h, nous observons qu'on a $V = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^3$ et $AB = BD + AD = h + r^2h^{-1}$, d'où l'on déduit

$$V = \frac{\pi}{6}(h^3 + 3hr^2 + 3h^{-1}r^4 + h^{-3}r^6) ;$$

mais la sphère entière est égale à la somme des deux segments ; donc

$$\frac{\pi}{6}(h^3 + 3hr^2 + 3h^{-1}r^4 + h^{-3}r^6) =$$
$$= Ah^3 + Bh^2r + Chr^2 + 2Dr^3 + Ch^{-1}r^4 + Bh^{-2}r^5 + Ah^{-3}r^6.$$

Cette égalité ayant lieu pour des valeurs de r aussi petites qu'on voudra, lorsqu'on attribue à h des valeurs comprises entre AB et $\frac{1}{2}$ AB, les coefficients des même puissances de r sont égaux dans les deux membres ; donc

$$A = \frac{\pi}{6}, \qquad B = 0, \qquad C = \frac{\pi}{2}, \qquad D = 0,$$

et, par suite,

$$v = \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Développements sur plusieurs points de la théorie des perturbations des planètes ; par V.-J. Le Verrier. In-4 de 1 à 29, Bachelier 1841, n° 1.

Les corps célestes, dans leurs mouvements, à cause de leurs attractions mutuelles, ne suivent pas rigoureusement les lois du mouvement elliptique; ils s'en écartent par de petites quantités, nommées *inégalités*, dont les unes, dites périodiques, se reproduisent dans un petit nombre d'années, et les autres, dites *séculaires*, ne s'accomplissent qu'après un temps très-long. La détermination précise de ces *inégalités* est le point le plus épineux de l'astronomie calculatrice. C'est que l'intégration des équations du mouvement ne s'effectue qu'au moyen de séries, dont chaque terme est donné par une série; comment juger du degré de convergence de ces séries de séries? Bien plus, on n'obtient ces séries qu'en négligeant les puissances de certaines quantités moindres que l'unité; comment reconnaître le degré de la puissance qu'il est permis de négliger? Car ces quantités peuvent amener des coefficients diviseurs, qui, à raison même de leur petitesse, rendent les expressions qu'elles affectent très-grandes. M. Le Verrier, déjà avantageusement connu comme excellent calculatenr, indique dans ce mémoire une méthode d'interpolation pour déterminer ces coefficients, et la question est ramenée à la résolution d'un nombre $2i$ d'équations du premier degré à $2i$ inconnues; la méthode d'élimination est fort ingénieuse; nous nous en servirons en les modifiant convenablement, comme moyens d'exercice.

Id. n° 2, 31 à 62, 1842.

Dans le numéro précédent, on a développé une nouvelle méthode, celle d'interpolation, pour calculer les coefficieuts de la fonction perturbatrice; dans celui-ci, l'auteur discute l'ancienne méthode, et emploie un moyen indiqué par Legendre pour calculer les divers coefficients avec plus de précision et de facilité; il applique ces méthodes à la construction de nouvelles tables des quantités $b_s^{(i)}$ et de leurs dérivées, qui forment les termes de la fonction perturbatrice développée. Ces tables se rapportent à Mercure combiné avec Vénus, la Terre et les planètes supérieures, et à Vénus combinée avec la Terre et Mars. Dans ces applications, on adopte des données numériques différentes de celles qu'on trouve dans la *Mécanique céleste*. Choisissons Uranus.

	Mécan. céleste.	Le Verrier.	
Masse	$\frac{1}{19504}$	$\frac{1}{17918}$	, la masse du soleil

prise pour unité.

$\frac{1}{2}$ gr. axe de l'orbite 19,183305 19,182729, le $\frac{1}{2}$ gr. axe de la terre pour unité (*Méc. cél.*, t. III, p. 64.)

Il règne quelque dissentiment entre les astronomes calculateurs sur l'appréciation des divers termes de la fonction perturbatrice; et quand il s'agit de résultats numériques qui exigent un long travail, on ne peut en appeler à l'opinion publique, puisqu'il n'y a pas de public. Cependant, il est dans l'intérêt des progrès, qu'on sache à quoi s'en tenir. A cet effet, il serait très-utile d'élargir les attributions du Bureau des longitudes, et de l'élever au rang d'une espèce de tribunal mathématique. Des calculateurs de profession, attachés en nombre suffisant à ce tribunal, seraient chargés, sous la direction de juges si éminemment compétents, de vérifier toutes les tables importantes présentées par des géomètres, astronomes, physiciens, etc.; et aussi de la vérification de formules algébriques longues et compliquées, que l'on jugerait dignes d'intérêt. On aurait ainsi le moyen d'établir la confiance sur des bases assurées. Vingt calculateurs à deux mille francs par année suffiraient : que signifie une telle dépense, lorsqu'on consacre des centaines de mille francs à imprimer et à réimprimer des ouvrages que les éditeurs eux-mêmes ne lisent pas?

L'Académie des sciences, par cette institution, éviterait aussi le désagrément de couronner des ouvrages contenant des résultats faux.

Avant de finir, nous devons faire observer que M. Le Verrier ne manque jamais de fournir au lecteur les moyens de vérifier facilement ses calculs. Le contrôle est indispensable dans les opérations de ce genre, et doit inspirer un grand degré de confiance. Tm.

NOTE

SUR

L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

PAR E. CATALAN,
Répétiteur à l'École polytechnique.

J'ai donné, autrefois dans *le Géomètre* (*), et plus récemment dans le *Cours de Mathématiques* de M. *Blum*, un procédé fort simple servant à trouver *une solution* de l'équation du premier degré à deux inconnues. D'après la note de M. *Chevillard*, insérée dans le tome II de ce journal, il paraît que le procédé dont je parle est encore peu connu : je me décide donc à le publier de nouveau. On me pardonnera d'avoir cherché à propager cet algorithme, si je déclare, comme je l'ai déjà fait il y a treize ans, qu'il avait été indiqué depuis longtemps par M. *Pilatte*, dans les *Annales* de *Gergonne* (t. II, p. 230 en 1812).

1. Soit, pour plus de régularité dans la notation, l'équation

$$ay + bx = \mathrm{A}\ ; \qquad (1)$$

nous supposerons a, b, A entiers, a et b premiers entre eux, et $b < a$.

On déduit, de cette équation, $x = \frac{\mathrm{A} - ay}{b}$; ou, en appelant Q, q, B, c les quotients et les restes que fournissent A et a divisés par b,

$$x = \mathrm{Q} - qy + \frac{\mathrm{B} - cy}{b}.$$

(*) P. 177. Ce recueil hebdomadaire publié en 1836, par M. Guillard, ancien professeur au Collége Louis-le-Grand, a cessé de paraître, *pour défaut de timbre*, la même année.
Le tome premier s'arrête à la page 224. Tm.

Nous voulons que x et y soient entiers : nous devons donc attribuer à y une valeur qui rende entière la quantité $\frac{B-cy}{b}$. Autrement dit, la résolution de l'équation (1) est ramenée à la résolution, en nombres entiers, de

$$\frac{B-cy}{b}=z,$$

ou de

$$bz+cy=B, \tag{2}$$

laquelle est plus simple que la proposée ; car le coefficient c, reste de la division de a par b, est moindre que b.

Résolvons l'équation (2) par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient ; nous aurons

$$y=\frac{B-bz}{c}=Q'-q'z+\frac{C-dz}{c},$$

en représentant par Q' et q' les quotients entiers de B et b par c, et par C, d les restes correspondants. Répétant le raisonnement ci-dessus, nous verrons que z doit rendre entière la quantité $\frac{C-dz}{c}$, ou que l'équation (2) se réduit à celle-ci :

$$cr+dz=C, \tag{3}$$

dans laquelle les coefficients c et d sont respectivement moindres que b et c. A son tour, cette dernière équation en entraîne une plus simple qu'elle ; et ainsi de suite.

2. Observons actuellement que les coefficients c, d, e, ... sont les restes successifs que fournirait l'opération du plus grand commun diviseur effectuée sur a et b. Car c est le reste de la division de a par b ; de même, d est le reste de la division de b par c ; etc. Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux ; donc l'opération dont il s'agit conduira nécessairement à un dernier reste égal à l'unité. Ainsi la résolution

de l'équation (1) se réduira, en dernier lieu, à celle d'une équation de cette forme

$$u + gv = G,$$

c'est-à-dire dans laquelle le coefficient de l'une des deux inconnues sera l'unité. Or si l'on attribue à v une valeur entière quelconque, il en résultera pour u une valeur entière ; et, en remontant successivement, on finira par déterminer les valeurs entières correspondantes de x et de y.

3. On peut donner au calcul une marche régulière qui le simplifie considérablement.

Supposons

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{A - ay}{b},\ y = \dfrac{B - bz}{c},\ z = \dfrac{C - cr}{d},\ r = \dfrac{D - ds}{e}, \\[2ex] s = \dfrac{E - et}{f},\ t = \dfrac{F - fu}{g},\ u = \dfrac{G - gv}{h},\ \ldots\ldots \end{array}\right\} (4)$$

Dans ces expressions, les quantités c, d, e, f.... sont, ainsi que nous l'avons déjà dit, les restes successifs fournis par la recherche du plus grand commun diviseur entre a et b : admettons, pour fixer les idées, que le dernier de ces restes, égal à l'unité, soit h.

Relativement aux quantités B, C, D,.... la loi de composition est fort simple : B est le reste de la division de A par b ; C est le reste de la division de B par c ; etc.

Le calcul de ces divers coefficients s'effectue comme l'indique le tableau ci-après :

a	b	c	d	e	f	g	1
A	B	C	D	E	F	G	0

La ligne supérieure se forme comme dans l'opération du plus grand commun diviseur. Pour former la seconde ligne, on écrit A sous a, puis l'on divise ce premier terme par b ; on obtient ainsi un reste B, que l'on écrit au-dessous de b ; etc. En général : *chaque terme de la ligne inférieure est le reste de* *la division du terme placé à gauche, par le terme placé au-dessus.* Il est visible que le dernier terme, correspondant au diviseur 1, est 0.

Ces deux lignes étant calculées, on détermine les inconnues u, t, s, r, z, y, x en fonction de v, à l'aide des équations (4) ; c'est-à-dire que :

Chaque inconnue s'obtient en retranchant d'un terme de la seconde ligne, le produit du nombre écrit au-dessus par l'inconnue qu'on vient de déterminer, et divisant le reste par le terme écrit à la droite de ce nombre.

4. Comme application des règles précédentes, prenons l'équation

$$89x+162y=209.$$

162	89	73	16	9	7	2	1
209	31	31	15	6	6	0	0

D'abord, 162 divisé par 89 donne pour reste 73 ; 89 divisé par 73 donne pour reste 16 ; etc.

Ensuite, 209 divisé par 89 donne 31 pour reste ; 31 divisé par 73 donne encore 31 ; etc.

Les deux lignes étant formées, nous aurons, en prenant $v=0$:

$$u=\frac{0-2\times 0}{1}=0,\quad t=\frac{6-7\times 0}{2}=3,\quad s=\frac{6-9\times 3}{7}=-3,$$

$$r=\frac{15+16\times 3}{9}=7,\quad z=\frac{31-73\times 7}{16}=-30,$$

$$y=\frac{31+89\times 30}{73}=37,\quad x=\frac{209-162\times 37}{89}=-65.$$

L'équation est donc satisfaite par $x=-65$, $y=37$; d'où, en général,

$$x=-65+162\theta;\quad y=37-89\theta.$$

Soit encore l'équation

$$29x-47y=112.$$

Elle donne

$\frac{-47}{112}$	$\frac{29}{25}$	$\frac{-18}{7}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{-7}{0}$	$\frac{4}{0}$	$\frac{-3}{0}$	$\frac{1}{0}$

Puis,

$$\frac{0+3\times 0}{1}=0,\quad \frac{0-4\times 0}{-3}=0,\quad \frac{0+7\times 0}{4}=0,\quad \frac{7-11\times 0}{-7}=-1,$$

$$\frac{7-18\times 1}{11}=-1,\quad \frac{25+29\times 1}{-18}=-3,\quad \frac{112-47\times 3}{29}=-1\,;$$

donc

$$x=-1+49\theta,\quad y=-3+29\theta.$$

On peut observer, d'après ce dernier exemple, que si la ligne inférieure est terminée par une suite de zéros, il est bon de commencer le calcul des inconnues à partir du terme qui précède le dernier zéro.

DE LA SPHÈRE TANGENTE A QUATRE SPHÈRES DONNÉES;

PAR M. ARCAS TRÉBERT.

Le problème qui consiste à trouver une sphère tangente à quatre autres, a occupé nos plus célèbres géomètres : Fermat, Hachette, Poisson, MM. Gergonne, Binet et Cauchy en ont donné des solutions différentes. Toutefois ces solutions sont loin d'offrir toute la simplicité désirable : on va voir dans celle que nous allons donner quel avantage on peut retirer d'une notation symétrique et convenablement choisie.

I.

Soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

l'équation d'une sphère, que je représenterai, aussi pour abréger, par $S = 0$. J'appellerai *puissance* d'un point par rapport à la sphère, le carré de sa distance au centre moins le carré du rayon ; en sorte que S représente la puissance du point (x, y, z) par rapport à la sphère dont $S = 0$ est l'équation. Je représenterai par p^2 la puissance de l'origine, et l'on aura toujours

$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = p^2.$$

II.

Soient $S = 0$, $S' = 0$, les équations de deux sphères ; l'équation $S = S'$ est celle d'un plan qu'on appelle *plan radical* des deux sphères : ce plan est évidemment d'après la définition précédente, le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport aux deux sphères ; il est aussi le lieu géométrique des points communs aux deux sphères, lorsqu'elles se coupent, et dans tous les cas le lieu des points, d'où l'on peut leur mener deux tangentes égales.

La position de ce plan par rapport aux deux sphères ne dépend évidemment pas des axes coordonnés ; si donc on prend pour axe des z la droite qui joint leurs centres, l'équation $S = S'$ sera de la forme $z = h$, ce qui montre que le plan radical des deux sphères est perpendiculaire à la ligne des centres.

III.

Soient $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, les équations de trois sphères : les plans radicaux de ces trois sphères considérés deux à deux auront pour équation

$$S = S', \quad S = S'', \quad S' = S''.$$

Ces trois plans se coupent suivant une même droite dont les équations sont

$$S = S' = S'',$$

et qu'on appelle *axe radical* des trois sphères. Cet axe radical est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux trois sphères, il est d'ailleurs évidemment perpendiculaire au plan des trois centres.

Ce qui précède exige que les centres des trois sphères ne soient pas en ligne droite, car si cela était, les trois plans radicaux des sphères prises deux à deux seraient parallèles, et l'axe radical serait situé à l'infini, ou pour mieux dire n'existerait pas; néanmoins il pourrait arriver que ces trois plans coïncidassent, et dans ce cas les trois sphères auraient un plan radical, au lieu d'un axe radical.

On peut aisément construire le plan radical de deux sphères; mais je n'insisterai pas sur cette opération purement graphique.

IV.

Soient

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0, \quad S''' = 0;$$

les équations de quatre sphères. Les plans radicaux de ces sphères prises deux à deux auront pour équation

$$S = S', \quad S = S'', \quad S = S''', \quad S' = S'', \quad S' = S''', \quad S'' = S'''.$$

Ces six plans se couperont en un même point qui aura pour équations

$$S = S' = S'' = S'''.$$

C'est le point d'égale puissance par rapport aux quatre sphères, et qu'on appelle *centre radical* de ces sphères.

Ce point sera toujours unique, à moins que les quatre sphères n'aient leurs centres dans un même plan; dans ce cas il pourra arriver que le centre radical soit à l'infini, ce qui signifie qu'il n'existe plus, ou bien ce centre sera remplacé par un axe radical, ou même par un plan radical, si les centres des quatre sphères sont en ligne droite.

Dans le problème dont nous allons nous occuper, nous supposerons que les quatre centres ne sont pas dans un même plan, et alors les sphères auront toujours un centre radical unique.

V.

Soit toujours $S = 0$ l'équation d'une sphère, et (x', y', z') les coordonnées d'un point quelconque de l'espace; on sait que le plan polaire de ce point, par rapport à la sphère, a pour équation

$$(x'-a)(x-a)+(y'-b)(y-b)+(z'-c)(z-c)-r^2=0.$$

On sait en outre que

1° Si le point (x', y', z') est hors de la sphère, son plan polaire n'est autre que le plan des contacts de la sphère et des tangentes issues de ce point;

2° Si le point est sur la sphère, il est aussi sur son plan polaire qui est lui-même tangent à la sphère;

3° Si le point (x', y', z') est à l'intérieur de la sphère, son plan polaire est le lieu géométrique des sommets des cônes circonscrits à la sphère et dont les plans de contact avec cette dernière passent par ce point.

VI.

Soient les deux sphères $S=0$, $S'=0$; les centres de similitude direct et inverse de ces deux sphères auront respectivement pour équations

Centre direct. Centre inverse.

$$\left\{\begin{aligned} x-a &= \frac{r}{r-r'}(a'-a),\\ y-b &= \frac{r}{r-r'}(b'-b),\\ z-c &= \frac{r}{r-r'}(c'-c), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x-a &= \frac{r}{r+r'}(a'-a),\\ y-b &= \frac{r}{r+r'}(b'-b),\\ z-c &= \frac{r}{r+r'}(c'-c). \end{aligned}\right.$$

Les plans polaires de ces deux centres de similitude relativement à la sphère S auront respectivement pour équations

$$2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p^2-p'^2)=$$
$$=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r-r')^2,$$
$$2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p^2-p'^2)=$$
$$=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r+r')^2,$$

ou simplement

$$S'-S=\Delta(r,\ r'),$$
$$S'-S=\delta(r,\ r'),$$

en posant, pour abréger,

$$\Delta(r,\ r')=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r-r')^2,$$
$$\delta(r,\ r')=(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r+r')^2.$$

Les plans polaires des deux mêmes centres de similitude, relativement à la sphère S′ auront évidemment pour équations

$$S-S'=\Delta(r,\ r'),$$
$$S-S'=\delta(r,\ r').$$

Si les deux sphères étaient extérieures l'une à l'autre, les deux centres de similitude seraient les sommets de deux cônes circonscrits à la fois aux deux sphères, et les quantités désignées par $\Delta(r,\ r')$, $\delta(r,\ r')$ seraient les carrés des parties des arêtes de ces cônes comprises entre les deux sphères.

VII.

Théorème.

Le lieu géométrique des points de contact de l'une quelconque de trois sphères données avec toutes les sphères qui les touchent toutes trois, est un petit cercle de cette sphère, dont le plan est perpendiculaire au plan des centres des sphères données.

Il est bien entendu, dans cet énoncé, que l'une quelconque des trois sphères données doit être touchée de la même manière par toutes les sphères que l'on considère.

Considérons, pour fixer les idées, la série des sphères qui touchent extérieurement trois sphères données dont les équations seront comme d'habitude

$$S=0,\quad S'=0,\quad S''=0,$$

et désignons par (α, β, γ) les coordonnées du centre de l'une des sphères tangentes, par ρ son rayon et par x, y, z les coordonnées du point où elle touche la sphère S · on aura d'abord

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\rho+r}{r}x - \dfrac{\rho}{r}a, \\[2mm] \beta = \dfrac{\rho+r}{r}y - \dfrac{\rho}{r}b, \\[2mm] \gamma = \dfrac{\rho+r}{r}z - \dfrac{\rho}{r}c. \end{cases}$$

Puis

$$\begin{cases} (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-(r+\rho)^2=0, \\ (a'-\alpha)^2+(b'-\beta)^2+(c'-\gamma)^2-(r'+\rho)^2=0, \\ (a''-\alpha)^2+(b''-\beta)^2+(c''-\gamma)^2-(r''+\rho)^2=0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la soustraction

$$(2)\begin{cases} (a-a')\,\alpha+(b-b')\,\beta+(c-c')\,\gamma+(r-r')\rho-\frac{1}{2}(p^2-p'^2)=0, \\ (a-a'')\,\alpha+(b-b'')\,\beta+(c-c'')\,\gamma+(r-r'')\rho-\frac{1}{2}(p^2-p''^2)=0. \end{cases}$$

Portant dans les équations (2) les valeurs de α, β, γ tirées de (1), on aura

$$(\rho+r)\left\{2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p^2-p'^2)\right\}=\rho\Delta(r,r')$$

$$(\rho+r)\left\{2(a-a'')x+2(b-b'')y+2(c-c'')z-(p^2-p''^2)\right\}=\rho\Delta(r,r')$$

L'élimination de ρ entre ces deux équations conduit à la suivante

$$(3)\qquad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\frac{S''-S}{\Delta(r,r'')},$$

qui est bien l'équation d'un plan.

Il suit de là que les points de contact des trois sphères données avec la série des sphères qui les touchent extérieurement toutes trois seront sur trois plans ayant pour équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{S'-S}{\Delta(r,\ r')} &= \frac{S''-S}{\Delta(r,\ r'')}, \\ \frac{S''-S'}{\Delta(r',\ r'')} &= \frac{S''-S}{\Delta(r,\ r'')}, \\ \frac{S-S''}{\Delta(r,\ r'')} &= \frac{S'-S''}{\Delta(r',\ r'')}. \end{aligned}\right.$$

Ces trois plans se coupent évidemment suivant la droite

$$S = S' = S'',$$

qui est l'axe radical des trois sphères ; et comme cette droite est perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, il s'en suit que ces trois plans le seront pareillement.

Si l'une des sphères proposées, la sphère S, par exemple, devait être enveloppée par la série des sphères tangentes, il suffirait de changer le signe de r dans les équations (1) et (2), et par suite dans toutes celles que l'on en déduit ; ce qui revient évidemment à remplacer dans les équations (3), $\Delta(r,\ r')$ et $\Delta(r,\ r'')$ par $\delta(r,\ r')$ et $\delta(r,\ r'')$.

Si les trois sphères devaient être enveloppées par la série des sphères tangentes, il faudrait changer les signes de r, r', r'' ; ce qui ne produirait aucun changement dans les équations (3).

Il résulte de là que les équations (3) s'appliqueront à tous les cas, si l'on convient de remplacer la caractéristique Δ par δ, lorsque les sphères dont les rayons suivent la caractéristique doivent être touchées de manières différentes.

Dans tous les cas les plans ainsi déterminés passent toujours par l'axe radical des trois sphères.

VIII.

Problème.

Construire une sphère tangente à quatre sphères données.

Soient $S=0$, $S'=0$, $S''=0$, $S'''=0$ les équations des quatre sphères données, et supposons pour fixer les idées que la sphère cherchée doive toucher les quatre sphères données toutes extérieurement ou toutes intérieurement.

Les lieux des points de contact de la sphère S et des séries de sphères qui touchent extérieurement ou intérieurement cette sphère et deux des trois autres seront

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\dfrac{S''-S}{\Delta(r,r'')} \\ \dfrac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\dfrac{S'''-S}{\Delta(r,r''')} \\ \dfrac{S''-S}{\Delta(r,r'')}=\dfrac{S'''-S}{\Delta(r,r''')} \end{array}\right.$$

Ces trois plans se couperont suivant une même droite qui aura pour équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\frac{S''-S}{\Delta(r,r'')}=\frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')}.$$

Cette droite coupera la sphère S généralement en deux points : l'un d'eux sera le point de contact avec la sphère qui touche extérieurement les quatre proposées; l'autre, le point de contact avec la sphère qui les enveloppe toutes quatre.

La droite (1) serait assez difficile à construire à priori ; mais on peut trouver trois points fort remarquables de cette droite; ce qui est plus que suffisant pour la déterminer.

1° La droite (1) passe évidemment par le point $S=S'=S''=S'''$, qui est le centre radical des quatre sphères données.

2° Elle passe aussi par le point dont les équations sont

$$S' - S = \Delta(r, r'),$$
$$S'' - S = \Delta(r, r''),$$
$$S''' - S = \Delta(r, r''').$$

Ces trois équations représentent les plans polaires relativement à la sphère S, du centre de similitude directe de cette sphère prise avec chacune des trois autres.

L'intersection de ces trois plans faciles à construire donne donc un second point de la droite (1).

3° Enfin, cette droite passe encore par le point

$$(S - S') = \Delta(r, r'),$$
$$(S - S'') = \Delta(r, r''),$$
$$(S - S''') = \Delta(r, r''').$$

Ces trois équations, ainsi qu'on l'a dit précédemment, sont celles des plans polaires par rapport aux sphères S′, S″, S‴ des centres de similitude de ces sphères considérées séparément avec la sphère S.

Si la sphère S étant toujours touchée extérieurement, quelques-unes des trois autres devaient être enveloppées, nous avons vu que, pour ces dernières, il fallait remplacer la caractéristique Δ par δ; ce qui revient, comme on voit, à prendre le centre de similitude directe, si les deux sphères doivent être touchées de la même manière, et le centre de similitude inverse, si elles doivent être touchées différemment.

D'où résulte la construction suivante.

IX.

Construction.

Pour construire une sphère tangente à quatre sphères données, dont les centres ne sont pas dans un même plan, on cherchera les centres de similitude de chacune des quatre sphères avec chacune des trois autres, et on prendra chaque centre de similitude direct ou inverse, suivant que les deux sphères correspondantes devront être touchées de la même manière ou d'une manière différente ; on construira les plans polaires des trois centres de similitude ainsi déterminés correspondants à chaque sphère par rapport à cette sphère, et l'on obtiendra, dans chacune d'elles, un point que l'on joindra à leur centre radical. Les quatre droites ainsi obtenues couperont les quatre sphères en huit points ; quatre de ces points constitueront une solution du problème, et les quatre autres une solution parfaitement inverse de la première.

Si les centres des quatre sphères étaient dans un même plan, on ne pourrait plus appliquer la construction précédente ; il faudrait alors faire usage du troisième point que nous avons précédemment déterminé.

Note. Cette belle analyse peut également servir à trouver un cercle tangent à trois cercles donnés. M. Steiner s'est déjà servi du mot *puissance* pour désigner le produit constant de deux segments d'une sécante ou corde passant par ce point et coupant une circonférence donnée, et à l'aide de cette désignation commode, ce géomètre résout plusieurs problèmes de tangence, dont nous rendrons compte. On voit ici, par un nouvel exemple, combien est peu fondé le reproche souvent adressé à l'analyse, de fournir des constructions sans élégance et difficilement obtenues. C'est un instrument, comme tout autre, qu'il faut savoir manier. Voici, à ce sujet, une anecdote peu connue consignée dans un mémoire d'Euler intitulé : *Solutio problematis geometrici circà lunulas à circulis formatas* (Mém. de Pétersb., 1737). Le problème consiste en ceci : Étant donnés deux cercles qui se coupent de manière à former deux lunules ; soit O un point commun aux deux lunules ; A un point donné sur le petit arc de la première lunule, et a un point donné sur le petit arc de la seconde lunule ; il s'agit de trouver sur le grand arc de la première lunule un point b, et sur le grand arc de la seconde lunule un point B, tel qu'on ait $Ab = aB$; aire $AOb =$ aire BOa; l'aire AOb est le triangle mixtiligne formé par les arcs AO, Ob, et la droite bA.

Lorsque les carrés des rayons ont un rapport rationnel et pour certaine position des cercles, le problème a une solution algébrique; elle n'existe pas pour le cas général. Ce problème a été proposé à Bernoulli (D.), lors de son passage par Venise. Ayant trouvé une solution géométrique pour le cas particulier où Ab est parallèle à Ba, il l'adressa à Euler, en disant qu'il croyait, ainsi qu'il arrive souvent, que la question était intraitable par l'analyse, Euler rédigea alors le mémoire mentionné, attaqua le problème général par l'analyse, et, parvenu à une construction plus élégante que celle de Bernoulli, il ajoute cette réflexion : *Quod analysios incommodum, etiamsi in pluribus problematis geometricis allegari soleat, tamen mihi quidem non tam* analysi *quam* analystæ *imputandum videtur* (p. 207). Tm.

NOTE

SUR UNE QUESTION D'EXAMEN.

1. *Trouver sur la droite* AB, *qui unit deux points lumineux* A, B, *le point le moins éclairé par ces deux lumières.*

Soient a, b, les intensités des lumières A, B, à l'unité de distance; d la longueur de la droite AB; x la distance du point A à un point quelconque C de AB, situé entre A, B. La somme des intensités des lumières A, B, au point C, aura pour expression $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d-x)^2}$. Si l'on donne au point C toutes les positions qu'il peut avoir entre A et B, en faisant croître x depuis 0 jusqu'à d, la fonction $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$ infinie, d'abord, lorsque $x=0$, diminuera pour des valeurs croissantes de x jusqu'à une certaine limite à partir de laquelle la valeur de cette fonction ira en augmentant, puisqu'elle devient une nouvelle fois infinie, quand $x=d$. Il y a donc, entre A et B, un point D dont la distance x, au point A, rend minimum la fonction $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$. Le point D est de tous ceux de la droite AB, le moins éclairé par les deux lumières ; c'est le point cherché. On conçoit de plus, qu'en prolongeant la droite AB, dans les deux sens BY, AX, on pourra trouver sur ces prolongements BY, AX, deux autres point D', D'', pour lesquels la somme des intensités des lumières A, B, sera la même qu'au point D. Car, en faisant varier x depuis d jusqu'à l'infini, ou depuis 0 jusqu'à $-\infty$, la fonction qui exprime la somme des intensités des deux lumières passe par tous les états de grandeur, compris entre l'infini et zéro.

Pour déterminer la position du point D, on pourrait chercher directement la valeur de x comprise entre 0 et d, qui rend *minimum* la fonction fractionnaire $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$; mais on parvient au même résultat en traitant une question plus générale que la question proposée :

Trouver sur la droite AB indéfiniment prolongée, les points pour lesquels la somme des intensités des lumières A, B, est égale à une quantité donnée c.

Il est facile de prévoir que l'équation de ce dernier problème sera du quatrième degré. Supposez, en effet, que la quantité donnée c soit plus grande que le *minimum* m correspondant au point D. Il y aura alors sur la direction de la droite AB, quatre points C, C′, C″, C‴, satisfaisant à la condition proposée. Le premier, C, sera situé entre A et D ; le second, C′, entre D et B ; un troisième, C″, appartiendra au prolongement BY de AB ; et enfin le quatrième, C‴, se trouvera sur l'autre prolongement AX de AB. Ainsi, en comptant les distances positives x, dans le sens AB, l'équation aura trois racines positives (deux plus petites que d, et la troisième plus grande) et une racine négative.

Si la quantité c diminue progressivement pour devenir égale à m, les points C, C′, se rapprocheront du point D, et coïncideront avec ce dernier point, lorsque $c = m$. Les points C″, C‴, seront alors en D′, D″. Dans ce cas, l'équation du quatrième degré, aura deux racines AC, AC′, égales à AD. Si l'on suppose enfin $c < m$, les points C, C′, cesseront d'exister, l'équation aura deux racines imaginaires, et deux racines réelles AC″, AC‴ ; l'une d'elles sera positive, et l'autre négative. Et d'après cela, on voit que pour obtenir le minimum m et la distance AD correspondante, il suffit d'exprimer que l'équation a deux racines égales et de déterminer la valeur commune à ces deux racines.

L'équation du problème est : $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d-x)^2} = c.$

Posons $\frac{a}{b} = n$, $\frac{c}{b} = p$, $d = 1$, il viendra :

$$\frac{n}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = p, \quad \text{ou} \quad px^2(1-x)^2 - n(1-x)^2 - x^2 = 0.$$

Développant et ordonnant :

$$px^4 - 2px^3 + (p - n - 1)x^2 + 2nx - n = 0.$$

Je nomme α la racine double, β, δ, les deux autres racines, on a

$$(1) \qquad 2\alpha + \beta + \delta = 2,$$

$$(2)\qquad \alpha^2 + 2\alpha(\beta+\delta) + \beta\delta = \frac{p-n-1}{p},$$

$$(3)\qquad 2\alpha\beta\delta + \alpha^2(\beta+\delta) = -\frac{2n}{p},$$

$$(4)\qquad \alpha^2\beta\delta = -\frac{n}{p}.$$

Les égalités (1), (4) donnent

$$\beta+\delta = 2(1-\alpha),\ \delta\ \ = -\frac{n}{p\alpha^2}.$$

Substituant dans (3), on obtient

$$-\frac{2n}{p\alpha} + 2\alpha^2(1-\alpha) = -\frac{2n}{p},$$

d'où $$-n + p\alpha^3(1-\alpha) + n\alpha = 0,$$

et par suite $$(p\alpha^3 - n)(1-\alpha) = 0.$$

La racine double α devant être moindre que l'unité, on peut négliger le facteur $1-\alpha$; on a alors

$$p\alpha^3 - n = 0,\quad \alpha^3 = \frac{n}{p},\quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{n}{p}}.$$

Il reste à trouver la valeur de p.

Des égalités $\alpha^2\beta\delta = -\frac{n}{p}$, $\alpha^3 = \frac{n}{p}$, on tire immédiatement $\beta\delta = -\alpha$. D'ailleurs $\beta+\delta = 2(1-\alpha)$. Substituant ces valeurs de $\beta\delta$, $\beta+\delta$, dans l'égalité (2), il en résulte

$$\alpha^2 + 4\alpha(1-\alpha) - \alpha = \frac{p-n-1}{p};$$

d'où $$-3\alpha^2 + 3\alpha = 1 - \frac{n}{p} - \frac{1}{p} = 1 - \alpha^3 - \frac{1}{p};$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p} = 1 - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha = (1-\alpha)^3.$$

Cette dernière équation donne successivement

$$1 = \left(\sqrt[3]{p} - \alpha\sqrt[3]{p}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{n}\right)^3;$$

$$\sqrt[3]{p}=1+\sqrt[3]{n},\quad p=\left(1+\sqrt[3]{n}\right)^3.$$

La valeur correspondante de α est $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$.

En remplaçant p, n, par les valeurs $\dfrac{c}{b}$, $\dfrac{a}{b}$, dans les équations $p=\left(1+\sqrt[3]{n}\right)^3$, $\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$, on a :

$$c=\left[\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}\right]^3,\quad \alpha=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}.$$

La valeur de c montre que le minimum cherché est le cube de la somme des racines cubiques des intensités des deux lumières a, b. Et de la valeur de α, on conclut que pour obtenir le point D de la droite AB, le moins éclairé par les deux lumières, il faut partager cette droite en deux parties AD, DB, proportionnelles aux racines cubiques des intensités a, b, des deux lumières.

Les points D′, D″, seront déterminés par les valeurs de β, δ. Or, $\beta+\delta=2(1-\alpha)$, $\beta\delta=-\alpha$; donc

$$AD'=1-\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+\alpha},\quad AD''=\alpha-1+\sqrt{(1-\alpha)^2+\alpha}.$$

Pour montrer une application de ces formules, supposons que $a=1$, $b=8$. On aura

$$c=27,\quad AD=\frac{1}{3}.AB,\quad AD'=AB\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right),$$

$$AD''=AB\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right).$$

G.

Note I. Le problème est donc réduit à partager une droite en deux segments, dont les cubes soient dans un rapport donné. Pappus indique la solution *mécanique* suivante, d'une admirable simplicité (*livre III*, *prop.* 5) : soit BD une longueur donnée ; du point D comme centre et du rayon DB, on décrit une circonférence ; ADC est un diamètre perpendiculaire à DB ; entre B et D, on prend sur BD un point E tel qu'on ait $\frac{BE}{DE}$ = rapport donné entre les cubes ; on mène la corde CEF, rencontrant la circonférence en F ; et ensuite la corde AGHK, rencontrant CF en G ; BD en H et la circonférence en K, et de telle sorte que l'on ait $GH = HK$; alors on aura $\frac{BD^3}{HD^3} = \frac{BE}{ED}$ = au rapport donné. Nous engageons les élèves à chercher la démonstration qui ne présente pas de difficulté.

Le point K peut aussi s'obtenir par l'intersection du cercle et d'une hyperbole, d'après la propriété suivante de cette courbe : par le point M d'une hyperbole, on mène une parallèle à la première asymptote et une seconde parallèle à la seconde asymptote ; prolongez la première parallèle, jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la seconde asymptote ; par le milieu de MN, on mène une parallèle à la seconde asymptote, qui rencontre nécessairement la courbe en un point O ; si par O, on mène une corde quelque OPQR, dans l'hyperbole, coupant la seconde parallèle en P, la première parallèle en Q, la courbe en R, on a constamment $QP = QR$.

II. Cette solution qu'on doit à Pappus, pour la multiplication et la division du cube, renferme la célèbre duplication comme cas particulier. Les habitants de Delos, tourmentés de la peste, ayant consulté l'oracle de Delphes, obtinrent pour réponse que le dieu, pour faire cesser le fléau, demandait un autel en or semblable à l'autel existant qui était un cube, mais double de volume ; on s'adressa à des artistes, à des architectes sans pouvoir réussir ; enfin on eut recours à Platon, qui répondit qu'en faisant cette demande, le dieu n'avait pas pour but principal d'avoir un autel double ; mais qu'il voulait reprocher aux Grecs, leur négligence des études géométriques ; cette réponse de Platon, fait présumer que c'est lui ou un autre géomètre qui aura soufflé à la Pythie cet oracle qui donna un grand essor aux travaux sur les lignes courbes.

III. On peut être curieux de connaître le lieu des points du plan, où l'intensité de la lumière est un *maximum* ou un *minimum* sur un système de droites parallèles à AB. Conservant la même notation, prenant AB pour axe des x, A, pour origine des coordonnées rectangulaires ; z étant l'intensité de la lumière, au point x, y ; on a l'équation

$$z(x^2+y^2)\left[y^2+(d-x)^2\right]=(a+b)(x^2+y^2)+ad(d-2x). \quad (1)$$

Considérant y comme constante, x comme la variable indépendante, prenant la fonction prime de z et l'égalant à zéro, on obtient

$$z[(2x-d)(x^2+y^2-dx)]=bx+a(x-d); \quad (2)$$

éliminant z, il vient

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y^2)[y^2+x^2+d(d-2x)][bx+a(x-d)]=\\=(2x-d)(x^2+y^2-dx)[(a+b)(x^2+y^2+ad(d-2x)]=0.\end{array}\right\} (3)$$

L'équation (3) est du 5e degré ; les termes de cet ordre sont $(a+b)x(x^2+y^2)^2$. Ainsi l'axe des y, ayant pour équation $x=0$, est une asymptote, passant par l'origine et deux fois tangente à la courbe ; ce qui équivaut à cinq points d'intersection.

Les points A et B appartiennent à la courbe ; car l'équation est satifaite par $x=y=0$, et par $x=d, y=0$; en effet en ces points l'intensité est un maximum.

En faisant $y=0$, dans l'équation (1), il vient, après avoir ôté les diviseurs x et $d-x$ qui répondent aux points A et B et fait les réductions,

$$a(x-d)^3=-bx^3\,;\quad \text{d'où}\quad x=\frac{d\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}},$$

comme ci-dessus. La courbe a trois branches infinies passant par les points A, C, B; la première et la troisième renferment les *maxima*, et la seconde les *minima*. Les droites parallèles à l'axe des x, coupent la courbe en cinq points dont trois sont réels. Les droites parallèles à l'axe des y, rencontrent la courbe en quatre points, dont deux sont imaginaires, le cinquième est à l'infini.

IV. Soit en général une courbe donnée par l'équation bifocale $\varphi(z, z')=0$; z et z' sont les distances d'un point de la courbe aux deux foyers A et B. L'intensité de lumière en ce point est $\frac{a}{z^3}+\frac{b}{z'^3}$; pour que cette expression soit un maximum ou un minimum, il faut qu'on ait l'équation différentielle $\frac{adz}{z^3}+\frac{bdz'}{z'^3}=0$, (2); le rapport $\frac{dz}{dz'}$ est connu par l'équation de la courbe; on a donc deux équations entre z et z' qui font connaître les points de la courbe où la lumière est au maximum ou au minimum. Soit, par exemple, $pz+qz'=r$, l'équation bifocale de la courbe; on en tire $\frac{dz}{dz'}=-\frac{q}{p}$, et l'équation (2) donne $\frac{aq}{z^3}=\frac{bp}{z'^3}$; d'où $\frac{z}{z'}=\sqrt[3]{\frac{aq}{bp}}$; ce rapport est indépendant de r; donc en faisant varier le paramètre r, les points cherchés sur ces diverses courbes sont situés sur une circonférence.

Si $p=q=1$, la courbe est une ellipse, et l'on a $\frac{z}{z'}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; ainsi le problème traité ci-dessus est un cas particulier de l'ellipse; il suffit de poser $v=AB=d$; il se présente ici une difficulté, l'ellipse peut être de telle sorte que le rapport $\frac{z}{z'} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ y soit impossible; et cependant il doit toujours exister des points sur l'ellipse, où la lumière parvienne à sa plus grande ou à sa moindre intensité (*). Tm.

DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DE FOURIER.

PAR M. BONNET (OSSIAN).

Théorème. « Soit $X = 0$ une équation, et $X', X'', \ldots X^{(m)}$ les
» dérivées successives du premier membre: la différence
» entre le nombre des variations de la suite X, X', X'',....
» $X^{(m)}$ pour $x = \alpha$, et le nombre des variations de la même
» suite pour $x = \beta$, ne peut jamais être moindre que le
» nombre des racines réelles de l'équation proposée, com-
» prises entre α et β, et la différence quand elle existe, est
» toujours un nombre pair. »

Démonstration. Supposons le théorème vrai pour toute équation du degré $(m-1)$, et démontrons-le pour une équation de degré m; étant évident pour une équation du premier ou du second degré, il se trouvera ainsi démontré généralement. Soient n et n' les nombres respectifs des racines de la proposée et de la dérivée comprises entre α et β, V_α, V'_α les nombres des variations de la suite X, X', X'',... et de la suite X', X'',... pour $x=\alpha$, et V_β, V'_β les nombres des variations des deux mêmes suites pour $x = \beta$; nous aurons d'après l'hypothèse

$$V'_\alpha - V'_\beta = n' + 2k,$$

(*) Dans ce cas, le maximum est à une des extrémités du grand axe et le minimum à l'autre extrémité.

k étant au moins zéro, et d'après le théorème de Rolle,

$$n' - n = p,$$

p étant au moins -1. Supposons d'abord que p soit un nombre pair $2k'$, k' étant au moins zéro; dans ce cas les valeurs X_α, X_β que prend X quand on fait successivement $x=\alpha$, $x=\beta$, et les valeurs X'_α, X'_β que prend X' pour les mêmes hypothèses présenteront en même temps une permanence ou une variation, par conséquent les valeurs X_α, X'_α que prennent X et X' pour $x=\alpha$, et les valeurs X_β, X'_β que prennent X et X' pour $x=\beta$, présenteront aussi en même temps une permanence ou une variation, donc on aura

$$V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta = n' + 2k = n + 2k + 2k';$$

ce qui est conforme à l'énoncé du théorème.

Supposons ensuite que p soit un nombre impair. Dans ce cas $\frac{X_\alpha}{X_\beta}$ et $\frac{X'_\alpha}{X'_\beta}$, par conséquent $\frac{X_\alpha}{X'_\alpha}$ et $\frac{X_\beta}{X'_\beta}$, auront des signes contraires, donc on aura

$$V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta \pm 1 = n + 2k + p \pm 1;$$

si p est positif, cette égalité est conforme à l'énoncé; si p est négatif, il faut encore démontrer que ± 1 se réduit à $+1$, ou que $V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta + 1$, ou que X_α et X'_α forment une variation. En effet, dans le cas où p est négatif, et par conséquent -1, il ne peut se trouver qu'une racine de la dérivée entre deux racines consécutives quelconques de la proposée comprises entre α et β; comme aussi entre la plus petite de ces racines et α, et entre la plus grande de ces racines et β, il n'y a aucune racine de la dérivée. Cela étant, α doit comme un nombre très-voisin, mais au-dessus d'une racine, rendre X et X' de signes contraires.

Remarque. Pour la manière de compter les variations, lorsque les hypothèses $x=\alpha$, $x=\beta$, font évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite, et pour les conséquences du théorème, *Voyez* l'ouvrage de Fourier, ou l'Algèbre de M. Lefébure de Fourcy.

SOLUTION DE LA QUESTION 73 (t. II, p. 328).

PAR M. MATHIEU (AUGUSTE),
élève de mathématiques spéciales au collége Stanislas.

Un triangle rectangle ayant pour hypoténuse la corde d'une conique et pour sommet un point fixe dans le plan de la conique, l'enveloppe de l'hypoténuse est une seconde conique dont un des foyers est au point fixe.

Je prends pour axes des coordonnées, les parallèles aux axes principaux de la conique menées par le point fixe et l'équation de cette conique est

$$ay^2 + cx^2 + dy + ex + f = 0. \qquad (1)$$

Soit $y = mx + p$ (2) l'équation d'une sécante. Je vais chercher la relation qui doit exister entre m et p, pour que les droites qui joignent les points d'intersection de cette sécante avec la courbe à l'origine soient rectangulaires. Or si (x_1, y_1) (x_2, y_2) représentent les coordonnées de ces points d'intersection, on doit avoir, pour cela, $\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2}$, d'où $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ (3). Reste à exprimer les produits x_1x_2, y_1y_2, au moyen de m et p. Dans l'équation (1), je fais successivement $y = mx + p$, $x = \frac{y - p}{m}$, et il en résulte deux équations à une seule inconnue; l'une en x ayant pour racines les abscisses x_1, x_2, et l'autre en y ayant pour racines les ordonnées y_1, y_2. Ces équations sont

$$x^2(am^2 + c) + x(\ldots\ldots) + ap^2 + dp + f = 0\,,$$

$$y^2(am^2 + c) + y(\ldots\ldots) + cp^2 - emp + fm^2 = 0.$$

Les derniers termes de ces équations, divisés par am^2+c, sont les valeurs des produits x_1x_2, y_1y_2, et l'équation (3) se transforme dans la suivante :

$$p^2(a+c)+p(d-em)+f(1+m^2)=0. \tag{4}$$

Je considère actuellement les équations (2) et (4), et pour avoir le lieu cherché, je commence par éliminer p entre ces deux équations ; après quoi, j'éliminerai m entre l'équation finale en m et son équation dérivée. Or, de l'équation (2) je tire $p=y-mx$, et substituant dans l'équation (4), je trouve

$$m^2[x^2(a+c)+ex+f]-m[2xy(a+c)+dx+ey]+$$
$$+y^2(a+c)+dy+f=0,$$

dont la dérivée est

$$2m[x^2(a+c)+ex+f]-[2xy(a+c)+dx+ey]=0.$$

Tirant la valeur de m de cette dernière équation, et la portant dans la précédente, on trouve l'équation du lieu

$$[2xy(a+c)+dx+ey]^2-4[x^2(a+c)+ex+f]$$
$$[y^2(a+c+dy+f]=0.$$

Si on développe cette équation, les termes du quatrième et du troisième degré disparaissent, et il reste une équation du second degré,

$$y^2[e^2-4f(a+c)]+x^2[d^2-4f(a+c)]=4f^2+4fdy+4fex+2dexy.$$

Cette équation peut se mettre sous une autre forme, car si on ajoute $d^2y^2+e^2x^2$ aux deux membres, le second membre devient le carré de $dy+ex+2f$, et l'équation se transforme dans la suivante :

$$y^2+x^2=\frac{(dy+ex+2f)^2}{d^2+e^2-4f(a+c)}, \tag{5}$$

équation d'une conique dont l'origine est un foyer et dont la directrice voisine est la droite $dy+ex+2f=0$. Or, il est remarquable que cette droite est précisément la polaire de l'origine par rapport à la conique donnée. Les coordonnées du centre sont $y = \frac{-d}{2(a+c)}$, $x = \frac{-e}{2(a+c)}$, et la courbe est facile à construire avec ces données.

Le rapport constant de la distance d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, déduit de l'équation (5), est $\sqrt{\frac{d^2+e^2}{d^2+e^2-4f(a+c)}}$, sur quoi on remarquera que la nature de la conique varie avec le signe de $4f(a+c)$, et on établirait sur ce signe une discussion à laquelle je ne m'arrêterai pas. Je ferai toutefois remarquer que lorsqu'on a $a+c=0$, ce qui a lieu lorsque la conique donnée est une hyperbole équilatère, la conique trouvée est une parabole.

Lorsqu'on a $f=0$, ce qui a lieu lorsque le point donné est un point de la conique donnée, l'équation se réduit à $dx-ey=0$; ce qui est l'équation de la normale à la conique au point que l'on considère : cependant alors le lieu se réduit à un point unique situé sur cette normale. (*Nouv. Ann.*, t. II, p. 187.)

Soit $d=0$, $e=0$; l'équation se réduit à $y^2+x^2=\frac{-f}{a+c}$, ce qui est l'équation d'un cercle rapporté à son centre, si toutefois $\frac{-f}{a+c}$ est une quantité positive ; mais si $d=0$ et $e=0$, c'est que le point donné est le centre de la conique donnée. D'ailleurs, on sait que lorsqu'un lieu est engendré par les intersections successives d'une droite, la droite est tangente en chaque point à la courbe qu'elle engendre, on arrive donc à ce théorème : Le lieu des projections du centre d'une conique sur les cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres rectangulaires, est un cercle concentrique à cette conique.

Soient A et B les demi-axes principaux de la conique : dans le cas de l'ellipse, on aura $-f = A^2B^2$, $a = A^2$, $b = B^2$, et le rayon du cercle sera $\frac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}}$; dans le cas de l'hyperbole, on aura $-f = -A^2B^2$, $a = A^2$, $b = -B^2$, et le rayon du cercle sera $\frac{AB}{\sqrt{B^2-A^2}}$. Ce cercle n'existe donc pas lorsqu'on a $B < A$; et, en effet, alors l'angle des asymptotes étant plus petit que 90°, de deux diamètres rectangulaires, un seul peut rencontrer la courbe.

Note. M. Poncelet a découvert ce théorème, pour un angle quelconque, à l'aide de sa théorie sur les centres d'homologie (Propriétés projectives, p. 279). La belle démonstration de M. Mathieu ne s'applique qu'à l'angle droit. Il serait à désirer qu'on eût un procédé analytique analogue pour le cas général. Lorsque la conique donnée se réduit à deux droites, le théorème est le même que celui qu'on a énoncé t. II, p. 536; il fournit une description organique des coniques, due à Maclaurin. Si par les extrémités de la corde mobile, on mène deux tangentes à la conique donnée, le lieu de leur intersection est encore une conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée; théorème que M. Poncelet déduit aussi de la même théorie. Tm.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 80. (T. III, p. 40).

PAR M. GOUGIS (ÉLIE),
élève de mathématiques spéciales au collége Stanislas.

Une parabole ayant un foyer fixe et passant par un point fixe, le lieu du sommet est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence de même rayon.

Je prends pour origine des coordonnées, le foyer donné, et pour axes deux droites rectangulaires dont l'une, l'axe des x, passe par le point donné ; je désigne par q l'abscisse de ce point. L'équation d'une quelconque de ces paraboles, ayant pour foyer le point $x=0, y=0$, pourra se mettre sous la forme $x^2+y^2=(my+nx+p)^2$, avec la relation nécessaire

$$m^2+n^2=1, \qquad (1)$$

$my+nx+p$ étant la directrice de la parabole. Le sommet se trouvant à l'intersection de la courbe avec une perpendiculaire à la directrice menée par le foyer, les valeurs de x et de y, satisfaisant à la fois aux deux équations

$$x^2+y^2=(my+nx+p)^2, \qquad y=\frac{m}{n}x,$$

équation de l'axe de la courbe, seront les coordonnées du sommet. Si x_1 et y_1 sont ces coordonnées, on trouve aisément

$$x_1=-\frac{np}{2}, \quad (2) \qquad\qquad y_1=-\frac{mp}{2}. \quad (3)$$

De plus la courbe passant au point fixe, $x=0$, $x=q$, on aura la relation

$$q^2=(nq+p)^2=n^2q^2+2pnq+p^2. \qquad (4)$$

L'élimination de m, n, p, entre les équations (1), (2), (3) et (4), donnera la relation cherchée entre x_1 et y_1.

Les équations (2) et (3) élevées au carré, puis combinées avec la relation (1) donnent $\frac{p^2}{4}=x_1^2+y_1^2$. D'ailleurs de l'équation (2), on déduit $np=-2x_1$, $n^2=\frac{x_1^2}{x_1^2+y_1^2}$. Substituant ces valeurs dans l'équation (4), et réduisant autant que possible, on a pour équation du lieu

$$(y_1^2+x_1^2)^2-qx_1(x_1^2+y_1^2)-\frac{q^2}{4}y_1^2=0.$$

Or si l'on cherche l'équation d'une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence de même rayon, en prenant pour axes des coordonnées ceux qui se présentent spontanément, c'est-à-dire, deux droites rectangulaires se coupant au point qui décrit le lieu et qui est supposée commun aux deux circonférences, à l'origine du mouvement, l'une de ces droites, l'axe des x, étant diamètre du cercle fixe, on trouve pour équation de l'épicycloïde

$$(y^2+x^2)^2+4rx\,(x^2+y^2)-4r^2y^2=0,$$

r étant le rayon commun aux deux circonférences.

Cette équation devient identique avec la précédente, si l'on fait $q=-4r$. D'où l'on conclut que le lieu du sommet de la parabole est le lieu décrit par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence fixe et de même rayon ; le centre de la circonférence fixe étant situé au quart de la droite qui joint le foyer au point donné, à partir du foyer, et le foyer étant lui-même le point de la circonférence fixe qui sert d'origine au mouvement.

Démonstration géométrique de la même question (fig. 17).

F et P étant le foyer et le point donnés, je considère l'une des paraboles ayant pour foyer F et passant au point P. Soit DD′ sa directrice, et O le centre du cercle qui a pour diamètre $\frac{\mathrm{FP}}{2}$. Par le point O, je mène OB parallèle à l'axe, et au point B la tangente. Cette tangente divisera SF en deux parties égales. En effet, les triangles PFP′, et BOF étant isocèles et ayant un angle égal BOF=FPP′ sont semblables. Donc les trois points F, B, P′, sont en ligne droite; mais alors les triangles FBC, FP′A sont semblables et par conséquent $\frac{FC}{FA} = \frac{FB}{FP'}$. Mais la similitude des triangles BOF, FPP' donne $\frac{FB}{FP'} = \frac{FO}{FP} = \frac{1}{4}$.

Donc $CF = \frac{1}{4} FA$. Donc le point C est le milieu de FS. De là résulte l'égalité des triangles BSC, BCF.

Alors si je prolonge OB d'une quantité $O'B = OB$, et si je décris le cercle ayant O' pour centre et $O'B$ pour rayon, c'est-à-dire le cercle tangent au cercle O, ce cercle devra passer au point ρ; car les triangles O'BS, OBF sont égaux comme ayant un angle égal $O'BS = OBF$, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc $O'S = O'B = OB$. Mais alors les arcs BS, BF des cercles égaux O et O', sous-tendus par des cordes égales $BF = BS$ seront égaux. Donc le point S sera un point de l'épicycloïde. C. Q. F. D.

Note. M. Mesnard (A.), élève du collége Charlemagne, démontre le même theorème en prenant le point fixe pour origine, et cherchant d'abord le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les directrices; et de là, le lieu des sommets, qu'il compare au lieu connu des épicycloïdes.

M. Rispal, élève du collége de Rouen, fait usage des coordonnées polaires. Nous donnerons sa solution prochainement.

QUESTION DE PHYSIQUE (*Éc. normale*).

Théorie des vapeurs.

PAR M. MATHIEU DAURIAC,
Professeur de mathématiques.

Tout le monde sait que, lorsqu'un liquide est contenu dans un vase complétement fermé, il se forme une quantité de vapeur, de ce liquide, capable de saturer l'espace laissé libre, pour la température à laquelle se trouvent et le liquide et l'enceinte.—Si l'on vient, par un moyen quelconque, à élever la température, l'on sait encore que l'espace saturé primitivement ne l'est plus et qu'il est nécessaire pour le saturer de nouveau, qu'une seconde quantité de liquide passe à l'état de vapeur.—C'est le poids du liquide, vaporisé en second lieu, que je me propose de calculer; et comme ce poids n'est point le même dans toutes les circonstances, je distinguerai trois cas principaux :

I. On donne une sphère en cuivre mince, portant une tubulure que l'on peut hermétiquement fermer et qui sert à l'introduction d'un liquide donné, de l'eau, par exemple; la sphère ne contenant que de l'air sec, on y verse un volume donné d'eau et on la ferme. Au bout de quelque temps l'équilibre de température entre la sphère et l'eau étant établi, la saturation dans l'espace, différence des volumes de la sphère et du liquide, étant parfaite, l'on observe la température, qui est de t°; l'on chauffe alors la sphère et la température s'élève jusqu'à T°; par là une nouvelle saturation se produit et l'on demande le poids du liquide qui s'est vaporisé en second lieu.

II. La sphère est pleine d'air saturé de vapeur à la température initiale t°; on y verse un volume donné d'eau à t^e et on la ferme. La température de l'enceinte et de l'eau étant la même, la différence des volumes de la sphère et du liquide, se trouve saturée à t°, indépendamment de l'eau introduite. On porte la température à T°, et une nouvelle saturation se produit ici aux dépens, du liquide versé; l'on demande le poids de l'eau qui s'est vaporisée.

III. La sphère est pleine d'air à un certain état hygrométrique, on y verse de l'eau et on ferme, la température est t°; la différence des volumes de la sphère et du liquide se sature bientôt de vapeur pour cette température. Alors on chauffe jusqu'à la température T° ; et une nouvelle saturation ayant lieu, on demande le poids du liquide qui s'est vaporisé, dans le passage de la température t à la température T.

Les énoncés de ces trois problèmes étant ainsi posés, je vais m'occuper de leur résolution ; et d'abord du premier, parce que la marche à suivre sera la même pour les deuxième et troisième, et qu'il présente moins de difficultés.

I.

1° Le volume de la sphère étant représenté par V_1 à 0°, il s'ensuit qu'à T°, ce volume devient $V_1(1+kT)$, k étant le coefficient de dilatation cubique du cuivre pour chaque degré centigrade. De même à t°, ce volume devient $V_1(1+kt)$.

2° Le volume de l'eau renfermée dans la sphère étant représenté par V_0 à 4°, 1 ; ce volume devient $V_0(1+\lambda)$ à la température T° ; λ exprimant l'accroissement de l'unité de volume de l'eau, prise à son maximum de densité, pour la température T°. De même $V_0(1+\lambda')$ exprimera ce volume à t°.

3° Cela posé, le volume de l'eau qui se réduira en vapeur, sera celui qui est capable de saturer l'espace $N = V_1(1+kT) - V_0(1+\lambda)$; *plus* le volume de l'eau qui devra saturer l'espace occupé par cette eau qui vient de se vaporiser ; *plus* le volume de l'eau capable de saturer le nouvel espace, laissé libre par l'eau qui s'est vaporisée en second lieu, et ainsi de suite à l'infini ; *moins* le volume de l'eau qui saturait de vapeur l'espace $N' = V_1(1+kt) - V_0(1+\lambda')$ à la température initiale t ; volume que j'estimerai comme je viens de le dire pour celui qui sature N à la température finale T.

Nommant donc xv, le volume de l'eau qui doit saturer de vapeur l'espace N ; je trouve pour son expression, $x^v = \frac{N}{m}$, en appelant m, le volume de vapeur que donne un centimètre cube d'eau distillée, prise à 4°,1 et portée à T° ; il est facile de voir que j'obtiens cette expression en me servant de la loi de Dalton ; *les quantités de vapeur émises par un même liquide dans les mêmes circonstances sont proportionnelles aux espaces à saturer*.

Actuellement, si je nomme x'_v la quantité d'eau en volume qui sature de vapeurs à T°, l'espace x_v, je trouve par les mêmes considérations $x'_v = \frac{x_v}{m}$ ou bien $x'_v = \frac{N}{m^2}$. Les expressions x''_v, x'''_v... $x_{\mu v}$.... sont toutes de la même forme, chacune d'elles est égale à la précédente divisée par m, ce qui, en remplaçant la précédente par sa valeur, donne une suite de fractions dont le numérateur est le même N, et dont les dénominateurs sont les diverses puissances de m. On voit donc que la valeur de X_v, c'est-à-dire le volume de l'eau à 4°,1, qui sature à T° l'espace N de vapeur, est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le premier terme est x_v et la raison $\frac{1}{m}$, son expression sera donc

$$(1) \qquad X_v = \frac{\left(\frac{N}{m}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{N}{m-1}.$$

4° En suivant la même marche, il est évident que l'expression du volume d'eau à 4°,1, qui doit, étant porté à $t°$, saturer de vapeur l'espace N', sera identiquement de même forme et donnera

$$(2) \qquad X'_v = \frac{N'}{m'-1}.$$

5° En retranchant de la première expression la deuxième, on trouve

$$Q = X_v - X'_v = \frac{N(m'-1) - N'(m-1)}{(m-1)(m'-1)},$$

pour l'expression du volume d'eau, à son maximum de densité, qui sature de vapeur la sphère, lorsque la température de t^o devient T^o.

Pour passer de cette expression du volume à celle du poids, on n'a qu'à multiplier ce volume par la densité de l'eau à 4°,1, que j'égale à l'unité. Donc, la formule précédente exprime aussi le poids du volume d'eau qui sature de vapeur la sphère, lorsque cette eau passe de la température t à la température T.

II.

1° Dans ce second cas, lorsqu'on verse l'eau à t^o, la sphère se trouve déjà pleine d'air saturé de vapeur à cette température, par conséquent à mesure que l'eau s'introduit, un volume d'air, égal au sien, s'échappe en emportant sa vapeur, de telle sorte que, lorsque toute l'eau est versée et au moment où l'on ferme la sphère, il ne reste plus dans l'espace laissé libre que de l'air à la pression barométrique de l'air extérieur, et à la température ambiante, mais parfaitement saturé à cette température. Dès lors le poids de vapeur, qui saturera la différence des volumes, est indépendant du volume d'eau introduit et, d'après la loi de Dalton, est proportionnel à cet espace; on a donc pour son expression

$$X'_v = \frac{N'}{m'}.$$

2° Actuellement la quantité de vapeur qui saturera l'espace N, sera celle qui le saturerait à T^o, moins celle qui le saturait déjà à t^o.

Or, si l'on suppose qu'une couche mince de liquide, se produise spontanément en vapeur, et en quantité suffisante pour saturer à T^o l'espace N, supposé sec, en laissant la place, occupée précédemment par cette couche, complètement vide ; l'expression de son poids sera $p = \frac{N}{m}$. Par conséquent la quantité d'eau, prise sur l'eau introduite, qui sature de vapeur l'espace N, est

$$x_v = \frac{N}{m} - \frac{N'}{m'} = \frac{Nm' - N'm}{mm'}.$$

Maintenant il ne reste plus qu'à saturer l'espace laissé libre par la couche mince d'eau qui s'est vaporisée ; mais son expression est, comme nous le savons déjà $x'_v = \frac{x_v}{m}$. La quantité qui saturerait l'espace laissé libre par cette nouvelle couche d'eau vaporisée est $x''_v = \frac{x'_v}{m}$, et ainsi de suite à l'infini. De telle sorte que les expressions x_v, x'_v, x''_v ... x^{μ}_v ...., sont toutes de même forme et constituent une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le premier terme est x_v, et la raison $\frac{1}{m}$. En en faisant la somme, on aurait donc

$$Q = \frac{\left(\frac{Nm' - N'm}{mm'}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{Nm' - N'm}{m'(m-1)}.$$

Pour le poids de l'eau qui s'est vaporisée pour saturer à T°, la sphère, de vapeur.

III.

1° La sphère étant pleine d'air à un état hygrométrique marqué par α degrés de l'hygromètre de Saussure et à une température $t°$, l'on verse le volume donné d'eau et l'on ferme, de sorte qu'il ne reste plus dans la différence des volumes de la sphère et de l'eau, que de l'air dans les conditions indiquées.

Le volume à saturer d'abord à $t°$ est N', et la quantité de vapeur qui devra saturer cet espace est celle qui le saturerait s'il était parfaitement sec, moins l'eau hygrométrique, existant déjà dans la sphère.

Or, si l'on cherche dans la table des *tensions de la vapeur d'eau correspondantes à chaque degré de l'hygromètre*, table construite par M. Biot, sur les données expérimentales de M. Gay-Lussac, la tension a correspondante à α degrés; *les quantités de vapeur renfermées dans le même espace et à la même température étant entre elles comme les tensions*, il s'ensuit que a peut représenter en même temps que la tension de la vapeur, la quantité de vapeur qui aurait cette tension et qui serait contenue dans l'unité de volume, en appelant 100 le poids de vapeur qui le saturerait. Par conséquent la quantité de vapeur qui se trouve dans un espace donné est les $\frac{a}{100}$ de celle qui le saturerait à la température indiquée.

Cela posé : le poids de vapeur qui sature à t° l'espace N', est $q = \frac{N'}{m'}$; et celui qui se trouve dans N' lorsque l'hygromètre marque α degrés, est $q' = \frac{aq}{100} = \frac{aN'}{100m'}$; de là on tire

$$\gamma = q - q' = \frac{N'(100 - a)}{100m'},$$

pour le poids de vapeur qui saturerait à t° l'espace N', si l'eau en se vaporisant n'avait laissé un nouvel espace à saturer; or ici, comme dans le cas précédent, la couche d'eau qui s'est vaporisée a laissé sa place parfaitement vide et sèche, donc la quantité de vapeur qui saturera cet espace lui est proportionnel et est exprimé par

$$\gamma' = \frac{\gamma}{m'} = \frac{N'(100 - a)}{100m'^2};$$

le poids de vapeur qui saturerait ce nouvel espace γ', laissé libre, serait de même forme et égal à

$$\gamma'' = \frac{\gamma'}{m'} = \frac{N'(100 - a)}{100m'^3};$$

et ainsi de suite à l'infini. Il est aisé de voir que là encore, le poids de vapeur qui saturera à t° la différence des volumes de la sphère et de l'eau, est la somme d'une progression géométrique dont le premier terme est γ et la raison $\frac{1}{m'}$, et que l'expression de ce poids est

$$X'_v = \frac{N'(100 - a)}{100(m' - 1)}.$$

2° Actuellement, la sphère étant toujours pleine d'air contenant de la vapeur d'eau, si l'on y introduit le volume donné d'eau, que l'on ferme et que l'on recherche le poids de vapeur qui saturerait à T° la différence des volumes de la sphère prise à 0°, et de l'eau prise à 4°,1, en ne tenant pas compte pour un moment, des espaces successifs laissés libres par l'eau qui se vaporise, on trouve en appelant N l'espace à saturer et q' le poids d'eau hygrométrique existant déjà dans N,

$$x_v = \frac{N}{m} - q' = \frac{100Nm' - aN'm}{100mm'}.$$

Mais si l'on tient compte des diverses quantités d'eau qui se sont vaporisées pour saturer les espaces x_v, x'_v, x''_v, x'''_v, ... x^{ν}_v ....., il est facile de voir que ces quantités sont les divers termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont x_v est le premier terme et $\frac{1}{m}$ la raison, et que la somme de tous ces termes représente la quantité de vapeur qui sature l'espace N à T°. En faisant donc cette somme, on aura :

$$X_v = \frac{\left(\frac{100Nm' - aN'm}{100mm'}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{100Nm' - aN'm}{100m'(m-1)}.$$

Or, il est évident que X_v est trop grand de la quantité X'_v de vapeur qui saturerait l'espace N' à $t°$; faisant la soustraction, on obtient l'expression

$$Q = X_v - X'_v =$$
$$= \frac{100Nm'(m'-1) - aN'm(m'-1) - N'm'(m'-1)(100-a)}{100m'(m'-1)(m-1)},$$

pour le poids de vapeur qui sature la différence des volumes de la sphère et de l'eau, lorsqu'on porte la température de $t°$ à $T°$, cette différence de volumes étant remplie d'air à un état hygrométrique marqué par a degrés.

Ce cas est, comme on vient de le voir, le plus général; il présente aussi la formule la plus compliquée, mais qui a l'avantage de renfermer celles de I et de II. En effet, pour passer de ce cas-ci au I, on n'a qu'à supposer l'air parfaitement sec, et par conséquent à égaler à zéro a, alors :

$$Q = \frac{100Nm'(m'-1) - N'm'(m-1)100}{100m'(m'-1)(m-1)} = \frac{N(m'-1) - N'(m-1)}{(m'-1)(m-1)};$$

ce qui est bien la première formule

Si, au contraire, on fait $a = 100$; ce qui suppose l'espace saturé déjà à $t°$, on a :

$$Q = \frac{100Nm'(m'-1) - 100N'm(m'-1)}{100m'(m'-1)(m-1)} = \frac{Nm' - N'm}{m'(m-1)};$$

ce qui est bien encore la deuxième formule.

Il ne reste plus qu'à calculer m et m'.

J'ai déjà dit que m et m' étaient les espaces saturés par un gramme de vapeur d'eau aux températures T et t ; si on appelle donc d la densité de la vapeur à $T°$, et d' cette densité à $t°$, on aura $m = \frac{1}{d}$ et $m' = \frac{1}{d'}$. Mais ces deux expressions étant de même forme, je vais seulement m'occuper de m.

Or, la densité de l'air à 0° et sous la pression normale $0^m,760$ étant 0,0012991; celle de l'air à T° et sous la pression h est $\frac{0,0012991 \times h.}{760(1+0,00366.T)}$, et comme la densité de la vapeur d'eau est, d'après les calculs de M. Gay-Lussac, corrigés du coefficient de dilatation des gaz, les 0,620 de celle de l'air placé dans les mêmes circonstances, il s'ensuit que

$$m = \frac{760}{h} \cdot \frac{(1+0,00366.T)}{0,620 \times 0,0012991} \text{ centimètres cubes,}$$

ou bien, tout calcul fait,

$$\left.\begin{array}{l} m = 943581 \dfrac{(1+0,00366.T)}{h} \\ \text{De même, } m' = 943581 \dfrac{(1+0,00366.T)}{h'} \end{array}\right\} \text{centimètres cubes.}$$

Si l'on reprend actuellement les trois formules que j'ai données pour le poids de vapeur qui sature la sphère dans le passage de la température t à la température T, et que l'on y substitue les valeurs de N et de N', ces formules deviennent:

$$\text{I. } Q = \frac{(m'-1)\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)\right\}-(m-1)\left\{V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')\right\}}{(m-1)(m'-1)}$$

$$\text{II. } Q = \frac{m'\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)\right\}-m\left\{V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')\right\}}{m'(m-1)}$$

$$\text{III. } Q = \frac{100m'(m'-1)\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda)\right\}-am(m'-1)}{100m'(m'-1)}$$

$$\frac{\left\{V_1(1+kT)-V_0(1+\lambda')\right\}-m'(m-1)(100-a)\left\{V_1(1+kt)-V_0(1+\lambda')\right\}}{(m-1).}$$

Si l'on voulait faire une application numérique de l'une quelconque de ces formules, il n'y aurait plus qu'à calculer les valeurs de m et de m', et à les substituer dans l'expression dont l'on voudrait faire usage. Alors, dans ces formules, h et h' désigneraient des colonnes de mercure comptées en millimètres, d'après la table de Dalton (*tensions de la vapeur d'eau*).

k. . . . . le coefficient de dilatation cubique du cuivre pour 1° centigrade, il est à peu près $=0,00005154$, d'après MM. Dulong et Petit.

λ et λ'. . . . . les accroissements de volume de l'unité de volume d'eau, prise à 4°,1, pour les températures T et t. On les prendra dans la table de Hallström.

T et t. . . . . des degrés centigrades donnés par des thermomètres à mercure.

0,00366. . . . . . . le coefficient de dilatation des gaz, donné en même temps par MM. Régnault, en France, et Magnus, en Allemagne.

Enfin, a. . . . . . la tension de la vapeur d'eau correspondante au degré observé de l'hygromètre de Saussure. On devra prendre cette valeur, comme je l'ai déjà dit, dans la table de MM. Biot et Gay-Lussac.

J'ai donné ces détails, parce que, dans quelques cas, on peut avoir besoin de rechercher le poids de la vapeur d'eau qui sature un espace donné, et que, sous ce point de vue, ils pourraient être utiles aux physiciens, indépendamment de l'intérêt que présentait cette recherche comme application du calcul à la physique.

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments d'arithmétique et d'algèbre à l'usage des écoles royales de navigation. Par C. Fournier, officier de la Légion d'honneur, examinateur de la marine ; tome I, de 360 pages ; tome II, de 396 pages in-8. Nantes, 1842.

Dans la célébration des mystères d'Eleusis, on entendait par intervalle la voix de l'Hiérophante qui s'écriait : σκοτίσον, σκοτίσον ; obscurcissez, obscurcissez. Nous vivons à une époque où beaucoup d'écrivains aspirent à jouer le rôle d'Hiérophante dans les lettres, la philosophie, et dans les sciences. Il semblerait que les mathématiques où la clarté est le mérite essentiel, dominant, devraient être à l'abri de cette invasion ténébreuse ; car les sciences exactes ne reposent que sur des notions *évidentes* ; dans cette qualification on trouve la racine *videre*, voir ; une proposition est évidente quand on la *voit* clairement. Toutefois, les mathématiques aussi sont entamées par le fléau égyptien. Il y a certains auteurs qui vous prennent une notion simple, admise par tout le genre humain, et sur laquelle vous obtiendriez même réponse, d'un Chinois, d'un Canadien, d'un Patagon ; vous prennent cette notion et raisonnent, raisonnent, raisonnent tant et tant qu'à la fin vous n'y entendez plus rien : une démonstration est-elle facile à comprendre, à retenir, bien vite ils la remplacent par une autre, compliquée, hérissée de difficultés, apprise péniblement aujourd'hui pour être oubliée demain. Voltaire dit qu'un métaphysicien est content quand il est parvenu à donner un violent mal de tête à son lecteur. Les auteurs dont nous parlons, convoitent ce même genre de contentement, aussi il faut quelquefois une forte contention d'esprit, pour suivre telle exposition du calcul différentiel ; quel est le résultat ? Auparavant vous saviez que le coefficient différentiel de x^2 est $2x$; et maintenant vous savez que $2x$ est le coefficient différentiel de x^2 ; de sorte qu'après mille peines, votre instruction ne s'est pas agrandie de la valeur d'un centime ; ce désappointement se rencontre non-seulement dans les théories élevées, mais encore dans la partie élémentaire, destinée aux jeunes gens qu'il faut attirer vers la science et qu'on dirait vouloir en dégoûter par une rigueur fallacieuse, rebutante. On leur fait démontrer qu'une droite finie n'a qu'un milieu; qu'on ne peut sortir d'une enceinte fermée de toute part, qu'en perçant l'enceinte; et encore d'autres vérités de même acabit. En continuant ainsi, nous mettrons tant d'esprit dans l'enseignement, qu'il n'y aura plus de place pour le bon sens. Je regarde donc comme une bonne fortune de rencontrer des livres où les défauts que nous venons de signaler, sont soigneusement évités, et où brillent des qualités opposées : tel est celui dont nous allons présenter une analyse succincte. Le titre de l'ouvrage est déjà un progrès; il annonce que l'auteur adopte l'idée newtonienne, que l'arithmétique et l'algèbre ne forment qu'une seule science, et que la première quoique devant précéder, est pourtant comprise comme cas particulier dans la seconde. On ne saurait donc trop tôt aborder l'arithmétique universelle, et M. Fournier dit avec raison dans sa préface : «convaincu que les jeunes gens destinés à de *fortes études* ne sauraient trop tôt se familiariser avec les pratiques de l'algèbre, j'ai placé les quatre opérations fondamentales sur les quantités algébriques à la suite des mêmes opérations sur les nombres abstraits. » En effet, les jeunes gens destinés aux fortes études, doivent nécessairement apprendre l'algèbre; dès lors, pourquoi ne pas se servir avec eux de cet admirable instrument pour faciliter l'arithmétique? L'avantage de cet instrument consiste à représenter des phrases très-longues, par un petit nombre de signes et à renfermer une foule de cas particuliers, en une seule expression générale. Pourquoi donc conserver cette phraséologie et ces discussions enchevêtrées qui ne produisent qu'un embonpoint stérile, une perte de temps. On répond que les opérations symboliques par leur extrême facilité, tendent à énerver l'esprit; tandis que la forme dialectique le renforce, l'accoutume aux déductions abstraites. Mais il règne ici une étrange confusion dans les termes; la force de l'esprit a pour but, d'arriver à la vérité par le chemin le plus court; prendre le plus long, pour rester plus longtemps en chemin, c'est fausser l'esprit; ce n'est pas de la vigueur que vous obtenez, mais de la fatigue. Certes, toutes nos facultés physiques, intellectuelles, morales même, pour acquérir de l'intensité, ont besoin d'une certaine gymnastique, mais d'une gymnastique rationnelle; ainsi, pour les mathématiques, elle est, je le répète, dans les propositions intrinsèquement difficiles; telles sont les propriétés des nombres qui composent l'arithmologie; mais vouloir fonder une gymnastique en rendant difficiles, longues, des propositions faciles et courtes, me paraît une dépravation pédagogique.

M. Fournier rend donc service, en exposant d'une manière claire les notions primitives, et en procédant toujours par la voie la plus simple, la plus directe, la mieux adaptée à l'état actuel de nos connaissances. L'ouvrage est divisé en deux parties et subdivisé en quatorze livres; la première, du genre mixte, est principalement consacrée aux nombres chiffrés; c'est l'arithmétique, elle contient les livres de I à VII; la deuxième partie, aussi du genre mixte, est principalement consacrée aux équations et aux nombres représentés par des lettres; c'est l'algèbre en sept livres de VIII à XIV.

Dans le premier livre, on indique les définitions préliminaires, la numération des nombres entiers, fractionnaires ordinaires et décimaux, et la numération romaine; le tout en quinze pages; certains auteurs consacrent à ces objets quarante pages, sans être aussi complets, ni plus satisfaisants.

Le deuxième livre en huit pages, donne les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers, leurs usages et les théorèmes sur les produits et les quotients. — La division est développée d'une manière rigoureuse et facile; on y lit la remarque suivante (p. 67.) très-utile et qui me paraît neuve: « Quand on trouve un reste égal au chiffre qu'on vérifie, ou plus grand, il est inutile d'aller plus loin, ce chiffre n'est pas trop fort. » Dans le livre précédent, on fait déjà usage, et avec raison, de tous les signes algébriques. Le troisième livre de quarante-six pages, donne les notions préliminaires sur les signes, sur la théorie des quantités positives et négatives, et les quatre opérations algébriques, sur les monômes et les polynômes (1); la notation des exposants positifs, négatifs; la théorie des puissances et des racines. Il y a des considérations sur les fonctions qui sont peut-être prématurées.

(1) L'Académie écrit polynôme avec l'accent circonflexe, et polygone sans accent. L'étymologie prescrit le contraire.

Le livre IV (46 pages) traite des diviseurs, du plus grand commun diviseur et de la divisibilité des nombres. Les propriétés convenables au sujet sont indiquées et rigoureusement démontrées ; il manque, ainsi que dans tous les traités élémentaires, les procédés souvent utiles pour trouver combien un nombre est précédé de nombres premiers à son égard, l'unité comprise ; observation essentielle. L'expression *le plus grand commun diviseur*, si longue, si incommode, est d'un usage très-fréquent, ne pourrait-on pas la remplacer par un seul mot? la *division* a reçu son nom d'une des applications principales de cette opération ; la dénomination convenable au plus grand commun diviseur, doit être déduite de son usage le plus important, le plus fréquent ; cet usage consiste dans la plus grande simplification entre les rapports de quantités chiffrées ou littérales ; le *simplificateur* semble assez bien désigner le nombre ou le polynôme qui sert à simplifier, le plus possible, un rapport donné.

Le livre V (73 pages), les opérations sur les fractions ordinaires et décimales, transformation d'une fraction en une série procédant suivant les puissances négatives d'un nombre donné ; théorie des fractions périodiques.

Il semble que dans ce même livre, on devrait enseigner les théorèmes de Fermat et de Wilson.

Le livre VI (56 pages), contient la théorie du plus grand commun diviseur algébrique ; opération sur les fractions algébriques ; fractions continues ; théorie complète et satisfaisante des réduites. Il serait convenable de mentionner les fractions continues, périodiques pures et mixtes, et de démontrer leur incommensurabilité. Nous signalons aussi une autre lacune, celle des fractions complémentaires, dues à Hughens et si bien développée par Lagrange. Cette lacune existe dans tous les traités élémentaires. Les théories des inégalités et des combinaisons, qui terminent ce livre, ne me semblent pas à leur véritable place, n'ayant nul rapport à ce qui précède ; du reste, les combinaisons et permutations sont exposées d'une manière succincte et suffisante. Il serait à désirer qu'on démontrât ici, par des considérations arithmologiques, que les coefficients combinatoires sont entiers.

Le livre VII (en 55 pages) termine le premier volume, et contient tout ce qu'il est nécessaire de savoir sur les racines carrées et cubiques des nombres, et les diverses méthodes d'approximation.

Le premier tome renferme 374 paragraphes ; de sorte que le tome II commence par le paragraphe 375 et par le VIII^e livre. Il donne le calcul des exposants, entiers, négatifs, fractionnaires, et aussi le calcul à faire sur des radicaux réels ; ensuite on passe au développement binomial, dont on établit la loi, d'abord par voie d'induction, confirmée ensuite par le raisonnement didactique. Telle est même, généralement, la marche de l'auteur : c'est la méthode d'invention, conseillée et suivie par Clairault. Dans les remarques sur ce développement, l'auteur fait ressortir et explique les anomalies que présente la supposition de l'exposant égalé à zero ; vient après la démonstration si lumineuse, si ingénieuse d'Euler, pour le cas de l'exposant fractionnaire ou négatif. Je suis surpris que les auteurs négligent généralement la belle et simple déduction, due au même géomètre, du théorème de Fermat : cette déduction peut s'établir ainsi : a et b étant des nombres entiers quelconques, et p un nombre premier, on a la congruence $(a+b)^p - a^p - b^p = \dot{p}$ (1) ; $\dot{p}$ désigne un multiple de p ; car, dans le développement de $(a+b)^p$, tous les termes, les extrêmes exceptés, admettent p comme facteur et sont entiers ; donc chacun de ces termes, et par conséquent leur somme, est divisible par p. Faisant $a = b = 1$, l'équation (1) devient $2^p - 2 = \dot{p}$ (2) ; donc aussi, $2^{p-1} - 1 = \dot{p}$; faisant $a = 2$, $b = 1$, on a $3^p - 2^p - 1 = \dot{p}$ (3) ; ajoutant les congruences (2) et (3), il vient $3^p - 3 = \dot{p}$ (4) ; d'où $3^{p-1} - 1 = \dot{p}$; faisant $a = 3$, $b = 1$, etc.

La démonstration devient intuitive en partant du polynôme. En effet, l'on a

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n)^p - a_1^p - a_2^p - \ldots\ldots a_n^p = \dot{p}. \qquad (2)$$

Faisant $a_1 = a_2 = a_3 \ldots\ldots = 1$, il vient $n^p - n = \dot{p}$, et si n est premier à p, on a $n^{p-1} - 1 = \dot{p}$; ce qui est le théorème de Fermat. Mais je ne sais comment on peut, par le même moyen, établir la congruence générale $n^k - 1 = \dot{p}$, où p désigne un nombre entier quelconque, et k combien il y a de nombres inférieurs à p et premiers à p. La congruence (2) donne ce théorème : Lorsque la somme de plusieurs nombres entiers est un multiple d'un nombre premier, la somme de ces nombres, élevés chacun à la puissance marquée par ce nombre premier, est divisible par le nombre premier.

Le livre est terminé par l'extraction des racines des polynômes.

Le livre suivant, le IX^e, contient l'explication du système métrique ancien et nouveau; les quatre opérations sur les nombres complexes, et la théorie de divers systèmes de numération.

Dans le journal de Crell, on lit une dissertation sur le système de numération, qui jouit de la propriété d'exprimer les plus grands nombres avec le moins de mots possible; la base de ce système est une quantité transcendante. En admettant les compléments à la base, on peut, dans un système quelconque, réduire le nombre des chiffres à moitié : on écrit 4 pour 6, 3 pour 7, et les opérations sont souvent abrégées. Cette idée, émise pour la première fois dans le journal de Gergonne, a été reproduite récemment par M. Cauchy.

Ce livre semble n'être pas à sa place, non plus que le suivant, consacré aux proportions et progressions arithmétiques et géométriques. A cette occasion, nous croyons utile de rappeler une idée ingénieuse de M. Roche, professeur d'artillerie; l'on $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\text{etc.}=\frac{1}{3}$; a donc pour prendre le tiers d'un arc de cercle, on en prend la moitié, résultat trop grand; on en retranche le quart, résultat trop petit; on y ajoute le seizième, résultat trop grand et ainsi de suite; un semblable procédé existe, pour obtenir le septième d'un arc.

Le livre XI^e est un développement très-lucide et très-complet de ce qu'il faut savoir sur les logarithmes et la construction des tables. Un tableau très-commode montre d'une manière intuitive les calculs qu'il faut faire pour obtenir le logarithme de 2. L'auteur suit la méthode néperienne en considérant deux progressions, arithmétique et géométrique, qui se correspondent, mais cela ne dispense pas de recourir à la méthode exponentielle; la seule qui permette de démontrer que dans chaque système, tout nombre positif a une infinité de logarithmes, dont un seul est réel, et tout nombre négatif a aussi une infinité de logarithmes dont aucun n'est réel. Ce qui me porte à penser qu'on devrait accorder l'entrée dans les éléments aux équations exponentielles et en déduire la théorie logarithmique, comme Euler a fait dans son algèbre; l'auteur fait d'utiles observations sur les limites d'erreur des tables.

La résolution complète des équations du premier degré, à une inconnue et à plusieurs inconnues avec la discussion des formules, avec le problème des courriers; la résolution des équations du deuxième degré à une inconnue, avec le problème des lumières forment la matière du XII^e et du XIII^e livre; et à la fin de ce livre, on trouve la sommation des suites, des nombres figurés et des piles de boulets.

Le XIV^e et dernier livre concerne les règles d'intérêt, simple et composé, les annuités, règle de société; le tout est terminé par l'analyse indéterminée du premier degré, et la résolution des équations trinômes réductibles au deuxième degré.

Le vénérable auteur prépare une seconde édition, où il ajoutera la théorie générale des équations comprenant le théorème de Descartes, de Rolle; la résolution numérique des équations, les théorèmes de Lagrange et de M. Sturm; et cet ouvrage, ainsi complété, sera étudié avec fruit par les élèves qui se destinent aux Écoles du gouvernement et principalement à l'École normale et à l'École polytechnique. L'algèbre y occupe le premier rang, celui qu'elle doit avoir dans toutes les sciences de calcul.

Le savant examinateur de la marine voudra bien nous permettre quelques observations sur les dispositions de certains livres du tome second; l'ordre méthodique me paraît exiger cette succession: VIII, XII, XIII, X, XI, IX, XIV; la sommation des suites, fin du livre XIII, devrait terminer le livre X, qui traite des progressions; l'analyse indéterminée du livre XIV serait mieux à la fin du livre XII; et la résolution des équations trinômes doit être portée à la fin du livre XIII.

L'ouvrage de M. Fournier, imprimé à Nantes, n'a eu qu'une faible publicité dans la capitale. Nous finirons par un conseil, dans l'intérêt de la science, qui gagne à la propagation des bonnes idées. Nous engageons l'auteur à ne pas se contenter de bien travailler ses productions; mais de prendre aussi les petites précautions qui en assurent le succès. *Habent sua fata libelli* Tm.

RECTIFICATION

RELATIVE AUX

RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
professeur à la faculté de Bordeaux.

—

La règle donnée à la page 46 du présent volume de ces *Annales*, pour trouver les racines complexes entières de l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, à coefficients entiers complexes, et où il faut sans doute lire (ligne 5) : « Diviseurs du module de a_n » au lieu de « diviseurs de $a_n(a - b\sqrt{1})$ » (*), peut se démontrer en deux mots. Soit $x = a + b\sqrt{-1}$, une racine entière, et $a_n = b_n + c_n\sqrt{1}$, $\frac{b_n + c_n\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ étant entiers ; il en sera de même du module $\frac{b_n^2 + c_n^2}{a^2 + b^2}$, il faut donc prendre pour $a^2 + b^2$ des diviseurs de $b_n^2 + c_n^2$, en négligeant toutefois ceux dont le module surpasse la limite trouvée. Quant aux racines incomplexes a et $b\sqrt{-1}$, a et b doivent diviser à la fois b_n et c_n.

Cette règle, comme je le montrerai plus loin, est moins simple que la règle ordinaire qui prescrit d'essayer les diviseurs de $b_n + c_n\sqrt{-1}$, lesquels sont en nombre moindre que ceux donnés par la règle précédente. Mais pour l'appliquer, il faut préalablement exposer la décomposition des entiers complexes en facteurs simples.

(*) $a + b\sqrt{-1}$ étant la racine cherchée, $a_n(a - b\sqrt{-1})$ est inconnue. Cette méprise est de moi et non de M. Finck, qui d'ailleurs ne s'est occupé que d'équations à coefficients réels. Tm.

Dans ses Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes (*Journal* de M. Crelle, t. XXIV), M. Dirichlet s'exprime ainsi : « Quoique les pro- » positions élémentaires de la Théorie des entiers com- » plexes aient été déjà exposées par l'illustre Gauss, nous » avons pensé qu'il pourrait être commode pour les lecteurs » de trouver dans une courte introduction, celles de ces pro- » positions dont nous aurons à faire usage. » (Page 4.)

Les six premières pages de cette introduction suffisent pour faire voir que la règle pour trouver les racines réelles entières des équations algébriques à coefficients entiers, s'applique aux racines entières complexes. M. Dirichlet ne se propose nullement cette question dans son Mémoire, dont les propositions principales sortent tout à fait du cadre des *Annales* ; on peut se faire une idée de la méthode suivie par M. Dirichlet en lisant son Mémoire sur cette proposition remarquable : « Toute progression arith- » métique dont les deux premiers termes sont premiers entre » eux, renferme une infinité de nombres premiers » Ce Mémoire a été publié en allemand, mais M. Terquem en a donné la traduction dans le *Journal de Mathématiques*. C'est un service rendu à la science des nombres.

Je me propose d'exposer dans ces *Annales*, quelques propositions élémentaires plutôt indiquées que développées dans l'introduction du Mémoire cité plus haut. Je commencerai par donner la décomposition des entiers complexes en facteurs simples, d'où dérive immédiatement la règle pour trouver les racines complexes entières des équations algébriques à coefficients entiers.

NOTE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PAR M. FINCK,
Docteur ès sciences, professeur à l'école d'artillerie et au collége de Strasbourg.

Notre Descartes, en créant sa géométrie, n'a pas entendu poser des bornes à la science : cependant, dans tous nos traités *absolument neufs*, je ne vois que sa méthode. Quelquefois, il est vrai, on se plaint qu'elle n'est pas parfaite; qu'au delà du second degré, elle a bien peu de portée, etc. N'y a-t-il donc pas de progrès ? Si fait, mais pas dans les livres élémentaires. La méthode de Descartes (sur le plan) consiste à rapporter les modes de l'étendue à des droites qui souvent n'ont pas une liaison bien intime avec la courbe que l'on étudie. Mais déjà le grand Euler, qui n'a touché à rien en vain, a fait un pas de plus : il est vrai que ce n'est qu'un germe. Ce germe est actuellement développé ; j'ai fait connaître un de ses fruits dans le journal de M. Liouville, il y a quelques années. Le développement en question est le *nouveau système de géométrie analytique* du docteur Plucker, Bonn, 1835.

Ce système, outre ses généralités par rapport à la transformation des figures, consiste à chercher dans l'équation de la courbe les droites qui ont avec la courbe, la liaison la plus intime. J'ai fait, comme vous savez, une application de cette méthode à l'espace, en donnant des moyens précis et simples pour reconnaître dans chaque cas la nature du lieu représenté par une équation à trois variables. Je donne toujours, dans mon cours, une idée de ladite méthode. Je ne me propose pas de la développer maintenant ; il suffit de montrer, par quelques exemples tirés du *nouveau système*, avec quelle facilité elle s'applique à un certain genre de recherches où, au contraire, l'ancien système est très-prolixe.

1° Je nomme p, q, r, s, a, b, des fonctions linéaires de la forme $Ay + Bx + C$. Toute courbe du second degré pourra être représentée d'une infinité de manières par une équation telle que

$$pq + a^2 = 0, \qquad (1)\ (*)$$

où $p = 0$, $q = 0$ seront évidemment deux tangentes, $a = 0$ est la corde de contact.

Je représente la même courbe par

$$rs + b^2 = 0, \qquad (2)$$

et, vu le nombre des coefficients A, B, etc., je puis supposer

$$pq + a^2 = rs + b^2; \qquad (3)$$

d'où

$$pq - rs = (b + a)(b - a). \qquad (4)$$

Les quatre droites $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ forment un quadrilatère circonscrit à notre courbe.

L'équation (4) est satisfaite par $p = 0$, $r = 0$, $b + a = 0$; elle l'est aussi par $q = 0$, $s = 0$, $b + a = 0$.

Ainsi, $b + a = 0$ est une des diagonales du quadrilatère circonscrit ; l'autre est évidemment $b - a = 0$.

Or ces deux diagonales se coupent sur les droites $b = 0$, $a = 0$, qui sont les cordes de contact, ou bien les diagonales du quadrilatère inscrit, conjugué.

De là, le théorème déjà connu de Newton.

Du reste, les équations $a = 0$, $b = 0$, $b + a = 0$, $b - a = 0$ sont évidemment celles de quatre rayons harmoniques.

(*) Cette proposition ne peut être admise sans une démonstration qui présente une discussion difficile. Pour une courbe du 3me degré pourrait-on écrire à priori $pqr + a^3 = 0$? Tm.

2° Je représente l'équation de la courbe par

$$pq = rs\,; \tag{5}$$

p, q, r, s étant toujours des fonctions de la forme indiquée. Les droites $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ sont ici des sécantes.

L'équation (5) est satisfaite par

$$p = r \quad \text{avec} \quad q = s.$$

Ces deux droites se coupent donc sur la courbe; il en est de même des droites

$$p = s, \quad q = r.$$

D'ailleurs, $p = r$ et $p = s$ se coupent sur $p = 0$;

$$q = s, \quad q = r \; \ldots\ldots\ldots \; q = 0.$$

Voilà six droites :

$$p=0,\ p-r=0,\ q-s=0,\ q=0,\ q-r=0,\ p-s=0,$$

dont chacune coupe la suivante sur la courbe; de même la dernière, $p-s$, coupe la première, $p=0$, sur la courbe. Ce sont donc les six côtés consécutifs d'un hexagone inscrit. Or les côtés opposés forment les trois couples suivants :

$\left.\begin{array}{r} p=0 \\ q=0 \end{array}\right\}$ qui se coupent sur $p-q=0$;

$\left.\begin{array}{r} p-r=0 \\ q-r=0 \end{array}\right\}$ *id.* vu que $(p-r)-(q-r)=p-q$,

$\left.\begin{array}{r} q-s=0 \\ p-s=0 \end{array}\right\}$ *id.*

Donc, les intersections des côtés opposés sont en ligne droite. C'est le théorème connu.

Voilà donc l'analyse, à peu près sans calcul : elle n'en est pas plus mauvaise (*).

D'autres travaux remarquables, en ce genre, sont dus à MM. Magnus, Mœbius, Druckenmüller, etc. : j'extrais

(*) En admettant ce genre d'équations à priori sans démonstration, il me semble qu'on esquive les calculs : on ne les évite pas. Les résultats sont connus d'avance et on s'arrange de manière à les obtenir. Tm.

d'un ouvrage de ce dernier (*Die Uebertragungs Principien*, etc.) l'article suivant, remarquable sous plus d'un rapport.

Soient les deux équations

$$y-y'+m(x-x')=0, \qquad (1)$$

$$y-y'+m'(x-x')=0. \qquad (2)$$

Je prends deux solutions de l'équation (1) :

$$x=a, \quad y=y'-m(a-x'); \qquad (3)$$

$$x=b, \quad y=y'-m(b-x'). \qquad (4)$$

Je prends pareillement deux solutions de (2) :

$$x=a', \quad y=y'-m'(a'-x'); \qquad (5)$$

$$x=b', \quad y=y'-m'(b'-x'). \qquad (6)$$

Je forme l'équation du premier degré entre x, y, qui est satisfaite par (3) et (5) : elle est

$$y-y'+m(a-x')=\frac{m(a-x')-m'(a'-x')}{a'-a}(x-a). \qquad (7)$$

Celle qui l'est par (4) et (6), est

$$y-y'+m(b-x')=\frac{m(b-x')-m'(b'-x')}{b'-b}(x-b). \qquad (8)$$

Or, si l'on élimine y entre (7) et (8), y', m et m' disparaissent, et x est une fonction de x', a, a', b, b', que je nomme $x=f(x', a, a', b, b')$.

Ce résultat peut être interprété géométriquement de bien des manières : en voici quelques-unes.

I. Je suppose que y, x soient des coordonnées ordinaires, (1) et (2) seront deux droites qui se coupent au point (x', y'); (7) sera une droite qui coupe (1) au point $(x=a, y\ldots.)$ et (2) au point $(x=a',\ldots)$. De même, (8) est une droite coupant (1) au point $(x=b,\ldots)$, (2) au point $(x=b',\ldots)$. Voilà donc un quadrilatère complet dont les côtés sont les droites (1), (2), (7), (8), et dont les six sommets ont pour abscisses respectives :

$$x',\ a,\ a',\ b,\ b',\quad x=f(x',a,a',b,b').$$

Or, si les cinq premières abscisses restent constantes, la sixième ne variera pas non plus ; donc

Si parmi les six sommets d'un quadrilatère complet, il y en a cinq qui décrivent des droites parallèles à une direction donnée, le sixième décrira aussi une parallèle à cette direction (axe des y).

Il est évident qu'il en est de même des intersections des trois diagonales.

II. Toute droite intercepte sur les axes deux segments qui déterminent complétement cette droite. M. PLUCKER, qui a imaginé ce nouveau système de *coordonnées*, lui a déjà donné un assez haut degré de développement. En représentant par $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ ces segments, il appele y, x des *coordonnées linéaires*. Une droite est, dans ce système, représentée par deux équations $x=\alpha$, $y=\beta$. Une équation $\varphi(x, y)=0$ représente ainsi une infinité de droites : on peut donc la regarder comme représentant la courbe à laquelle toutes ces droites sont tangentes. Par conséquent une même équation $\varphi(x, y)=0$, interprétée d'après les méthodes Descartes et Plucker, représente deux courbes qui ont une certaine relation de *réciprocité* dans le sens connu. Je ne m'étends pas maintenant là-dessus.

Il est très-facile de prouver que dans le système actuel l'équation $y=ax+b$ représente un *point* (*).

Il s'ensuit que l'équation (1) représente un point, et comme elle est satisfaite par $y=y'$, $x=x'$, ce point est sur la droite que déterminent ces deux dernières équations.

Nous avons donc un nouveau quadrilatère dont quatre sommets sont les points (1), (2), (7), (8).

(*) Soit l'équation ordinaire d'une droite $\beta y+\gamma x=1$. Si $\alpha=a\beta+b$, l'enveloppe de la droite est un point (voyez p. 155). TM.

Parmi les côtés et diagonales, au nombre de sept, sont les droites

(x', y') qui passe aux points (1), (2)
(3) . . . . (1), (7)
(4) . . . . (1), (8)
(5) . . . . (2), (7)
(6) . . . . (2), (8)

et la droite qui joint les points (7) et (8), que je nomme (9).

Chacun pourra faire cette figure : la septième droite du quadrilatère est celle qui joint l'intersection des droites (4) et (5) à celle de (9) avec (x', y').

La droite (9) est déterminée par le système des équations (7) et (8) ; c'est à elle qu'appartient $x = f(x', a, a', b, b')$.

On admettra que x', a, a', b, b' sont invariables ; c'est supposer que les droites (x', y'), (3), (4), (5), (6) tournent autour de leurs pieds sur l'un des axes ; mais alors $x = f(x', a, a', b, b')$ est invariable ; donc

Si parmi les sept droites qui composent un quadrilatère complet il y en a cinq qui tournent respectivement autour des points où elles sont coupées par une droite quelconque, il y en a une sixième (par suite aussi la septième) qui tourne autour du point où elle est coupée par la même droite.

III. Mais ce ne sont pas les seules interprétations géométriques que l'on puisse donner au fait analytique ci-dessus remarqué, relativement à $x = f(x', a, a', b, b')$. On peut affirmer que le nombre des interprétations est infini : on en obtient, par exemple, *deux* en regardant y, x comme des coordonnées polaires ; alors, au lieu de droites, ce sont des spirales d'Archimède qui sont en jeu, et le théorème est relatif ou aux angles ou aux rayons vecteurs.

L'auteur auquel j'emprunte ce qui précède n'a pas donné ces dernières interprétations ; il en a donné une qui se rapporte à des cercles, la voici : Considérons une droite indéfinie nommée axe des x; d'un point de cette droite, comme centre, avec un rayon donné, je décris un cercle; prenant pour origine un point quelconque de notre axe des x, je désigne l'abscisse du centre par x et le rayon par y; j'appelle x, y, *coordonnées circulaires*.

Étant donnée une équation $f(x,y)=0$, j'en tirerai une infinité de cercles, et j'appelle lieu de l'équation *la courbe enveloppe de tous ces cercles* : l'équation du premier degré $y=ax+b$ représente dans ce cas encore évidemment une droite.

Par conséquent notre équation (1) représente une droite tangente au cercle (x', y').

De même (2).

Nous avons les cercles (3), (4), (5), (6);

La droite (7) tangente aux cercles (3), (5);

La droite (8) tangente à. . . (4), (6).

Le système des équations (7), (8) convient au cercle qui touche les droites (7), (8), et qui a pour abscisse du centre $x=f(x', a, a', b, b')$.

Ainsi encore un quadrilatère dont les côtés sont (1), (2), (7), (8), et six cercles qui les touchent deux à deux; donc

Si on fait varier le quadrilatère de façon que les centres déterminés par x', a, a', b, b', *ne changent pas, quelles que soient les variations des rayons, le centre du sixième cercle* x = f(...) *ne changera pas.*

Mais rien n'empêche de regarder les y comme les abscisses des centres et les x comme les rayons; donc les cinq rayons x', a, a', b, b', restant invariables, le sixième $x=f(\ldots)$ le restera aussi, et *si les angles d'un quadrilatère complet s'appuient sur six cercles dont les centres sont en ligne droite, que l'on déforme le quadrilatère en faisant mouvoir les centres sur la droite qui les contient, de façon que cinq des angles restent appuyés sur leurs cercles, le sixième ne quittera pas le sien.*

Rien n'empêche de supposer que l'axe des x est une courbe au lieu d'une droite, alors il y a modification.

J'ajouterai à ce que je viens de traduire de mon auteur, que l'on peut représenter par x, y deux éléments d'une courbe quelconque dont tous les autres éléments resteraient invariables, et alors le petit calcul ci-dessus conduit à une proposition qui a une infinité de corollaires.

Terminons. Le but de la géométrie analytique est l'étude des lois de l'étendue figurée, par l'intermédiaire des relations métriques. Le moyen est d'attribuer aux symboles analytiques une signification géométrique ; par suite, à chaque signification géométrique nouvelle que vous attribuez aux symboles qui entrent dans un calcul, répond un nouveau théorème de géométrie, et tous ces théorèmes ont un air de famille qui tient à leur origine commune.

Voilà la *dualité* bien dépassée.

Il me semble que ces idées pourraient (dirai-je *devraient*) trouver place dans les traités élémentaires. La composition d'un ouvrage où tout cela entrerait avec des bornes convenables, est très-désirable. J'en ai le projet, toujours plus facile que l'exécution. *Non omnia possumus omnes.*

SUR LES INTERSECTIONS SUCCESSIVES

de droites représentées par une équation contenant une variable (*).

PAR M. E. DESMAREST,

ancien élève de l'École polytechnique.

1° A quelles conditions doivent obéir les quantités a et b pour que toutes les droites représentées par l'équation

---

(*) Voir t. I, p. 281 ; t. II, p. 110, cor. 2.

$$y = ax + b$$

se coupent au même point?

Soit $b = \varphi(a)$, l'équation devient

$$y = ax + \varphi(a). \qquad \text{(A)}$$

Remplaçant a par $a + h$, on a

$$y = ax + hx + \varphi(a) + \varphi'(a)h + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \qquad \text{(B)}$$

Cherchant l'intersection des deux droites, on a

$$hx + \varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} = 0.$$

Divisant par h, puis posant $h = 0$, on a $x = -\varphi'(a)$. Substituant cette valeur dans (A), on a pour les coordonnées du point d'intersection de deux droites :

$$x = -\varphi'(a), \qquad y = \varphi(a) - a\varphi'(a).$$

Or $\varphi'(a)$ doit être constante ; donc $\varphi(a) = pa + q$. Cette condition est nécessaire et suffisante ; car elle donne, pour les coordonnées du point d'intersection,

$$x = -p, \qquad y = +q.$$

Donc, pour que les droites représentées par l'équation $y = ax + b$ se coupent au même point, il faut et il suffit que les quantités a et b soient liées par une fonction du premier degré. L'équation est :

$$y = ax + pa + q \qquad \text{ou} \qquad y - q = a(x + p).$$

2° A quelles conditions doivent obéir les quantités a et b pour que les intersections successives des droites représentées par l'équation $y = ax + b$ soient sur une ellipse donnée?

Soit cette ellipse donnée,

$$n^2x^2 + q^2 = m^2n^2.$$

Soit $b = \varphi(a)$ et l'équation des droites $y = ax + \varphi(a)$.

Les coordonnées du point d'intersection de deux droites voisines sont

$$x = -\varphi'(a), \qquad y = \varphi(a) - a\varphi'(a).$$

On doit donc avoir

$$n^2[\varphi'(a)]^2 + [\varphi(a) - a\varphi'(a)]^2 = \text{une constante } m^2n^2.$$

Or, même en restant dans les lois ordinaires des dérivées, on peut reconnaître que la valeur $\varphi(a)$, qui réalise cette condition est $\varphi(a) = m\sqrt{n^2+a^2}$. Donc, toutes les droites représentées par l'équation

$$y = ax + m\sqrt{n^2+a^2}$$

se coupent sur l'ellipse

$$n^2x^2 + y^2 = m^2n^2.$$

3° Un raisonnement analogue démontrerait que les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = ax + m\sqrt{-n^2+a^2}$$

sont sur l'hyperbole

$$-n^2x^2 + y^2 = -m^2n^2.$$

Si l'hyperbole était rapportée à ses asymptotes, son équation serait de la forme

$$xy = -m^2.$$

Or les coordonnées du point d'intersection de deux droites voisines étant toujours

$$x = -\varphi'(a), \qquad y = \varphi(a) - a\varphi'(a),$$

on devrait avoir

$$a[\varphi'(a)]^2 - \varphi(a)\varphi'(a) = \text{une constante } -m^2. \qquad \text{(C)}$$

Donc la fonction $\varphi(a)$ devrait être de la forme $\sqrt{a}$, cette quantité étant multipliée par une constante · soit donc $\varphi(a) = s\sqrt{a}$: l'équation (C) devient

$$\frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{2} = -m^2 \qquad \text{ou} \qquad s^2 = 4m^2.$$

Donc, enfin, les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = ax + 2m\sqrt{a}$$

sont sur l'hyperbole

$$xy = -m^2.$$

4° Si la courbe donnée est une parabole

$$x^2 = my,$$

on doit avoir

$$\frac{[\varphi'(a)]^2}{\varphi(a) - a\varphi'(a)} = \text{une constante } m$$

ou $$[\varphi'(a)]^2 + ma\varphi'(a) - m\varphi(a) = 0\,; \qquad \text{(D)}$$

ce qui indique que la fonction de a est de la forme a^2, cette quantité étant multipliée par une constante p dont on déterminera la valeur ; soit, en effet, $\varphi(a) = pa^2$, l'équation (D) devient

$$(4p + m)a^2 = 0\,; \qquad \text{de là,} \qquad p = -\frac{m}{4}.$$

Ainsi, les intersections successives des droites représentées par l'équation $y = ax - \frac{ma^2}{4}$ sont sur la parabole

$$x^2 = my.$$

Les conditions qui précèdent ont été obtenues en évitant toute idée de tangentes. En général, elles ne sont que suffisantes : si nous admettons que la droite primitive est, après une oscillation, transformée en une tangente à la courbe, nous pourrons conserver à la question toute sa généralité. Nous donnerons ici l'ellipse comme exemple.

5° A quelles conditions doivent obéir les fonctions algébriques A et B, pour que les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = Ax + B,$$

soient sur une ellipse donnée, et rapportée à son centre et à ses axes.

La courbe étant une ellipse, il existe une relation connue entre la droite qui unit l'origine à un point d'intersection, et la droite génératrice correspondante : le produit des tangentes des angles que ces droites forment avec l'axe des x est $-n^2$, c'est-à-dire négatif et constant.

L'équation de la droite étant

$$y = Ax + B, \tag{E}$$

si nous appelons A', A'', etc., B', B'', etc., les dérivées successives que donnent, dans A et dans B, l'accroissement de la variable indépendante, on aura l'équation de la droite changée

$$\text{(F)} \quad y = Ax + A'hx + A''\frac{h^2}{1.2}x^2 + \text{etc.} + B + B'h + B''\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

L'intersection des droites (E) et (F) donne

$$x = -\frac{B'}{A'}, \qquad y = \frac{A'B - AB'}{A'}. \tag{G}$$

La droite qui unit l'origine au point d'intersection est

$$y = \frac{A'B - AB'}{-B'}x.$$

Le produit des tangentes A et $\dfrac{A'B - AB'}{-B'}$ étant négatif et constant, on a

$$A\left(\frac{A'B - AB'}{-B'}\right) = -n^2.$$

De là, on déduit

$$A'B - AB' = \frac{B'n^2}{A} \quad \text{et} \quad \frac{B'}{A'} = \frac{AB}{n^2 + A^2}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions (G), on a

$$x = \frac{-AB}{n^2 + A^2}, \qquad y = \frac{n^2B}{n^2 + A^2},$$

ou

$$x = \frac{-AB}{n^2 + A^2}, \qquad \frac{y}{n} = \frac{nB}{n^2 + A^2}. \qquad \text{(K)}$$

L'équation de l'ellipse donnée étant $x^2 + \frac{y^2}{n^2} = m^2$, il est clair que les sommes des carrés des valeurs données en (K) doivent résoudre cette dernière équation. On doit donc avoir

$$\left(\frac{-AB}{n^2 + A^2}\right)^2 + \left(\frac{nB}{n^2 + A^2}\right)^2 = m^2,$$

ou

$$\frac{B^2}{n^2 + A^2} = m^2,$$

ou

$$B = m\sqrt{n^2 + A^2}.$$

Si nous faisons l'hypothèse la plus simple, si nous supposons que A est une variable indépendante a, nous retrouverons la condition donnée précédemment, c'est-à-dire, que les intersections successives de droites représentées par l'équation

$$y = ax + m\sqrt{n^2 + a^2}$$

sont sur l'ellipse

$$n^2x^2 + y^2 = m^2n^2.$$

Un calcul analogue résout la question générale pour l'hyperbole et pour la parabole.

6° *Des développées et du cercle osculateur.* Les recherches de la développée et du cercle osculateur d'une courbe sont des conséquences des recherches qui précèdent. Pour la première, il suffira d'obtenir les intersections successives des droites normales aux génératrices primitives, chacune de ces normales passant par le point d'intersection des deux génératrices voisines correspondantes ; pour la seconde, on déterminera la distance d'un point de la courbe primitive au point correspondant de la développée. Ces calculs ne présentent aucune difficulté; nous donnerons seulement comme exemple la développée et le cercle osculateur de la parabole

$$x^2 = my.$$

La droite génératrice est

$$y = ax - \frac{ma^2}{4},$$

les coordonnées du point d'intersection de deux génératrices voisines sont

$$x' = \frac{ma}{4}, \qquad y' = \frac{ma^2}{4},$$

la droite normale à la génératrice primitive, et passant au point x', y', a pour équation

$$y - \frac{ma^2}{4} = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{ma}{2}\right).$$

Si dans cette dernière équation 1° on remplace a par $a+h$; 2° on développe; 3° on cherche l'intersection des deux normales, on a les coordonnées du point d'intersection

$$x = -\frac{ma^3}{2}, \qquad y = \frac{3ma^2 + 2m}{4},$$

si on élimine a entre ces deux dernières équations, on a

$$\frac{27mx^2}{16} = \left(y - \frac{m}{2}\right)^3.$$

Cette dernière équation est celle de la développée. Si on transporte l'axe des x parallèlement à lui-même, en posant $y - \frac{m}{2} = y$, on obtient la forme connue de la développée

$$x^2 = \frac{16y^3}{27m}.$$

Les coordonnées x', y'; x, y d'un point de la parabole et du point correspondant de la développée sont

$$x' = \frac{ma}{2} \qquad x = -\frac{ma^3}{2}$$

$$y' = \frac{ma^2}{4} \qquad y = \frac{3ma^2 + 2m}{4},$$

désignant par R le rayon du cercle osculateur, on a

$$R^2 = \left(\frac{ma}{2} + \frac{ma^3}{2}\right)^2 + \left(\frac{ma^2}{4} - \frac{(3ma^2 + 2m}{4}\right)^2,$$

ou

$$R^2 = \frac{m^2}{A}(1 + a^2)^3.$$

Substituant pour a sa valeur déduite de l'une des expressions en x' ou en y', on aura le rayon du cercle osculateur en fonction de l'abscisse ou de l'ordonnée du point de la courbe. Pour obtenir ce rayon en fonction de y', on remplacera a^2 par l'expression $\frac{4y'}{m}$, et on aura

$$R^2 = \frac{(4y' + m)^3}{4m}.$$

CONDITION DE RÉALITÉ

des racines de l'équation complète du troisième degré.

PAR M. TARNIER,
professeur.

—

Problème. Chercher la relation des coefficients de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, pour que ses trois racines soient réelles.

Solution. En faisant usage du théorème de M. Sturm, on obtient les polynômes suivants :

(1) $\quad X = x^3 + px^2 + qx + r$

(2) $\quad X' = 3x^2 + 2px + q$

(3) $\quad X'' = (2p^2 - 6q)x + (pq - 9r)$

(4) $\quad X''' = -4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 + 18pqr - 27r^2.$

Pour que toutes les racines soient réelles, il faut et il suffit qu'en attribuant à x des valeurs très-grandes négatives, ces quatre polynômes ne présentent que des variations (corollaire du théorème de M. Sturm). Or le premier sera négatif et le second positif, il est donc nécessaire et suffisant que le troisième soit négatif et le quatrième positif, c'est-à-dire que l'on ait

$$\left.\begin{array}{r} 2p^2 - 6q > 0 \\ \text{ainsi que } -4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 + 18pqr - 27r^2 > 0 \end{array}\right\}$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{r} p^2 - 3q > 0 \\ -4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 + 18pqr - 27r^2 > 0. \end{array}\right\}$$

Telles sont les conditions cherchées.

Discussion. Pour savoir si le calcul que l'on vient de faire ne peut pas se simplifier, et par suite si les conditions ci-dessus ne peuvent pas être exprimées plus simplement, faisons disparaître le second terme de l'équation proposée,

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

posant $x = y - \frac{1}{3}p$ et substituant, on arrive à l'équation

$$y^3 + \left(-\frac{1}{3}p^2 + q\right)y + \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r = 0,$$

équation de la forme

$$(m) \qquad y^3 + ay + b = 0,$$

en posant

$$a = -\frac{1}{3}p^2 + q$$

$$b = \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r.$$

Appliquant à l'équation (m) les mêmes calculs qu'à la proposée, et observant que l'on a $p = 0$, $q = a$, $r = b$, on obtient la suite des polynômes

$$y^3 + ay + b$$
$$3y^2 + a$$
$$-2ay - 3b$$
$$-4a^3 - 27b^2,$$

et pour que les valeurs de y soient réelles, il faut et il suffit qu'en attribuant à y des valeurs très-grandes négatives, les quatre polynômes ne présentent que des variations de signe.

Or le premier sera négatif, le second sera positif; le troisième doit donc être négatif, ce qui exige la condition $a < 0$, et le quatrième doit être positif, ce qui exige la condition

$$-4a^3 - 27b^2 > 0$$

ou

$$-\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}.$$

Or cette condition exigeant que $-\frac{a^3}{27}$ soit positif, renferme implicitement la condition de $a < 0$; si donc la première condition est une conséquence de la seconde, la seule et unique condition de réalité des trois racines sera exprimée par

$$-4a^3 - 27b^2 > 0,$$

ou

$$4a^3 + 27b^2 < 0,$$

ou

$$\frac{-a^3}{27} > \frac{b^2}{4},$$

ou, remplaçant a et b par leurs valeurs,

$$\frac{\left(\frac{1}{3}p^2 - q\right)^3}{27} > \frac{\left(\frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r\right)^2}{4}.$$

Cette condition et la condition $a < 0$ ou $\frac{1}{3}p^2 > q$, qui y est implicitement renfermée, doivent être identiques avec celles que nous avions trouvées primitivement, savoir :

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0 \\ -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 > 0, \end{cases}$$

et pour qu'il n'y ait aucune contradiction entre les deux calculs, il faut que la condition $p^2 - 3q > 0$ soit une conséquence de la condition

$$-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 > 0,$$

chose qui nous est enseignée par le second calcul et qui, de plus, va nous mettre sur la voie pour nous faire trouver que la première condition est une conséquence de la seconde; à cet effet, retranchons vingt-sept fois le second polynôme de quatre fois le cube du premier, nous aurons

$$4p^6 - 36p^4q + 108p^3r + 81p^2q^2 - 486pqr + 729r^2.$$

Le second calcul nous avertit que ce polynôme est un carré parfait, et en effet il est le carré du polynôme $2p^3 - 9pq + 27r$; le reste étant donc une quantité positive, il en résulte que quatre fois le cube de $p^2 - 3q$ est plus grand que vingt-sept fois le second polynôme ; si donc le second polynôme est positif (c'est-à-dire si la seconde condition est remplie), quatre fois le cube de $p^2 - 3q$ sera aussi positif, et par conséquent $p^2 - 3q > 0$, c'est-à-dire enfin que la première condition est une conséquence de la seconde ; d'où l'on peut conclure qu'une seule condition suffit pour établir la réalité des trois racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, condition qui est exprimée par

$$-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 > 0 \qquad \text{(P)},$$

qui se réduit à $4a^3 + 27b^2 < 0$, lorsque l'équation se réduit à $y^3 + ay + b = 0$.

Note. Nous rappellerons ici une observation de Legendre, qu'on peut ainsi généraliser : Étant donnée une équation algébrique de degré m, formons les produits différents des racines deux à deux ; donnons, dans chaque produit, au premier facteur l'exposant positif entier p', et au second facteur l'exposant positif entier q' ; désignons par y la somme de ces produits ainsi obtenus, et par z la somme de ces produits, en changeant p' en q', et *vice versâ* ; $y+z$ et yz sont des fonctions symétriques des racines ; on peut donc les obtenir en fonctions entières des coefficients de l'équation, et par conséquent $(y-z)^2=(y+z)^2-4yz$ peut aussi s'exprimer en fonctions des mêmes coefficients : si cette fonction est négative, l'équation a des racines imaginaires, et si cette fonction n'est pas un carré parfait, l'équation ne peut avoir toutes ses racines irrationnelles ; si $m=3$, $p'=2$, $q'=1$, alors $(y-z)^2$ est la fonction (P) de M. Tarnier. Il faut remarquer qu'une telle condition est suffisante pour l'équation du troisième degré, mais non pas pour les équations de degré supérieur. (*Voir* t. I, p. 151 et 513.) Tm.

NOTE SUR LES MAXIMA D'UN PRODUIT.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

Décomposer un nombre a en parties telles que le produit de puissances positives déterminées de ces parties soit un maximum.

Soient $x, y, z, u \ldots$ ces parties, on a $x+y+z+u+\ldots=a$. Or, en appelant m, n, p, q, les exposants des puissances, il faut que $x^m y^n z^p u^q \ldots$ soit un maximum. Et il est évident qu'on y satisfera en rendant $\dfrac{x^m y^n z^p u^q \ldots}{m^m n^n p^p q^q}$ un maximum ; car le dénominateur est constant.

Mais on a $\frac{x^m y^n z^p u^q \dots}{m^m n^n p^p q^q \dots} = \frac{x}{m}\frac{x}{m}\frac{x}{m}\dots\frac{y}{n}\frac{y}{n}\dots\frac{z}{p}\frac{z}{p}\dots\frac{u}{q}\frac{u}{q}\dots$
et il est aussi évident que $\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\dots+\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\dots$
$+\frac{z}{p}+\frac{z}{p}+\dots+\frac{u}{q}+\frac{u}{q}+\dots=\frac{mx}{m}+\frac{ny}{n}+\frac{pz}{p}+\frac{qu}{q}+$
$\dots = x+y+z+u+\dots = a$. C'est donc comme si on proposait de décomposer a en $m+n+p+q+\dots$ facteurs $\frac{x}{m}.\frac{x}{m}\dots\frac{y}{n}.\frac{y}{n}\dots\frac{z}{p}.\frac{z}{p}\dots\frac{u}{q}.\frac{u}{q}\dots$, dont le produit soit maximum, et l'on sait qu'il faut, pour cela, que tous les facteurs soient égaux ; on a donc $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{u}{q}\dots$ pour les équations qui, conjointement avec $x+y+z+u\dots=a$, serviront à trouver les valeurs de $x, y, z, u\dots$ qui rendent le produit maximum ; il y a autant d'équations que d'inconnues, et l'on a

$$x=\frac{am}{m+n+p+\dots}$$
$$y=\frac{an}{m+n+p+\dots}$$
$$z=\text{etc.}$$

On voit en même temps que, par le même procédé, on rendrait $x^{-m}y^{-n}z^{-p}u^{-q}\dots=\frac{1}{x^m y^n z^p u^q\dots}$ minimum.

Il en serait de même pour

$$x^{\frac{m}{m'}}y^{\frac{n}{n'}}z^{\frac{p}{p'}}u^{\frac{q}{q'}}=\sqrt[m']{x^m}\sqrt[n']{y^n}\sqrt[p']{z^p}\sqrt[q']{u^q}\ ;$$

car élevant à la $m'n'p'q'\dots^{\text{ième}}$ puissance, on aura $x^{mn'p'q'}y^{nm'p'q'}z^{pm'n'q'}u^{qm'n'p'}$; et si ce produit est maximum, il en sera de même de l'autre. Donc il suffit de poser $\frac{x}{mn'p'q'}=\frac{y}{nm'p'q'}=\frac{z}{pm'n'q'}=\frac{u}{qm'n'p'}=\dots$, ou divisant par $m'n'p'q'\dots\ \frac{x}{\left(\frac{m}{m'}\right)}=\frac{y}{\frac{n}{n'}}=\frac{z}{\frac{p}{p'}}=\frac{u}{\frac{q}{q'}}\dots$

Enfin, on rendra par le même procédé,

$$x^{-\frac{m}{m'}} y^{-\frac{n}{p'}} z^{-\frac{p}{p'}} u^{-\frac{q}{q'}} \ldots \text{ un minimum.}$$

Cette question est ainsi démontrée par l'algèbre élémentaire. (*Voir* t. II, p. 417).

THÉORÈMES STATIQUES
SUR LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES.

PAR M. HUET,
régent au collége de Pamiers.

—

Si plusieurs forces sont représentées par les côtés d'un polygone plan ou gauche, en grandeur et en direction, et, de plus, si elles agissent dans le même sens, elles se réduisent à un couple.

Je vais d'abord prouver que ce théorème est vrai pour le triangle, et j'en conclurai ensuite qu'il a lieu pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Soit le triangle ABC (*fig.* 19) ; P, Q, R, les forces agissant dans la direction de ses côtés, dans le même sens, et ayant pour intensité la grandeur des côtés. La force Q appliquée au point C peut être supposée appliquée en B ; alors elle se compose avec la force P appliquée en B, et fournit la résultante BS, et on a CS = BD = AB. Les deux triangles ABC, CBS sont égaux comme ayant BC commun, l'angle ABC égale BCS, et AB = CS. Donc BS = AC, et les angles BCA, CBS sont égaux ; donc la force BS est égale à la force AR et lui est parallèle ; donc les trois forces P, Q, R se réduisent à un couple.

Soit maintenant un polygone d'un nombre quelconque de côtés ABCDEFG (*fig.* 20) ; P, Q, R, S, T, U, V les forces qui agissent dans la direction de ses côtés, dans le même sens, et ayant pour intensités les grandeurs de ces côtés. Menons les diagonales AC, AD, AE, AF, appliquons aux deux extrémités de chacune de ces diagonales, et dans leur direction deux forces égales et opposées, dont l'intensité soit égale en grandeur à ces diagonales, ce qui ne change pas l'état du système. On voit alors que chaque triangle se trouve sollicité comme dans le cas précédent, que partout pour chaque triangle les forces se réduisent à un couple, et par conséquent que toutes les forces appliquées au polygone se réduisent aussi à un couple.

Note. I. Pour opérer la composition des couples par la méthode des *axes*, on prend un point quelconque O dans l'espace, et on abaisse des perpendiculaires, représentant les *axes*, sur les plans des couples, soit P le pied d'une de ces perpendiculaires. Supposons un homme placé sur le plan du couple, ayant les pieds en P et la tête en O; pour représenter le sens du couple, M. Poinsot établit cette convention : si le couple tourne de gauche à droite, on porte la ligne proportionnelle à la grandeur du couple, sur le prolongement de PO, à partir de O, en s'éloignant du plan ; et si le couple tourne de droite à gauche, on porte la ligne représentant l'intensité du couple, de O vers P ; d'après cette convention, on voit que lorsque deux couples tournent dans le même sens, le couple résultant tourne aussi dans le même sens, et par conséquent, si tant de couples qu'on voudra tournent dans le même sens, l'équilibre est impossible ; c'est ce qui a lieu, dans le cas actuel, en prenant un des angles du polygone pour point de départ des axes ; on peut même prendre pour origine des axes, un point quelconque, situé dans l'intérieur du polygone, lorsqu'il est plan.

II. Chaque couple est ici proportionnel au double de l'aire d'un triangle correspondant ; représentant donc l'intensité du couple par G, on a, d'après la formule relative à la résultante, $G^2 = 4\Sigma A^2 + 8\Sigma AA' \cos A,A'$; A, A', A'' ...., sont les aires des triangles ABC, ACD, ADG, etc. ; ΣA^2 est la somme des carrés des aires des triangles, et $\Sigma AA' \cos (A,A')$ est la somme qu'on obtient, en multipliant ces aires deux à deux et par le cosinus de l'angle respectif et ajoutant les produits.

III. Cette formule exprime aussi ce théorème de géométrie : Dans toutes les pyramides qui ont pour base le même polygone, la somme des aires des carrés des faces triangulaires plus le double de la somme des produits de ces aires prises deux à deux et par le cosinus de l'angle respectif des faces, est une quantité constante ; et lorsque le polygone est plan, cette quantité constante est égale au carré de l'aire de la base.

IV. Pendant le mouvement du système, le centre de moyenne distance des sommets du polygone reste immobile (*voy.* p. 241, t. II). En général, et d'après le même principe, si des mobiles, partant simultanément des sommets d'un polygone, parcourent les côtés, dans le même sens, avec une vitesse uniforme et proportionnelle respectivement à ces côtés, le centre de gravité de ces mobiles reste fixe. Cette proposition était déjà connue des anciens, mais pour le triangle seulement. *Voici comment elle est énoncée dans* Pappus (liv. 8, prop. 2) : Soit le triangle ABC et le triangle inscrit GHK ; G est entre A et B, H entre B et C ; K entre A et C ; si l'on a $\frac{AG}{BG} = \frac{BH}{CH} = \frac{CK}{AK}$, les deux triangles ont même centre de gravité.

V. Si l'on applique selon les côtés d'un polyèdre deux forces égales et directement opposées, il y a équilibre ; représentons ces forces respectivement par les côtés en grandeur et en direction ; le système se partage en deux autres, dont chacun a pour résultante un couple ; les deux couples résultants sont égaux, ont le même axe et tournent en sens inverse ; les couples composants ne sont autres que les doubles des aires des faces du polyèdre ; si l'on supprime une face, alors les faces restantes donneront pour résultante un couple représenté par le double de l'aire de la face supprimée ; appliquant la formule connue pour les couples résultants, on a ce théorème général (Carnot, *Géom. de position*, p. 310) : Le carré de l'une quelconque des faces d'un polyèdre est égale à la somme des carrés de toutes les autres faces, moins le double de la somme des produits de toutes les autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

Le théorème (III) est un cas particulier.

VI. Il existe un théorème analogue pour les polygones (*Géométrie de position*, p. 308) ; en général, tout théorème de statique peut se transformer en théorème de géométrie. En décomposant un système de forces dont on connaît l'état résultant, en d'autres groupes de forces, on parvient à beaucoup de théorèmes consignés dans l'ouvrage cité. Tm.

SOLUTION DU PROBLEME 71. (T. II, p. 327.)

PAR M. FAURE (H.),
élève en spéciales.

—

Soit l'équation $x^3+3px^2+3qx+r=0$.

Posons $A=\sqrt{p^2-q}$. Si les trois racines sont réelles, elles sont comprises, la première entre $-p-2A$ et $-p-A$; la deuxième entre $-p-A$ et $-p+A$; la troisième entre $-p+A$ et $-p+2A$.

Posons $x=y-p$. Si l'on substitue cette valeur à la place de x dans l'équation, la transformée

$$(1) \qquad y^3-3A^2y+2p^3-3pq+r=0, \qquad (*)$$

(*) Cette équation peut se mettre sous la forme $(y-A)^2(y+2A)-2A^3+2p^3-3pq+r=0$; tous les résultats deviennent intuitifs. Tm.

manque de second terme. Les racines de cette équation étant égales à celles de la proposée augmentées de p, la question sera ramenée à prouver que l'équation en y a une racine comprise entre $-2A$ et $-A$, la deuxième entre $-A$ et $+A$, et la troisième entre $+A$ et $+2A$, en supposant d'abord que toutes les racines soient réelles.

Pour démontrer qu'il y a une racine entre $-2A$ et $-A$, il suffit de faire voir que si l'on substitue ces quantités à la place de y dans l'équation (1), on obtient deux résultats de signes contraires.

Or, en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation on a :

$$y^2 - A^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \pm A.$$

Si les racines sont réelles, celles de la dérivée le sont aussi ; donc A^2 est une quantité positive. Le second terme de l'équation est donc négatif, quant au dernier il peut être positif ou négatif. Supposons-le d'abord positif. D'après le théorème de Rolle, il y a une racine entre $+A$ et $-A$; or $-A$ donne pour résultat $2A^3 + 2p^3 - 3pq + r$, quantité positive ; donc $+A$ donne un résultat négatif.

Effectuons la substitution de $-A$ et de $-2A$

pour $y = -A$, on a pour résultat $2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2$.

$y = -2A$ » $-2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2$.

Le premier résultat est positif ; je dis que le deuxième est négatif. Si dans l'équation on fait $y = 0$, on obtient un résultat positif, ainsi que pour $y = \infty$. Mais comme l'équation a deux racines positives, puisque son premier membre offre deux variations, et que toutes ses racines sont réelles ; on est certain en vertu du théorème de Rolle, que si l'on substitue la racine positive $+A$ de la dérivée dans l'équation, on doit obtenir un résultat négatif. Faisant la substitution, on trouve

$$-2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2 < 0.$$

Donc entre $y = -A$ et $y = -2A$, il y a une racine de l'équation. Comme $+A$ et $-A$, ont aussi donné des résultats de signes contraires, il y a une racine entre $+A$ et $-A$.

Si l'on fait $y = +2A$, on obtient un résultat négatif; par conséquent entre $+A$ et $+2A$, il y a une racine de la transformée.

Si l'équation avait son dernier terme négatif, on changerait y en $-y$, et en changeant les signes de tous les termes, on obtiendrait une équation dans laquelle le second terme est négatif et le dernier positif; on pourra donc en tirer les mêmes conséquences que précédemment.

Si l'équation n'a qu'une racine réelle, la dérivée a ses racines imaginaires. Par conséquent la racine réelle de l'équation ne peut être comprise entre les quantités imaginaires $-2A$ et $+2A$.

SOLUTION DU PROBLÈME 42. (Page 519, t. I.)

PAR M. VIDAL (J.),
élève au collége de Montpellier.

Lieu des foyers des paraboles qui ont une tangente commune et une corde commune parallèle à cette tangente.

—

Soit AB, la tangente donnée (*fig.* 21), et DD′ la corde commune; je prendrai pour axe des x une perpendiculaire menée par le point C, milieu de DD′ sur la tangente, le lieu cherché devant évidemment être symétrique par rapport à cette droite; et pour axe des y la tangente commune AB. Je désigne par a et b les coordonnées du point D, et celles du point D′ seront $a, -b$. Par le point C je mène une droite quelconque CE, cette droite sera un diamètre d'une des paraboles, dont le foyer est un point du lieu cherché; la tangente AB touchera la parabole dont CE est le diamètre, au point E; par conséquent si par le point E, je mène GE, faisant avec la tangente un angle égal à CEO, le foyer de la parabole que nous considérons devra se trouver sur cette droite. Je désigne par (x', y') les coordonnées de ce foyer F; si je prends le symétrique R de ce point par rapport à la tangente, j'aurai un point de la directrice de la parabole que nous considérons; si par ce point R, j'abaisse une perpendiculaire sur le diamètre CE, j'aurai la directrice elle-même; exprimant maintenant que le point D, est également distant du foyer (x', y') et de la directrice, j'exprime que DD' est une corde de la parabole, j'obtiens ainsi deux équations de condition entre (x', y'), les quantités connues, et la variable qui fixe la position du diamètre CE; en éliminant cette variable, j'aurai l'équation du lieu cherché; il n'y a plus qu'à exécuter ce que je viens d'indiquer.

L'équation d'une droite quelconque passant par le point C, est

$$y = m(x - a) \qquad (1);$$

celle de la droite GE est par conséquent

$$y = -m(x + a).$$

La première équation de condition sera donc

$$y' = -m(x' + a). \qquad (2)$$

Les coordonnées du point symétrique du foyer par rapport à la tangente sont $(y', -x')$, l'équation de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le diamètre est donc·

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x + x'),$$

ou bien

$$m(y - y') + (x + x') = 0.$$

La deuxième équation de condition sera donc

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = \frac{\{m(b - y') + a + x'\}^2}{1 + m^2}.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer m entre cette équation, et l'équation (2) ; pour cela de la 1re on tire la valeur de m, on la porte dans celle qui est ci-dessus, et on trouve que l'équation du lieu cherché est en supprimant les accents :

$$(y-b)^2 (x+a)^2+y^2 (x-a)^2=4ax (x+a)^2-$$
$$-2y(b-y) (x+a)^2.$$

A la seule inspection de cette équation, on voit que si on porte l'origine au point de l'axe des x, symétrique du point C, par rapport à la tangente, elle se simplifiera, il n'y a donc qu'à remplacer x, par $x-a$, et il vient :

$$(y-b)^2x^2+y^2(x-2a)^2=4a(x-a)x^2+2y(y-b)x^2.$$

Effectuant les calculs et simplifiant, on trouve finalement que l'équation du lieu est :

$$4ax^3+4ay^2x-4a^2x^2-4a^2y^2-b^2x^2=0. \qquad (3)$$

Cette équation nous montre tout de suite que l'origine est un point de la courbe et même un point multiple, parce qu'en faisant $x=0$ et $y=0$, on a successivement deux valeurs de x et de y qui se réduisent à zéro ; l'équation de la tangente en ce point est :

$$4a^2x^2+4a^2y^2+b^2x^2=0.$$

Cette équation étant formée de la somme de trois carrés, il s'ensuit qu'elle ne représente rien du tout ; nous en concluons que l'origine est un point multiple isolé.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des x sont données par l'équation :

$$4ax^3-4a^2x^2-b^2x^2=0.$$

Cette équation est divisible par x^2, ce qui nous donne les deux points situés à l'origine des coordonnées ; en divisant par ce facteur, il nous reste

$$4ax-4a^2-b^2=0,$$

d'où
$$x = \frac{4a^2 + b^2}{4a}.$$

Comme vérification, on peut chercher directement cette valeur au moyen du théorème que j'ai démontré (page 445 du t. II) ; car cette valeur est a, augmenté du quart du paramètre de la parabole dont l'axe principal serait l'axe des x. D'après ce théorème on a,
$$2pa = b^2,$$
d'où
$$2p = \frac{b^2}{a},$$
si au quart de cette quantité nous ajoutons a, nous aurons $\frac{b^2 + 4a^2}{4a}$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

Supposons que le point H, qui nous détermine cette abscisse, soit compris entre les deux points O et C ; construisons le lieu ; de l'équation (3), je tire
$$y^2 = \frac{(b^2 + 4a^2)\,x^2 - 4ax^3}{4a\,(x - a)}.$$
Cette valeur nous confirme dans ce que nous avions dit en commençant, c'est-à-dire, que le lieu est symétrique par rapport à l'axe des x. A la seule inspection de cette valeur, on voit que nous ne pouvons pas donner à x des valeurs négatives, parce que les valeurs correspondantes de y seraient imaginaires. Les valeurs plus petites que a produisent le même effet, excepté $x = 0$, qui donne $y^2 = 0$, ce qui nous fait voir encore plus clairement que l'origine est un point isolé. La courbe cherchée est donc entièrement à droite de l'ancien axe des y.

Le numérateur de la valeur de y^2 nous montre que nous ne pouvons pas donner à x, des valeurs plus grandes que $\frac{b^2 + 4a^2}{4a}$, pour laquelle on a $y = 0$, la ligne HI est donc une limite de la courbe. A mesure que la valeur de x se rapproche de a, la valeur de y augmente, et lorsque $x=a$, cette valeur devient infinie; la tangente commune est donc asymptote de la courbe ; cherchant en effet directement les équations des asymptotes, on trouve cette droite comme seule et unique asymptote. Nous connaissons maintenant assez de choses sur cette courbe pour pouvoir la tracer. Cette courbe a deux points d'inflexion, placés symétriquement par rapport à l'axe des x. Au moyen de la méthode donnée par M. Midy (page 232, tome II), on trouvera facilement la position de ces deux points.

Si on voulait avoir le lieu des sommets des mêmes paraboles, on pourrait se servir de ce que nous venons de faire. Soit F un foyer, on obtiendra facilement la directrice RS, comme nous l'avons indiqué ci-dessus ; du point F, abaissant une perpendiculaire sur la directrice et prenant le milieu de SF, on aura le sommet de la parabole que nous considérons. En désignant par x et y les coordonnées du sommet, et x', y' les coordonnées du foyer et exprimant toutes les conditions ci-dessus indiquées, on arrive aux équations.

$$y-y'=m(x-x'), \tag{4}$$

$$(x'-x^2)+(y'-y)^2=\frac{\{m(y-y')+x+x'\}^2}{1+m^2}, \tag{5}$$

$$y'=-m(x'+a), \tag{6}$$

$$(x'-a)^2+(y'-b)^2=\frac{\{m(b-y')+a+x'\}^2}{1+m^2}. \tag{7}$$

Si on élimine m entre les équations (6) et (7), nous savons à quoi nous arrivons; il n'y aurait plus qu'à déterminer x', y', m, au moyen des équations (4), (5), (6), mais l'élimination serait très-compliquée.

Note. Ce genre de problèmes se résout d'une manière directe et facile par nos formules générales. Conservons la même notation et les mêmes axes des coordonnées ; on a, pour l'équation de la conique,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ;$$

la conique est une parabole, donc $m = B^2 - 4AC = 0$; l'axe des y est une tangente, donc $l = D^2 - 4AF = 0$; les deux points donnés fournissent l'équation

$$Ab^2 + b(Ba + D) + Ca^2 + Ea + F = 0 ,$$

cette équation devant être satisfaite par $+b$ et $-b$, on a donc $Ba + D = 0$ et $Ab^2 + Ca^2 + Ea + F = 0$; faisant $\frac{B}{A} = z$, on tire de ces diverses équations

$$\frac{C}{A} = \frac{z^2}{4} ; \quad \frac{D}{A} = -az ; \quad \frac{E}{A} = -\frac{b^2}{a} - \frac{a}{2}z^2 ; \quad \frac{F}{A} = \frac{a^2z^2}{4} ;$$

$$\frac{k}{A^2} = \frac{2E}{A} - \frac{BD}{A^2} = -\frac{2b^2}{a} ; \quad \frac{k'}{A^2} = 2\frac{C}{A}\cdot\frac{D}{A} - z\cdot\frac{E}{A} = \frac{b^2}{a}z ;$$

$$\frac{l''}{A} = \frac{b^2}{a^2}(a^2z^2 + b^2) ; \quad \frac{L}{A^3} = \frac{k^2}{4A^4} = \frac{b^4}{a^2} ; \quad N = 1 + \frac{z^2}{4}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de α et de β (p. 432, t. II), et considérant que $\cos\gamma = 0$, il vient, après avoir divisé, numérateur et dénominateur, par A^4,

$$\alpha = \frac{b^2}{a(4 + z^2)} ; \quad \beta = \frac{z}{2a}\cdot\frac{az^2 + 4a^2 + b^2}{z^2 + 4}.$$

Éliminant z^2, entre α et β, on en tire $z = \frac{2\beta}{a + \alpha}$; substituant cette valeur de z dans α, il vient

$$(\alpha + a)^2[4a\alpha - b^2] + 4a\alpha\beta^2 = 0 ; \qquad (1)$$

remplaçant α par $x - a$, et β par y, on obtient l'équation (3) de M. Vidal.

En général, au moyen de nos formules, on peut, sans faire aucune construction nouvelle, écrire de suite les équations et ramener à une question d'élimination tous les problèmes où, connaissant quatre conditions dans une conique, il s'agit de déterminer le lieu géométrique des foyers, du centre, des sommets ou de tout autre point déterminé dans le plan de la conique.

L'équation (9), relative aux coordonnées du sommet, donne (p. 26, t. II), faisant $m=0$,

$$4N^2(l-2Akx)=B^2L,$$
$$4N^2(l'-2Ck'y)=B^2L;$$

substituant pour N, l, l', $\frac{k}{A^2}$, $\frac{l'}{A^2}$, $\frac{L}{A^3}$, les valeurs trouvées ci-dessus, on parvient facilement à ces deux équations :

$$z^3ay-2a^2z^2+2(4ax-b^2)=0;$$
$$(4+z^2)^2x=\frac{b^2z^2}{a}.$$

Éliminant z, on obtient une équation entre x et y, coordonnées du sommet, et qui peut monter au plus au 16^e degré.

Tm.

QUESTION SUR LES ÉQUATIONS DÉRIVÉES (*),

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD),
élève en spéciales (première place).

—

Quelles sont les conditions nécessaires pour que les équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées d'un polynôme de la forme

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}\ldots\ldots+P_nx^{m-n}\ldots\ldots+P_m,$$

depuis la $(m-n)^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(m-1)^e$, aient une racine commune?

(*) Proposée au collége Louis-le-Grand. Classe de M. Richard, en février 1844.

Quelle est la forme générale des polynômes fonctions de x du $m^{\text{ième}}$ degré qui jouissent de cette propriété?

Résoudre l'équation que l'on obtient en égalant à zéro l'un de ces polynômes, m étant égal à une puissance de 2 et n étant égal à $m-1$.

I.

Posons

$$f(x) = x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} \ldots\ldots + P_n x^{m-n} \ldots\ldots + P_m.$$

La dérivée de ce polynôme, de l'ordre $(m-n)$, étant désignée par $f^{(m-n)}(x)$,

$$\begin{aligned} f^{(m-n)}(x) = m(m-1) \ldots\ldots (n+1)\, x^n + (m-1)(m-2) \ldots \\ \ldots\ldots n P_1 x^{n-1} + (m-2)(m-3) \ldots\ldots (n-1)\, P_2 x^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + (m-n)(m-n-1) \ldots\ldots 2.1.P_n, \end{aligned}$$

le terme général de ce développement est

$$(m-p)(m-p-1) \ldots\ldots (n-p+1)\, P_p\, x^{n-p},$$

l'indice p étant plus petit que n.

Si on suppose $n=1$, on aura ainsi la dérivée de l'ordre $m-1$:

$$f^{(m-1)}(x) = m(m-1) \ldots 2.x + (m-1)(m-2) \ldots 1.P.$$

Posons donc les équations

$$f^{(m-n)}(x)=0, f^{(m-n+1)}(x)=0 \ldots f^{(m-2)}(x)=0, f^{(m-1)}(x)=0.$$

Considérés relativement à $f^{(m-n)}(x)$, les premiers membres des équations qui suivent $f^{(m-n)}(x)=0$ sont les $(n-1)$ premières dérivées de $f^{(m-n)}(x)$. Si donc on suppose qu'il existe une racine commune aux n équations précédentes, il résulte de la théorie des racines égales qu'elle sera multiple dans $f^{(m-n)}(x)$, et que son degré de multiplicité sera égal à n; d'ailleurs cette racine sera facile à obtenir, car $f^{(m-1)}x=0$ étant du premier degré, on en tire immédiatement

$$x = -\frac{P_1}{m}.$$

$f^{(m-n)}(x)$ étant du degré n et contenant le binôme $x+\frac{P_1}{m}$ à la puissance n, sera donc égal à $\left(x+\frac{P_1}{m}\right)^n$, à un facteur numérique près, facteur numérique qui n'est autre que le coefficient de x^n dans $f^{(m-n)}(x)$. Divisant cette fonction par $m(m-1)\ldots(n+1)$, on aura

$$x^n+\frac{n}{m}P_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{m(m-1)}P_2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)}P_3x^{n-3}+$$

$$\ldots\ldots=\left(x+\frac{P_1}{m}\right)^n=x^n+n.\frac{P_1}{m}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2x^{n-2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3x^{n-3}+\ldots\ldots$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux nombres devant être égaux, on a les identités

$$\frac{n}{m}P_1=n.\frac{P_1}{m},$$

$$\frac{n(n-1)}{m(m-1)}P_2=\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)}P_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3;$$

la première montre que P_1 reste indéterminé; mais des suivantes on tire P_2, P_3,..... P_n en fonctions de P_1 :

$$P_2=\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2,\qquad P_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3,\text{etc.}$$

Telles sont les $(n-1)$ conditions demandées.

II.

Le polynôme proposé est de la forme

$$x^m+m.\frac{P_1}{m}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2x^{m-2}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3 x^{m-3}+\ldots..$$

$$\ldots..+\frac{m(m-1)\ldots..(m-n+1)}{1.2.\ldots..n}\left(\frac{P_1}{m}\right)^n x^{m-n}+$$

$$+P_{n+1}x^{m-n-1}+\ldots..+P_{m-1}x+P_m,$$

c'est-à-dire que les $(n+1)$ premiers termes sont égaux aux $(n+1)$ premiers termes du développement de la puissance m de $\left(x+\frac{P_1}{m}\right)$.

III.

Si on suppose $n=m-1$, d'où $m-n=1$, le polynôme égalé à zéro devient

$$x^m+m.\frac{P_1}{m}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2 x^{m-2}+\ldots..$$

$$\ldots..+m\left(\frac{P_1}{m}\right)^{m-1}x+P_m=0,$$

ou encore

$$\left(x+\frac{P_1}{m}\right)^m+P_m-\left(\frac{P_1}{m}\right)^m=0,$$

équation telle que si on fait disparaître le second terme, elle se réduit à une équation binôme.

La formule qui en donne les racines est

$$x=-\frac{P_1}{m}+\sqrt[m]{\left(\frac{P_1}{m}\right)^m-P_m},$$

le radical devant recevoir toutes les déterminations dont il est susceptible.

Dans le cas particulier où m est une puissance de 2, l'équation se résout par une suite d'extractions de racines carrées.

SUR LES ENVELOPPES D'UNE DROITE,

inscrite dans un angle rectiligne et conséquences pour les courbes en général.

—

I. Prenant les côtés d'un angle rectiligne pour axes coordonnés, écrivons les quatre équations :

$$ay+bx = ab, (1); \quad \varphi(a, b) = 0 \ (2); \quad y + xb' = b + ab' \ (3);$$
$$\mathrm{D}_a\varphi + b'\mathrm{D}_b\varphi = 0 \ \ (4).$$

La première équation est celle d'une droite mobile ; la seconde équation est une relation donnée entre les segments formés sur les axes par la droite mobile; la troisième équation est la dérivée de (1), en regardant x, y comme constantes, a comme variable indépendante, et b' est la fonction prime de b, considérée comme fonction de a, l'équation (4) est dérivée de l'équation (2); $\mathrm{D}_a\varphi$ désigne la dérivée de $\varphi(a, b)$ prise par rapport à a; $\mathrm{D}_b\varphi$ la dérivée de $\varphi(a, b)$, prise par rapport à b. — Cela posé, éliminant a, b, b' entre ces quatre équations, on obtient une relation entre x et y, qui est l'équation de l'enveloppe de la droite mobile. (*Voir*, pour la théorie, la Note de M. Collard, t. 1, pag. 281.)

II. Si φ est une fonction algébrique entière du degré m, elle peut se mettre sous la forme $\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m-1} + \mathrm{P}_{m-2} + \ldots + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_0 = 0$, où P_m désigne une fonction homogène du degré m, P_{m-1} une fonction homogène du degré $m - 1$, et ainsi de suite ; éliminant b' entre les équations (3) et (4), il vient $y\mathrm{D}_b\varphi + a\,\mathrm{D}_a\varphi = x\mathrm{D}_a\varphi + b\mathrm{D}_b\varphi$ (5) ; l'équation (5) est du degré m, l'équation (2) du degré m, et l'équation (1) du second degré, relativement à a et à b ; et x, y sont du premier degré dans ces équations ; donc l'équation finale en x, y ne peut dépasser le degré $2m^2$.

III. Soit $\varphi(a,b) = ap + bq - r = 0$ (2) ; p, q, r sont des constantes données ; on a $D_a\varphi = p$; $D_b\varphi = q$; ainsi l'équation (5) devient $qy + ap = px + bq$; éliminant a, b entre cette équation et les deux équations (1) et (2), il vient

$$(qy + px)^2 - 2qry - 2prx + r^2 = 0 ;$$

équation d'une parabole qui touche l'axe des x, au point où $x = \frac{r}{p}$; et l'axe des y, au point où $y = \frac{r}{q}$ (*).

IV. Éliminant b entre les équation (1) et (2) et entre (2) et (5), on obtient

$$aqy + x(r - ap) = a(r - ap) ; \; qy - px = r - 2ap ;$$

d'où l'on tire $x = \frac{a^2p}{r}$; $y = \frac{b^2q}{r}$; coordonnées du point de contact sur la droite mobile. Soit M ce point de contact ; A et B les points où la droite mobile coupe les axes des x et des y ; et O l'origine ; on aura $\mathrm{OP} = \frac{a^2p}{r}$; $\mathrm{PM} = \frac{b^2q}{r}$; P est le pied de l'ordonnée du point M ;

$$\text{d'où} \quad \mathrm{AP} = a - \frac{a^2p}{r} = \frac{abq}{r} ; \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{bq}{ap} ;$$

de là résulte cette construction : Sur AB, construisez le triangle ABC, tel qu'on ait $\mathrm{AC} = bq$; $\mathrm{BC} = ap$, le point où la bissectrice de l'angle C rencontre le côté AB est le point de contact M de la droite mobile avec son enveloppe.

Si $p = q = 1$, la figure OACB est un parallélogramme ; le problème revient à partager AB en deux segments inversement proportionnels à OA et OB.

Observation. L'équation (5) renferme le problème traité au

(*) Apollonius, liv. III, prop. XLI.

tome I, pag. 449 ; car $a'Ab'$ étant le segment sur l'axe par une seconde droite mobile, l'on aura $\frac{a'-a}{b'-b} = -\frac{q}{p}$, rapport constant.

V. *Problème.* Sur une courbe continue, on prend des arcs de longueur équivalente; trouver sur chaque corde de l'un quelconque de ces arcs, le point où cette corde touche son enveloppe.

Solution. Le point cherché est celui qui divise cette corde en deux segments réciproquement proportionnels aux longueurs des tangentes qui passent par les deux extrémités de la corde. Ces longueurs sont comptées depuis les points de contact jusqu'au point de rencontre des deux tangentes ; car, dans deux positions voisines, la droite mobile peut être considérée comme terminée, soit à la courbe, soit aux tangentes ; et alors on rentre dans le problème précédent.

VI. *Problème.* Étant données, dans le même plan, deux courbes continues M et N ; mener une tangente à la courbe N, de manière qu'elle intercepte un arc minimum ou maximum sur la courbe M.

Solution. On mène, s'il est possible, à la courbe N une tangente qui devienne corde dans la courbe M, et telle que le point de contact divise la corde en deux segments inversement proportionnels aux longueurs des tangentes menées par les extrémités de la corde à la courbe M ; ces longueurs sont comptées à partir des extrémités de la corde jusqu'au point de rencontre des deux tangentes. En effet, dans une position infiniment voisine, la corde intercepte encore un arc de même longueur (*voir* Prob. précédent) ; donc la différentielle de l'arc est nulle, donc, etc.

Si la courbe M est fermée, il y a deux arcs sous-tendus par la corde ; et nécessairement l'un est un minimum, et l'autre, un maximum ; si la courbe est ouverte, alors la partie ouverte est toujours un maximum, et par conséquent la partie fermée, un minimum (*).

Corollaire I. Un angle étant circonscrit à une courbe, si on partage la corde de contact en deux segments *additifs*, inversement proportionnels aux côtés de l'angle; de toutes les cordes qui passent par le point de division, c'est la corde de contact qui intercepte un arc minimum.

Coroll. II. M. Bonnet a démontré (pag. 68) que, si la courbe M est une parabole, et la courbe N sa développée; le point de contact sur N, le même que le centre de courbure, divise la normale en deux segments, dont l'un, le rayon de courbure, est représenté par 2, et l'autre segment par 1; donc les tangentes menées par les extrémités de la corde, sont dans le même rapport.

Coroll. III. Dans les coniques, la corde qui passe par un point donné et intercepte un arc minimum, n'est jamais la corde conjuguée au diamètre qui passe par ce point; à moins que le point ne se trouve sur un axe principal.

VII. Soit $\varphi(a,\, b) = nab + pb + qa - r = 0$ (2);
$$ay + bx = ab \ (1);\quad D_b\varphi = na + p$$
$$D_a\varphi = nb + q;$$
l'équation (5) devient $a(ny + q) - b(nx + p) = qx - py$; éliminant ab, entre (1) et (2), on obtient
$$a(ny + q) + b(nx + p) = r;$$
de ces deux équations l'on tire
$$a = \frac{r + qx - py}{2(ny + q)};\quad b = \frac{r + py - qx}{2(nx + p)}.$$
Substituant ces valeurs, dans l'équation (1), on obtient, toute réduction faite,
$$(qx - py)^2 - 4nrxy - 2pry - 2rqx + r^2 = 0.$$
Cette équation est celle d'une hyperbole, touchant l'axe des y au point $y = \frac{r}{p}$; et l'axe des x au point $x = \frac{r}{q}$.

(*) Si les deux courbes ont une tangente commune, elle résout le problème.

VIII. On a $y(an+p) - x(bn+q) = bp - aq$

$$any + bnx = r - aq - bp;$$

d'où l'on déduit $x = \frac{a(r-bp)}{r+abn}$; $y = \frac{b(r-aq)}{r+abn}$; coordonnées du point de contact sur la droite mobile.

IX. Si $p = q = 0$, l'équation de la courbe devient $xy = \frac{r}{4n}$; et les coordonnées du point de contact sont $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$; donc il est alors au milieu de la droite interceptée; propriété très-connue de l'hyperbole entre ses asymptotes, et ab est proportionnel à l'aire du triangle formé par la droite mobile et les droites fixes (*).

X. *Problème.* Sur une courbe continue on prend des segments d'aires équivalentes ; trouver sur chaque corde le point de contact, avec l'enveloppe de cette corde.

Solution. Le point de contact est au milieu de la corde. Même raisonnement que pour le problème V.

XI. *Problème.* Etant données deux courbes, désignées par M et N, mener une tangente à la courbe N, telle qu'elle intercepte, dans la courbe M, un segment d'une aire minima ou maxima.

Solution. On mène la tangente de manière que le point de contact soit au milieu de la corde qu'elle forme dans la courbe M.

Corollairè. I. Ainsi de toutes les cordes qui passent par un point fixe, celle qui a son milieu en ce point, retranche le segment de moindre aire.

Corollaire II. Les théorèmes énoncés pag. 65 et 66, appartiennent à toutes les lignes planes continues, il suffit de prendre pour N la développée de M.

XII. $\varphi(a,b) = a^2 + b^2 + mab - r = 0$. (*Voir* p. 265, du tome I.)

(*) Apollonius, lib. III, prop. XLIII.

XIII. *Problème.* **Une corde de longueur constante étant inscrite dans une courbe, trouver le point où la corde touche l'enveloppe.**

Solution. Ayant mené par l'extrémité de la corde deux normales à la courbe, la projection du point d'intersection des deux normales sur la corde, est le point de contact cherché. (*Voir* t. II, p. 289.)

Observation. Dans une ellipse, l'enveloppe est une ligne du quatrième degré. (*Annales de Gergonne.*)

XIV. *Problème.* Étant données deux courbes M et N dans un même plan; mener une tangente à la courbe N, de manière que la corde interceptée dans la courbe M soit un maximum ou un minimum.

Solution. Il faut que la normale à la courbe N, menée par le point de contact et les deux normales à la courbe M passant par les extrémités de la corde, se rencontrent en un même point.

Coroll. 1. De toutes les cordes qui passent par un point donné, la corde maxima ou minima est celle où la perpendiculaire à la corde passant par ce point, et les deux normales menées par les extrémités de la corde, convergent vers le meme point.

Coroll. II. Si la corde est elle-même normale en une de ses extrémités, il faut aussi qu'elle soit normale par l'autre extrémité ; alors elle est une corde maxima ou minima.

Si le point donné est sur la courbe, il faudra de ce point mener une normale, à une autre partie de la courbe.

Observation. Il est inutile d'avertir que chaque question peut admettre plusieurs solutions, et qu'il y a lieu à des *maxima maximorum*, etc.

Toutes ces questions ont été résolues à l'aide du calcul différentiel, par M. Magnus. (*V.* Gergonne, t. XVI, p. 80.)

Ces diverses solutions ne se rapportent qu'aux points où la courbe a son cours ordinaire, et sont susceptibles de modifications dans les points dits *singuliers*.

XV. Toutes les fois qu'on a

$$\varphi(a,b)=2kab^2+2k'ba^2-lb^2+2nab-l'a^2-m=0,$$

l'enveloppe de la droite $ax+by=ab$ est une conique (*voir* tom. II, p. 110, corol. 2); il suffit de remplacer d et c par $-\frac{f}{b}$ et $-\frac{f'}{a}$; $\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}, \frac{l}{m}, \frac{n}{m}, \frac{l'}{m}$, sont cinq rapports donnés; les identités (tom. I, p. 490) font connaître les cinq rapports $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$, et l'espèce de la courbe dépend du signe de l'expression suivante :

$$\frac{2nkk'+r^2+lk'^2+l'k^2}{m^3}+\frac{n^2-ll'}{m^2}.$$

Tm.

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

—

M. l'abbé Moigno, savant disciple, lumineux interprète de M. Cauchy, dans un mémoire inséré au Journal de Liouville (*), établit, d'après l'illustre géomètre (**), un théorème fondamental d'où découlent tous ceux que nous venons de dénommer. Nous allons essayer d'approprier cet excellent travail à notre recueil.

1. *Définition I.* La racine d'un polynôme entier est une

(*) Tome V, page 75, 1840.
(**) Journal de l'École polytechnique, cahier XXV, page 176, 1837.

expression ou un nombre qui, substitués dans le polynôme, à la place de la variable, le rendent égal à zéro.

Définition II. Deux termes ou deux résultats consécutifs de même signe forment une permanence; $++$, $--$; deux termes ou deux résultats de signes différents forment une variation *ascendante*, lorsqu'on passe du négatif au positif, $-+$; et une variation descendante, en allant du positif au négatif, $+-$. Cette distinction entre les deux espèces de variations est de la plus haute importance et sert de base à tous les raisonnements qui vont suivre.

2. LEMME I. Dans une série quelconque de résultats, si on représente par A le nombre de variations ascendantes, par D le nombre de variations descendantes, on a

1°	lorsque les termes extr. forment une	perman.	$A-D=0$.
2°	*id.*	variat. ascend.	$A-D=+1$.
3°	*id.*	var. descend.	$A-D=-1$.

Démonstration. N'ayant égard qu'aux signes des résultats extrêmes, on ne peut avoir que l'un de ces quatre cas :

$$+\ \cdots\cdots\ +$$
$$-\ \cdots\cdots\ -$$
$$-\ \cdots\cdots\ +$$
$$+\ \cdots\cdots\ -$$

En quelque nombre et ordre qu'on insère des signes entre les extrêmes, on parvient évidemment à la conclusion énoncée dans le lemme.

Observation. Nous représenterons dans ce qui suit la différence $A - D$ par la lettre ε; de sorte que ε ne peut avoir qu'une de ces trois valeurs, 0, et ± 1.

LEMME II. Lorsque la substitution des valeurs réelles a et b dans un polynôme donnent des résultats, formant une variation, il y a au moins une racine du polynôme comprise entre a et b. La démonstration est dans tous les traités élémentaires.

Lemme III. Si dans l'intervalle de a à b, le polynôme $\varphi_1(x)$ change m fois de signe, et le polynôme $\varphi(x)$, n fois ; dans ce même intervalle, la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passera *au moins* m fois par zéro et n fois par l'infini (*).

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Observation. La fonction peut passer par zéro et par l'infini, sans changer de signe, lorsqu'il existe des racines multiples en nombre pair.

3. Problème I. Étant donnée la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, trouver la valeur de ε (lemme II) dans l'intervalle de a à b.

Solution. On suppose $b > a$; et l'on fait croître x par degrés arbitraires depuis a jusqu'à b. C'est une observation que nous ne répéterons plus et qu'il faut toujours sous-entendre lorsqu'on dit qu'une fonction varie entre deux limites données.

Comparons les signes de $\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)}$ et de $\frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$.

Si cette comparaison donne une permanence, alors $\varepsilon = 0$,

Id. variat. ascend. $\varepsilon = +1$,

Id. variat. descend. $\varepsilon = -1$.

Cette solution est fondée sur le lemme I. Chez M. Cauchy, ε est l'*indice* de la fonction fractionnaire.

4. Lemme IV. Soient deux fonctions réciproques $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$; ε a la même valeur pour les deux fonctions : conséquence évidente de la solution précédente.

(*) On suppose que les deux termes ne deviennent pas nuls simultanément.

5. Représentons par A_∞ le nombre de variations ascendantes que donne la* fonction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi x}$, dans l'intervalle de a à b, en passant par l'infini, et par A_0 le nombre de ces variations, en passant par zéro, de sorte qu'on a $A = A_{(\infty)} + A_{(0)}$ et de même $D = D_{(\infty)} + D_{(0)}$; donc $A - D = (A_\infty - D_\infty) + (A_0 - D_0) = \varepsilon$; faisant $A_{(\infty)} - D_{(\infty)} = E_{(\infty)}$ (*) ; $A_{(0)} - D_{(0)} = E_{(0)}$, il vient $E_\infty + E_{(0)} = \varepsilon$.

On aura de même pour la fonction réciproque $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, $E'_{(\infty)} + E'_{(0)} = \varepsilon$; il est évident qu'on a $E'_{(\infty)} = E_{(0)}$ et $E'_{(0)} = E_{(\infty)}$.

Donc $E_{(\infty)} + E'_{(\infty)} = \varepsilon$; $E_{(0)} + E'_{(0)} = \varepsilon$, équations fondamentales. Nous verrons que l'on n'a besoin que de la première, et nous supprimerons l'indice ∞, mais qu'il faudra toujours sous-entendre ; ainsi la première équation peut s'écrire

$$E + E' = \varepsilon. \tag{1}$$

La quantité E est désignée sous le nom d'*excès* ; et nous appellerons ε l'*excès total*. L'équation (1) peut s'énoncer ainsi : L'*excès total* d'une fonction fractionnaire est égal à l'*excès* de cette fonction, plus l'*excès* de la fonction réciproque et sous-entendu relativement aux limites a et b.

6. De l'équation (1) on tire $E = -E' + \varepsilon$; E se rapporte à $\frac{\varphi_1 x}{\varphi x}$ et E' à $\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$; mais si l'on désigne par E'' l'excès relatif à $-\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$, on a évidemment $E'' = -E'$ et $E = E'' + \varepsilon$; ou bien

$$E = E' + \varepsilon ; \tag{2}$$

E' correspond maintenant à $-\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$.

7. **Lemme V**. Si, dans la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1 x}{\varphi(x)}$, le degré du dénominateur $\varphi(x)$ étant inférieur au degré du numé-

* E_∞ est l'*indice intégral* de M. Cauchy.

rateur, on effectue, autant que possible, la division ; l'*excès* relatif au reste divisé par le dénominateur est égal à l'*excès* de la fonction fractionnaire.

Démonstration. Soit Q le quotient et R le reste ; on a l'identité $\frac{\varphi_1 x}{\varphi(x)} = Q + \frac{R}{\varphi(x)}$. Les deux fractions deviennent toujours infinies ensemble ; et pour des valeurs voisines de celles qui les rendent infinies, ces deux fractions étant très-considérables sont supérieures à la valeur finie du quotient entier Q, et par conséquent sont de même signe et produisent par conséquent des variations de même espèce.

8. **Problème II.** Trouver la valeur de E pour la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, correspondante aux limites a et b.

Solution. Supposons le numérateur d'un degré inférieur, et faisons sur ces deux fonctions les opérations du plus grand commun diviseur. Appelons Q, Q_1, Q_2, ... Q_m .... Q_{n-1} les quotients ; $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ .... $\varphi_m(x)$ .... $\varphi_n(x)$ les restes successifs pris en signe contraire ; $\varphi_n(x)$ est le dernier diviseur qui donne le quotient $Q_{(n-1)}$ sans reste. On a donc les identités

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}; \quad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}; \ldots \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1} x} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)};$$

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1} x} = Q_{n-2} - \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}; \quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1}.$$

Disposant ces fractions avec les excès y relatifs,

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi x}, E, \varepsilon; \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1 x}, E_1, \varepsilon_1; \frac{\varphi_3 x}{\varphi_2(x)}, E_2, \varepsilon_2; \ldots \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{(n-1)} x}, E_{n-1}, \varepsilon_{n-1};$$

$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$, E_n, ε_n ; nous avons donc (6)

$$\begin{aligned}
E &= E_1 + \varepsilon, \\
E_1 &= E_2 + \varepsilon_1, \\
&\vdots \\
E_{n-2} &= E_{n-1} + \varepsilon_{n-2}, \\
E_{n-1} &= -E_n + \varepsilon_{n-1}.
\end{aligned}$$

Or, on sait, par la théorie du plus grand commun diviseur, que la dernière fraction est ou un nombre ou un polynôme entier ; dans aucun de ces cas, cette fraction ne peut passer par l'infini. Donc $E_n = 0$; ajoutant donc toutes ces équations, il vient

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_{n-1} ;$$

mais par le problème (1) on sait trouver les valeurs de $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$: on connaît donc la valeur de E.

Pour faciliter ce calcul, examinons comment on parvient à la valeur de $\varepsilon_{(p)}$. Il faut, à cet effet, comparer les signes des fractions $\frac{\varphi_{p+1}(a)}{\varphi_p(a)}$, $\frac{\varphi_{p+1}(b)}{\varphi_p(b)}$; écrivons donc sur deux lignes les suites

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \ldots\ \varphi_p(a),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n(a)\,; \quad (1)$$
$$\varphi(b),\ \varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \ldots\ \varphi_p(b),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(b),\ \varphi_n(b). \quad (2)$$

Quand à une permanence, ou à une variation dans la suite (1) correspond respectivement une permanence ou une variation dans la suite (2), le ε correspondant est nul ; mais quand à une permanence de la suite (1) répond une variation dans la suite (2), le ε correspondant est $+1$; et dans le cas inverse, la valeur de ε est -1. Soit V le nombre des variations et P le nombre des permanences de la suite (1) ; supposons qu'à ν variations de cette suite répondent autant de variations de la suite (2), et aux ν' restant répondent des permanences ; de sorte que $V = \nu + \nu'$. Partageons de même P en deux parts : p permanences auxquelles répondent autant de permanences dans la suite (2), et p' permanences auxquelles correspondent des variations ; ainsi $E = \nu' - p'$. Soit V' le nombre total des variations de la suite inférieure, on a donc $V' = \nu + p'$; donc $V - V' = \nu' - p' = E$. Ainsi E est égal au nombre total des variations de la suite (1), moins le nombre total des variations de la suite (2).

Observation. 1° Dans l'opération du plus grand commun diviseur, on peut éviter les quotients numériques fractionnaires en multipliant les dividendes par des nombres convenables.

2° Dès qu'on sera arrivé à un reste $\varphi_p(x)$, qui ne peut devenir nul pour aucune valeur comprise entre a et b, on peut arrêter l'opération. En effet, alors, la fraction $\frac{\varphi_{p+1}(x)}{\varphi_p(x)}$ ne peut devenir infinie; donc $E_p = 0$.... et $E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \ldots. \varepsilon_{p-1}$.

3° Si une des fonctions $\varphi_p(a)$, par exemple, est nulle, comme on a $\varphi_{p-1}(a) = Q_{(m-1)}\varphi_p(a) - \varphi_{(p+1)}(a)$, les deux fractions voisines $\varphi_{p-1}(a)$ et $\varphi_{p+1}(a)$ sont donc de signes contraires, et donnent une variation, à moins que l'une d'elles ne soit aussi nulle; excluons d'abord ce cas-là. Donc, un instant avant que $\varphi(p)$ s'évanouisse, $\varphi_{p-1}(a)$ et $\varphi_{(p+1)}(a)$ conservant leurs signes, formaient aussi une variation, et quel que fût alors le signe $\varphi_p(a)$, il n'y avait toujours qu'une variation : car, quelque signe qu'on introduise entre une variation, il n'y a jamais qu'une variation, donc l'évanouissement d'une fonction n'influe pas sur le nombre des variations. Venons au cas où deux fonctions consécutives s'évanouissent; alors d'après les relations d'identité entre les fonctions, toutes s'évanouissent, et aussi la première $\varphi(a)$. Si l'on admet donc que $\varphi(a)$ n'est pas nul, jamais deux fractions consécutives ne s'évanouiront à la fois.

(*La suite prochainement.*)

QUESTION.

83. Une parabole variable ayant un foyer fixe et touchant constamment une conique fixe de même foyer, le sommet de la parabole variable décrit une conchoïde ayant pour directrice une circonférence sur laquelle se trouve le pôle. (Limaçon de Pascal.) (Chasles.)

PHYSIQUE. — QUESTIONS D'EXAMEN.
(École normale).

Lois du refroidissement. — Loi de Newton. — Loi de Dulong et Petit (dans le vide).

PAR M. SAHUQUÉ (AD.),
professeur de physique.

—

1. Tous les corps rayonnent de la chaleur. Si un corps se trouve placé dans une enceinte, il enverra de la chaleur aux corps environnants, en même temps qu'il en recevra d'eux; et suivant que sa température sera égale, supérieure ou inférieure à celle de l'enceinte, elle restera constante, s'abaissera ou s'élèvera d'un certain nombre de degrés.

2. Si l'on suppose la température du corps supérieure à celle de l'enceinte, son refroidissement pourra être suffisamment représenté par la loi de Newton, si l'excès ne dépasse pas 20 degrés. Dans le cas contraire, on est obligé d'employer la loi découverte par Dulong et Petit.

Lorsqu'on se sert de la loi de Newton, en appelant A l'excès de température au commencement de l'observation, B ce même excès au bout d'un temps t : on a $B = Am^t$; m représente un certain coefficient qu'il faut déterminer, par expérience, pour chaque corps qui se refroidit.

La détermination de ce coefficient, et le calcul du refroidissement, dès qu'il est déterminé, ne présentent aucune difficulté.

Lorsque la température du corps au-dessus de l'enceinte est telle qu'il faille avoir recours à la loi de Dulong et Petit, on se trouve également avoir à déterminer un coefficient m qui ne présente pas plus de difficulté sous le rapport de l'expérience, mais dont le calcul est un peu plus compliqué.

Je me propose de donner, à la fin de cette note, la formule qui peut servir à le trouver ; formule qui exprime aussi l'abaissement de température d'un corps au bout d'un temps quelconque, en suivant la loi du refroidissement dans le vide de Dulong et Petit.

3. Imaginons maintenant que le corps étant à une certaine température, on vienne à l'échauffer. Il est évident qu'il perdra alors plus de chaleur qu'il n'en recevra des parois qui l'environnent, et que par conséquent sa température s'élèvera moins que s'il avait été mis à l'abri tant de son rayonnement propre que de celui de l'enceinte. Nous nous proposons de rechercher quelle température il aurait atteint, s'il avait été placé dans la dernière condition que nous venons d'indiquer.

Le problème à résoudre peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Un corps placé dans une enceinte, dont la température reste constante, s'échauffe. On demande à quelle température ce corps serait parvenu, s'il n'avait pas perdu de chaleur par voie de rayonnement. On suppose : 1° La loi de Newton applicable ; 2° le refroidissement se faisant dans le vide suivant la loi de Dulong et Petit.

4. *Application de la loi de Newton* (*). — Si on appelle T l'excès de la première température observée sur celle de l'enceinte ; T' l'excès de la deuxième température ; K le nombre d'unités de temps, de minutes par exemple, que le corps emploie pour monter de T à T' ; il est clair que T'—T exprimera le nombre de degrés dont il se sera élevé pendant le temps K.

Or, on peut supposer sans erreur sensible, si K est assez petit, que la température croît de quantités constantes ; et

(*) Neutoni Opuscula II, 423.

alors $\frac{T'-T}{K}$ représente l'accroissement pour chaque minute.

On peut également supposer qu'elle passe brusquement d'un excès à un autre au commencement de chaque minute, et par suite qu'elle demeure invariable dans toute la durée de cette même minute.

Cela posé : en représentant par $\frac{1}{n}$ la fraction de l'excès de température dont le corps s'abaisse dans chaque minute ; $\frac{1}{n} = 1 - m$ [en effet, pour $1'$ on a $B = Am$ (2), mais le refroidissement dans une minute, représenté par $\frac{1}{n}.A$ est $A - B = (1 - m)A$] ; les pertes successives seront :

$$\frac{1}{n}.T,\ \frac{1}{n}\left(T+\frac{T'-T}{K}\right);\ \frac{1}{n}\left(T+\frac{2(T'-T)}{K}\right),\ \frac{1}{n}\left(T+\frac{3(T'-T)}{K}\right)\dots$$
$$\dots\frac{1}{n}\left(T+\frac{(K-1)(T'-T)}{K}\right).$$

La perte totale Q sera la somme de toutes ces quantités, formant une progression arithmétique dont le premier terme est T, la raison $\frac{T'-T}{K}$, et le nombre de termes K.

Cette somme sera donc : $Q = \frac{1}{n}\left(2T+\frac{(K-1)(T'-T)}{K}\right)\frac{K}{2}$;

ou bien $Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{2KT + (K-1)(T'-T)}{2}$;

et en réduisant $Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{(K+1)T + (K-1)T'}{2}$.

Cette dernière formule est très-simple à calculer.

Pour une seconde observation on aurait

$$Q' = \frac{1}{n} \cdot \frac{(K+1)T' + (K-1)T''}{2}.$$

Et en faisant, suivant le nombre d'observations, $Q+Q'+Q''+\ldots Q_n=C$, la température finale x cherchée serait $x=A+C$, si A désigne la température finale observée.

5° *Application de la loi de Dulong et Petit.* — Refroidissement dans le vide. — Ces deux habiles physiciens ont exprimé leur loi par la vitesse du refroidissement, c'est-à-dire par le nombre ou la fraction de degrés dont la température s'abaisse pendant le temps choisi pour unité. Pour nous l'unité de temps sera représentée par la minute.

En appelant m, le coefficient à déterminer par expérience;

a, la raison de la progression géométrique que suit la vitesse du refroidissement quand la température de l'enceinte croît en progression arithmétique ; la valeur de a a été trouvée égale à 1,0077 pour tous les corps;

θ, la température de l'enceinte ;

t, l'excès de température du corps sur l'enceinte;

l'expression v de la vitesse du refroidissement est

$$v = ma^{\theta}(a^{t}-1) \text{ (*)}.$$

Je représente, comme précédemment, par T et T′ deux excès consécutifs observés ; par K le nombre de minutes nécessaires au corps pour monter de T en T′. Pour abréger je fais $\frac{T'-T}{K}=h$.

Je suppose encore, comme tout à l'heure, que la température croît brusquement de quantités constantes.

On a alors les deux séries suivantes :

Minutes successives.	*Pertes pendant chaque minute.*
1	$ma^{\theta}(a^{T}-1)$.
2	$ma^{\theta}(a^{T+h}-1)$.
3	$ma^{\theta}(a^{T+2h}-1)$.
.	
.	
.	
K	$ma^{\theta}(a^{T+(K-1)h}-1)$.

(*) *Annales de Chimie*, VII, p. 252. 1818.

La perte totale Q sera la somme de ces quantités, c'est-à-dire $Q = ma^{\theta}\left\{a^{T}(1 + a^{h} + a^{2h} + \ldots . a^{(K-1)h}) - K\right\}$.

Mais 1, a^{h}, a^{2h} .... $a^{(K-1)h}$ forment une progression géométrique croissante, dont le premier terme est 1 et la raison a^{h}.

Par conséquent $Q = ma^{\theta}\left(\frac{a^{T}(a^{Kh} - 1)}{a^{h} - 1} - K\right)$.

Remplaçant h par sa valeur, il vient :

$$Q = ma^{\theta}\left(\frac{a^{T}(a^{T'-T} - 1)}{a^{\frac{T'-T}{K}} - 1} - K\right);$$

et réduisant,

$$Q = ma^{\theta}\left(\frac{a^{T'} - a^{T}}{a^{\frac{T'-T}{K}} - 1} - K\right).$$

Cette dernière formule se calcule encore assez simplement. Pour une seconde observation on aurait :

$$Q' = ma^{\theta}\left(\frac{a^{T''} - a^{T'}}{a^{\frac{T''-T'}{K}} - 1} - K\right).$$

Par conséquent en raisonnant comme plus haut on trouverait pour température finale $x = A + C$.

6. Il me reste maintenant à indiquer comment on peut déterminer le coefficient m pour un corps donné.

Appelons A, l'excès de température du corps sur l'enceinte au commencement de l'expérience ; B, ce même excès au bout d'un temps K ; P, le refroidissement pendant le temps K. Nous aurons évidemment $A - B = P$.

Tout se réduit donc à observer deux températures, et à calculer la valeur de P en fonction de la vitesse du refroidissement. Les températures A et B doivent être assez rapprochées ; et il sera bon de faire plusieurs observations.

Or, en raisonnant toujours de la même manière, on voit que l'on aura pour pertes successives :

$$(ma^\theta(a^{A}-1),\quad ma^\theta(a^{A-h}-1,\quad ma^\theta(a^{A-2h}-1)\ \ldots.$$
$$\ldots.\ ma^\theta(a^{A-(K-1)h}-1).$$

c'est-à-dire des pertes de même forme que les précédentes. Leur somme P sera donc aussi de même forme : la seule différence consiste en ce que la progression géométrique est décroissante, h étant négatif.

Par conséquent, l'abaissement de température d'un corps qui se refroidit pendant un temps K dans une enceinte vide entretenue à une température constante, est représenté par la formule :

$$P = ma^\theta\left(\frac{a^{A}(1-a^{-Kh})}{1-a^{-h}} - K\right);$$

ou bien, en substituant et réduisant :

$$P = ma^\theta\left(\frac{a_A - a_B}{1-a^{\frac{B-A}{K}}} - K\right).$$

Or, $A - B = P$; il suit de là

$$A - B = \frac{ma^\theta\left\{a^A - a^B - K\left(1 - a^{\frac{B-A}{K}}\right)\right\}}{1 - a^{\frac{B-A}{K}}},$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{(A-B)\left(1 - a^{\frac{B-A}{K}}\right)}{a^\theta\left\{a^A - a^B - K\left(1 - a^{\frac{B-A}{K}}\right)\right\}}.$$

7. Un mot seulement pour le cas où le refroidissement s'opérerait dans un gaz, dans l'air par exemple.

On sait que la vitesse du refroidissement est alors la somme de la vitesse du refroidissement dans le vide, et de celle due au contact seul du gaz.

La vitesse du refroidissement due au gaz seul étant représentée par la formule $u = np^c t^b$, dans laquelle n est un coefficient variable, p exprime la force élastique de l'air, t l'excès de température du corps, $c=0,45$ pour l'air, $b=1,233$ pour tous les corps et pour tous les gaz, la vitesse totale du refroidissement dans un gaz sera :

$$v = ma^{\theta}(a^{t}-1)+np^{c}t^{b}.$$

Par une série de raisonnements analogues aux précédents, on arrive pour exprimer la perte de chaleur, pendant un temps K, à la formule :

$$Q=ma^{\theta}\left(\frac{a^{T}(a^{Kh}-1)}{a^{h}-1}-K\right)+np^{c}\left\{T^{b}+(T+h)^{b}+(T+2h)^{b}+\dots\right.$$
$$\left.\dots\left(T+(K-1)h\right)^{b}\right\}.$$

Or cette formule ne peut plus être considérée comme simple, parce qu'il faut calculer séparément chacun des termes de la seconde partie et en faire la somme, ce qui devient, si non difficile, du moins très-long. Par cette raison, voulant rester dans les limites que je me suis imposées, je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet.

En cherchant à appliquer les lois du refroidissement, je n'ai trouvé dans aucun ouvrage, des méthodes simples et faciles. J'ai cru devoir publier celles-ci, parce qu'elles m'ont paru susceptibles de rendre quelque service aux jeunes physiciens qui voudraient tenter de nouvelles recherches.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

proposée au concours de l'École normale. (p. 393, t. I.)

PAR M. MARCOU (J.),
Élève au collége de Besançon.

Je prends pour axe des x le grand axe de l'ellipse, et pour axe des y la tangente au sommet (fig. 18); l'équation de l'ellipse est de la forme

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2);$$

combinant l'équation de la droite AD, $y = \delta x$, avec l'équation de l'ellipse, j'ai pour l'abscisse du point C

$$AQ = \frac{2ab^2}{a^2\delta^2 + b^2};$$

or, on a $\frac{AD}{AC} = \frac{m}{n}$, ou bien $\frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$, désignant par (x, y) les coordonnées du point D, cette relation devient

$$\frac{x(a^2\delta^2 + b^2)}{2ab^2} = \frac{m}{n}, \text{ d'où } x = \frac{2ab^2m}{n(a^2\delta^2 + b^2)},$$

et

$$y = \frac{2ab^2m\delta}{n(a^2\delta^2 + b^2)};$$

connaissant les coordonnées des points C, D, l'équation de FD est

$$y = \frac{2ab^2m\delta}{2ab^2m - \alpha n(a^2\delta^2 + b^2)}(x - \alpha) \quad (1), \quad AF = \alpha,$$

et celle de CB est

$$y = \frac{-b^2}{a^2\delta}(x - 2a) \qquad (2).$$

Eliminant δ entre les équations (1) et (2), on aura l'équation du lieu cherché.

De (2), je tire $\delta = \frac{-b^2(x - 2a)}{a^2y}$, portant cette valeur de δ dans l'équation (1), il vient

$$y = \frac{\dfrac{2ab^4m(2a - x)(x - \alpha)}{a^2y}}{2ab^2m - \alpha n\left(\dfrac{b^4(2a - x)^2}{a^2y^2}\right) + b^2}$$

réduisant et ordonnant, il vient

$$a^2(2am - \alpha n)y^2 + b^2(2am - \alpha n)x^2 +$$
$$+ 2ab^2(2\alpha n - 2am - m\alpha)x + 4a^2b^2\alpha(m - n) = 0,$$

équation du second degré qui représente une ellipse, si la courbe primitive est une ellipse, et une hyperbole dans le cas de l'hyperbole : elle a son centre sur l'axe des x et elle passe au point B.

Si $m = n$, on retombe sur l'équation de l'ellipse primitive

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Pour passer au cas où la courbe donnée est une parabole, comme a et b deviennent infinis en même temps, on ne voit pas immédiatement ce que devient l'équation du lieu, alors on remplace b en fonction de a et de α; en s'appuyant sur la distance d'un point de la courbe au foyer, on trouve $b^2 = 2a\alpha - \alpha^2$; l'équation du lieu devient

$$a^2(2am - \alpha n)y^2 + (2a\alpha - \alpha^2)(2am - \alpha n)x^2 +$$
$$+ 2a(2a\alpha - \alpha^2)\left(\alpha(2n - m) - 2am\right)x + 4a^2\alpha(2a\alpha - \alpha^2)(m - n) = 0;$$

faisant a infini dans cette équation, elle devient

$$my^2 - 4\alpha mx + 4\alpha^2(m - n) = 0,$$
$$\text{ou } y^2 = 4\alpha\left(x - \frac{\alpha(m - n)}{m}\right),$$

équation d'une parabole. Si $m = n$, on trouve l'équation de la parabole primitive $y^2 = 4\alpha x$.

Ainsi on voit que pour le cas de la parabole, au lieu de tirer la droite BC, il faut, par le point C, mener une parallèle à l'axe focal.

RECTIFICATION.

Le théorème 80 (p. 40) est de M. Quetelet. (*Nouveaux mémoires de l'Académie de Bruxelles,* III.)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES,

D'après Euler, Legendre, MM. Gauss et Cauchy.

1. Pour donner plus d'ensemble à cette exposition, nous croyons utile de remonter aux notions et aux propositions primitives. Dans tout ce qui suit, on emploie les lettres pour représenter des nombres *entiers positifs*; observation essentielle qu'il ne faut jamais perdre de vue.

2. *L'unité*, c'est l'idée abstraite d'un objet quelconque considéré comme existant seul.

3. *Compter*, c'est ajouter l'unité successivement à elle-même et donner un nom à cette agrégation; le *nombre* est cette agrégation d'unités. L'équation suivante contient la définition du nombre :

$$a.1 = 1.a \qquad (1)$$

Il n'existe pas de dernier nombre.

4. La *numération parlée* est un système limité de signes vocaux (mots) au moyen desquels on peut nommer tous les nombres dont peuvent avoir besoin les sciences, les arts et diverses professions sociales.

5. La *numération écrite* est un système limité de signes graphiques (chiffres) au moyen desquels on peut représenter tous les nombres.

6. La série des nombres *naturels* est la suite des nombres $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$. Il faut se représenter cette suite comme écrite sur une demi-circonférence de rayon infini, de sorte que $+\infty$ est diamétralement opposé à zéro; et sur l'autre demi-circonférence, aussi à partir de zéro, on écrit la suite naturelle des nombres négatifs $0, -1, -2 \ldots\ldots -\infty$, de sorte

que $+0$ et -0, $+\infty$ et $-\infty$ se confondent. C'est une observation essentielle dont l'oubli entraîne à d'étranges hérésies (*).

7. La série des nombres naturels donne lieu à deux opérations principales : 1° *compter en avant*, en allant vers $+\infty$, c'est *l'addition*; 2° *compter en arrière*, en allant vers $-\infty$, c'est la *soustraction*. Quel est le septième nombre après 13? *Réponse :* 20. Quel est le treizième nombre après 7? *Réponse :* 20; et le résultat s'écrit : $13+7=7+13$, et en général $a+b=b+a$ (2). Quel est le septième nombre après 13 en allant vers $-\infty$? *Réponse :* $+6$, ou $13-7=+6$. Quel est le vingtième nombre après 13 en marchant vers $-\infty$? *Réponse :* -7, ou $13-20=-7$. L'addition et la soustraction sont deux opérations *inverses* et peuvent servir à se contrôler mutuellement.

8. *Problème* 1. Étant donné le polynôme $a_1+a_2+a_3+\ldots a_n$, les nombres étant positifs ou négatifs, combien y a-t-il de manières d'obtenir le résultat? Nous donnerons plus bas une solution simple de ce problème difficile (p. 208).

9. Lorsque dans l'*addition* de plusieurs nombres tous les nombres sont égaux, l'opération prend le nom de *multiplication* et le résultat se nomme *produit*.

Théorème 1. $ab=ba$ (3). *Démonstration*. On a $a.1=1.a$, donc $a.1+a.1=1.a+1.a$, ou $a(1+1)=(1+1)a$, et en continuant, on parvient à $ab=ba$. On peut aussi imaginer a rangées de b carrés chacune; le nombre total de carrés sera représenté par ab et par ba. Le même genre de raisonnement sert à démontrer que les six permutations de abc donnent le même produit : on imagine un assemblage de cubes égaux rangés

(*) Il est utile aussi de remarquer que $0\sqrt{-1}$ et 0 se confondent ainsi que $\infty\sqrt{-1}$ et ∞. Pour les distinguer, dans l'algèbre appliquée, il faut examiner l'état de ces quantités un instant avant et après qu'elles s'annulent ou deviennent infinies. Cet examen est devenu l'objet d'un genre d'opérations que M. Cauchy désigne sous le nom de calcul des *résidus* et pour lequel il a imaginé un algorithme spécial. Il faut aussi toujours se rappeler que 0 et ∞ sont des expressions *réciproques*.

en forme de parallélipipède (*), on en compte un nombre a dans le sens de la longueur, un nombre b dans le sens de la largeur, et un nombre c dans le sens de la hauteur; il y aura six manières, correspondant aux six permutations, de trouver le nombre total des cubes, qui est toujours le même. (Legendre, *Théorie des nombres*, Introduction, § 2.)

10. *Théorème* 2. Dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications de n facteurs, on parvient toujours au même produit.

Démonstration. Supposons que le théorème soit vrai pour un nombre de facteurs moindre que n; de quelque manière qu'on s'y prenne, l'opération se termine toujours par la multiplication de deux facteurs, qui sont généralement eux-mêmes produits de facteurs simples. Soient, pour un de ces modes d'opérer, P_r et P_s deux de ces derniers facteurs composés, les indices r et s indiquent le nombre de facteurs simples qui entrent respectivement dans ces facteurs multiples; on a évidemment $r+s=n$. Soient $P_{r'}$ et $P_{s'}$ les deux derniers facteurs correspondant à un autre mode d'opérer, on a encore $r'+s'=n$; P_r a nécessairement un certain nombre de facteurs simples en commun avec $P_{r'}$ ou avec $P_{s'}$; admettons le premier cas et désignons par P_t le produit des t facteurs communs : r étant plus petit que n, on peut multiplier d'abord entre eux ces facteurs communs, on a donc

$$P_r = P_t \,.\, P_{r-t}\,;\; P_{r'} = P_t \,.\, P_{r'-t}\,;$$

donc
$$P_r \,.\, P_s = P_t \,.\, P_{r-t} \,.\, P_s$$
$$P_{r'} P_{s'} = P_t \,.\, P_{r'-t} \,.\, P_{s'}\,;$$

or $P_{r-t} \,.\, P_s = P_{r'-t} \,.\, P_{s'}$, car ces deux produits renferment les mêmes facteurs simples et en nombre moindre que n; de quelque manière qu'on effectue le produit, il doit donc, d'après la supposition, rester le même; donc aussi $P_r \,.P_s = P_{r'} \,.P_{s'}$.

(*) Il serait plus conforme à l'étymologie d'écrire parallélepipède.

Or le théorème est vrai pour trois facteurs, il subsiste donc aussi pour quatre facteurs, etc.

11. *Problème* 2. De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs inégaux?

Solution. Désignons par le symbole P_n ce nombre de manières ; et par P_{n+1} ce nombre lorsqu'il survient un nouveau facteur K, et que l'on a $n+1$ facteurs ; cherchons la relation entre P_{n+1} et P_n. De quelque manière qu'on s'y prenne pour effectuer P_n, il faudra toujours exécuter $n-1$ multiplications. Ceci est évident lorsqu'on multiplie le premier facteur par le second ; ce premier produit par le troisième facteur ; ce second produit par le quatrième facteur, et ainsi de suite : il en est encore de même lorsqu'on exécute par groupes. Exemples : soit $n=12$, il faut onze multiplications, par le mode successif ; et si on décompose en trois groupes de trois, quatre et cinq facteurs, le premier groupe nécessite deux multiplications, le second en exige trois et le troisième quatre ; à quoi il faut ajouter deux multiplications pour les trois groupes ; ainsi, en tout, encore onze ; et le même raisonnement s'applique à un nombre quelconque de facteurs.

Cela posé, soient d'abord deux facteurs a, b, on a évidemment $P_2=2$, savoir : ab, ba ; prenons un troisième facteur c ; on peut le combiner comme multiplicateur, ou multiplicande avec ab, entièrement effectué, ce qui donne deux manières, cab, abc ; ou bien encore faire intervenir c pendant la multiplication ; ainsi, $ac \times b$, $ca \times b$, $a \times bc$, $a \times cb$, ce qui donne quatre manières, en tout six manières ; raisonnant de même sur ba, on voit que l'on a $P_3=12=2.6$; prenons un quatrième facteur d, et combinons-le avec le produit abc ; d'abord entièrement effectué, on obtient deux manières $dabc$, $abcd$; ensuite pendant l'opération, abc exige deux multiplications ; en introduisant d pendant la première, celle de a par bc, on obtient quatre manières : $ad.bc$, $da.bc$, *a. dbc*, *a. bdc*, et autant pendant la seconde multiplication, celle de *ab* par *c* ; en tout dix manières. On en dit autant d'un produit quelconque, d'où $P_4 = 120 = 2.6.10$; on trouverait de même $P_5 = 2.6.10.14$; et ainsi de suite.

En général, soit M une des manières employées pour obtenir le produit de *n* facteurs. Le nouveau facteur K peut se combiner, multiplicande ou multiplicateur avec M, ce qui donne deux manières ; si on l'introduit pendant l'exécution, il y a $n - 1$ multiplications dont chacune donne quatre manières, et en tout $4(n-1) + 2 = 4n - 2$; ce qu'on dit pour M peut s'appliquer à toute autre manière d'obtenir le produit de *n* facteurs; donc

$$P_{n+1} = (4n-2)P_n \quad \text{ou bien} \quad P_n = (4n-6)P_{n-1}.$$

Faisant successivement $n = 2, 3, 4, \ldots. n$, et considérant que $P_1 = 1$, on a

$$P_2 = 2; \quad P_3 = 2.6; \quad P_4 = 2.6.10; \quad P_6 = 2.6.10.14;$$
$$P_8 = 2.6.10.14.18;$$

et $P_{n+1} = 2.6.10 \ldots (4n-6) = 2^n.1.3.5 \ldots 2n-3 = \dfrac{2[2n-3]}{[n-2]}$;

les crochets désignent un produit continuel.

Observation. Cette ingénieuse solution est due à M. Rodrigues (Olinde). La formule avait été trouvée auparavant par M. Catalan (E.), à l'aide de considérations combinatoires. (*Journal* de Liouville, t. III, p. 515 et 549. 1838.)

12. *Problème* 3. De combien de manières peut-on effectuer un produit de *n* facteurs, lorsqu'il y a des facteurs égaux ?

Solution. Soit $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$, et $\alpha + \beta + \gamma, \ldots. = n$ on aura

$$P_n = \frac{2.6.10\ldots.4n-6}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)(1.2.3\ldots\gamma)\ldots}.$$

Cette formule, déduite de la théorie combinatoire est aussi de M. Catalan. (*Journal* de Liouville, t. VI, p. 74. 1841.)

Observation. Ces solutions conviennent aussi au problème 1 (8). (*La suite prochainement*.)

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

(Suite, v. p. 188.)

---

9. *Problème* 3. Étant donnée la fonction entière $\varphi(x)$, trouver une autre fonction entière $\psi(x)$, telle que, pour la fonction fractionnaire $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, D_∞ (5) soit nulle entre les limites quelconques a et b.

Solution. Soit l une racine réelle de $\varphi(x)$, et supposons, pour plus de généralité, que cette racine soit multiple du degré m, de sorte que l'on a $\varphi(x) = (x - l)^m\text{P}$, où P est une fonction entière de (x) ; faisant $x = l + h$, la fonction fractionnaire devient $\dfrac{\psi(l+h)}{\dfrac{h^m}{[m]}\varphi^m l + \text{etc.}}$.... $[m]$ est le produit continuel et $\varphi^m(l)$ est la dérivée de l'ordre m ; car, d'après la propriété connue des racines multiples, les fonctions dérivées qui précèdent φ^m sont nulles. Cette fraction peut s'écrire comme produit de deux facteurs, de cette manière $\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{\psi(l+h)}{\dfrac{h^{m-1}}{[m]}\varphi^m\, l + \text{etc.}}$; pour que cette fraction ait toujours le même signe que h, il faut que le second facteur soit toujours positif, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur soient toujours de même signe ; or, h étant infiniment petit, le signe est déterminé dans chaque suite par le premier terme. On satisfait donc de la manière la plus simple à la condition de rendre le second facteur constamment positif en écrivant que le premier terme du numérateur est égal au premier terme du dénominateur, ce qui revient à écrire $\psi x = \varphi'(x)$; car alors le premier terme du numérateur est $\frac{h^{m-1}}{[m-1]}\varphi^m(l)$, et la fraction prend la forme $\frac{1}{h}\,\frac{m+hM}{1+hN}$, où M et N représentent des fonctions entières de h et de l. Ainsi, pour h infiniment petit et négatif, c'est-à-dire pour $x = l - h$, le rapport $\frac{\varphi'(l-h)}{\varphi(l+h)}$ est négatif; et dans la même hypothèse et $x = l + h$, ce rapport est positif, et pour $h = 0$ le rapport est infiniment grand; donc il n'y a point de variation descendante lorsque la fraction passe par l'infini; ainsi $D_\infty = 0$; donc $\psi(x) = \varphi'(x)$ donne la solution la plus simple du problème.

Observation 1. $\varphi(x)$ ayant des racines multiples, $\frac{\varphi'(l)}{\varphi(l)}$ devient en apparence $\frac{0}{0}$; mais la valeur effective est infinie.

Obs. 2. P étant une fonction entière de x, $\varphi' x + P\varphi(x) = \psi x$ donne aussi une solution, car $\frac{\psi x}{\varphi x} = P + \frac{\varphi' x}{\varphi x}$ et le signe du premier membre est le même que celui de $\frac{\varphi' x}{\varphi x}$ lorsque cette fraction passe par l'infini (lemme 5). En général, soit $f(z)$ une fonction entière de z ne renfermant que des termes positifs et des exposants impairs; remplaçant z par $\varphi'(x)$, on obtient encore une fonction $\psi(x)$ qui satisfait au problème, vu que cette fonction est toujours de même signe que $\varphi'(x)$.

10. *Théorème* 1. Le nombre des racines réelles distinctes d'un polynôme algébrique entier $F(x)$ comprises entre les deux limites a et b est toujours égal à l'excès E, relatif au rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$.

Démonstration. Supposons m racines distinctes comprises entre a et b ; dans cet intervalle, le rapport $\frac{F'x}{Fx}$ passe donc m fois par l'infini, et pas davantage; et toujours pour des variations ascendantes (problème 3) ; donc $E = m$.

Théorème de M. Sturm.

11. *Problème 4.* Trouver le nombre des racines réelles distinctes de l'équation $F(x) = 0$ comprises entre les deux limites a et b? $a < b$.

Solution. On calcule les restes successifs $-F_2(x)$, $-F_3(x)$ ..... $-F_r(x)$, que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$; on écrit sur deux lignes les suites

$$F(a),\ F'(a),\ F_2(a),\ F_3(a)\ .....\ F_r(a),$$
$$F(b),\ F'(b),\ F_2(b),\ F_3(b)\ .....\ F_r(b),$$

ou seulement les signes de ces diverses quantités : autant la seconde ligne a de variations de moins que la première, autant il y a de racines réelles comprises entre a et b. Cette solution est une conséquence du théorème précédent et du problème 3.

Observation. E étant égal à m essentiellement positif, la seconde suite ne peut jamais avoir moins de variations que la première.

Théorème de Rolle.

12. *Théorème* 2. Le nombre de racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les limites a et b, ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre de racines réelles de l'équation dérivée $F'(x) = 0$, comprises entre les mêmes limites.

Démonstration. Soient E et E' les *excès* relatifs aux fonctions réciproques $\frac{F'(x)}{Fx}$ et $\frac{F(x)}{F'(x)}$, on a $E + E' = \varepsilon$ (5) ; or soit encore m le nombre des racines réelles distinctes de $F(x)=0$, comprises entre a et b, et m' le nombre des racines de $F'(x)=0$ comprises entre les mêmes limites ; donc $E=m=-E'+\varepsilon$ (théorème 1). Si toutes les variations relatives à $\frac{F(x)}{F'(x)}$ étaient ascendantes, ou, ce qui revient au même, si toutes les variations relatives à $-\frac{F(x)}{F'(x)}$ étaient descendantes, dans ce cas on aurait $-E'=m'$. Ainsi m' est donc la plus haute valeur que puisse avoir $-E'$, et $+1$ est la plus haute valeur de ε ; donc la valeur la plus élevée de m est $m'+1$, C. Q. F. D.

Théorèmes de Fourier et Budan.

13. *Théorème* 3. Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x)=0$, comprises entre les limites a et b, est tout au plus égal à la différence entre le nombre des variations des deux suites

$$F(a),\ F'(a),\ F''(a) \ldots\ldots F^{n}(a) \qquad (1)$$

$$F(b),\ F'(b),\ F''(b) \ldots\ldots F^{n}(b) \qquad (2)$$

dans lesquelles F', F''..... F^n représentent les dérivées successives de $F(x)$ et n le degré de l'équation $F(x)=0$.

Démonstration. Soient m, m', m''..... $m^{(n)}$ le nombre des racines des équations $F(x)=0$, $F'(x)=0$, $F''(x)=0$..... $F^n(x)=0$, comprises entre les limites a et b, et ε, ε', ε''..... $\varepsilon^{(n)}$ les *excès totaux* relatifs aux rapports

$$\frac{F'(x)}{Fx},\ \frac{F''(x)}{F'(x)},\ \frac{F'''(x)}{F''(x)} \ldots\ldots \frac{F^n(x)}{F^{n-1}(x)}.$$

L'équation étant du degré n, on a $m^{(n)}=0$, $\varepsilon^{(n)}=0$; le théorème de Rolle donne

$$\begin{aligned} m &< m'+\varepsilon, \\ m' &< m''+\varepsilon', \\ &\vdots \\ m^{(n-1)} &< m^{(n)}+\varepsilon^{(n-1)}; \end{aligned}$$

donc $m < \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots\ldots \varepsilon^{(n-1)}$; mais cette somme est égale au nombre des variations de la seconde suite, moins celle de la première (problème 2); donc.. .. C. Q. F. D.

Théorème de Descartes.

14. *Théorème* 4. Le nombre des racines positives de l'équation

$$Fx = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n = 0$$

ne peut surpasser le nombre de variations de signe que présente la suite des coefficients 1, A_1, $A_2 \ldots\ldots A_{n-1}$, A_n.

Démonstration. Dans le théorème de Fourier, prenons $a = 0$, $b = \infty$: la suite (1) devient A_n, A_{n-1}, $1.2.3.\,A_{n-2}$; $1.2.3.\,A_{n-3} \ldots\ldots [n-1]A_1$; $[n].1$, et la suite (2), entièrement composée de termes positifs, n'offre aucune variation; donc, d'après le même théorème, le nombre des racines comprises entre 0 et ∞ ne peut dépasser le nombre des variations que présente la suite des coefficients A_n, $A_{n-1} \ldots\ldots A_1$, $+1$, etc., C. Q. F. D.

Corollaire. Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation $F'(x) = 0$, lorsque les deux derniers termes de la fonction $F(x)$ forment une variation de signe.

Observation. Ainsi, de l'équation fondamentale $E + E' = \varepsilon$, on a déduit tous les théorèmes énoncés; il reste encore celui de M. Cauchy. Tm.

(*La suite prochainement.*)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES,

D'après Euler, Legendre, MM. Gauss et Cauchy.

(Suite, v. page 204.)

Division, diviseurs, résidus.

13. La division est une opération par laquelle on trouve combien de fois on peut soustraire un nombre d'un autre jusqu'à ce que le reste soit devenu plus petit que le nombre soustrait. Le *dividende* est le nombre duquel on soustrait; le *diviseur*, le nombre qu'on soustrait; le *quotient* marque le nombre de soustractions à effectuer; le *résidu* de deux nombres est le reste de la division du grand nombre par le petit. Ainsi, pour les deux nombres 19 et 5, 19 est le dividende, 5 le diviseur, 3 le quotient et 4 le résidu.

Soient a, dividende; p, diviseur; q, quotient; r, résidu, on a l'identité $a = pq + r$.

Observation. La division et la multiplication sont deux opérations *inverses* et peuvent se contrôler mutuellement.

14. Lorsque le résidu de deux nombres est zéro, le dividende est dit *multiple* du diviseur, et le diviseur est un *sous-multiple* du dividende. On dit aussi, dans un sens restreint, qu'un nombre est *diviseur* d'un autre, lorsque leur résidu est nul; ainsi 5 est diviseur de 15, et 15 est un multiple de 5. Zéro est divisible par un nombre quelconque.

15. *Notation.* Nous proposons de désigner le multiple quelconque d'un nombre par un point placé sur ce nombre; ainsi $\dot{5}, \dot{p}$ désignent des multiples quelconques de 5 ou de p, et l'équation $a = \dot{p}$ signifie que a est un multiple de p.

Observation. Le point est déjà employé pour désigner une multiplication quand il est placé à côté du nombre.

$E\left(\frac{a}{b}\right)$ désigne la partie entière du quotient de a divisé par b; ainsi $E\left(\frac{20}{7}\right) = 2$, $E\left(\frac{31}{5}\right) = 6$.

16. Lorsque le même nombre divise d'autres nombres, on dit qu'il est *diviseur commun* à ces deux nombres; ainsi 3 est diviseur commun à 15, 21, 36.

Un est diviseur commun à tous les nombres.

17. Un nombre premier est celui qui n'est divisible que par lui-même, 7, 11, 13, 17, etc., sont des nombres premiers; les autres nombres sont dits non premiers ou composés. 2 est le seul nombre premier pair; 1.2.3 sont trois nombres premiers consécutifs, il ne saurait y en avoir d'autres aussi consécutifs.

18. Deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité; ainsi 25 et 36 sont *premiers entre eux*.

Corollaire 1. Un est premier à l'égard de tous les autres nombres.

Corollaire 2. Un nombre premier est nécessairement premier avec tout nombre plus petit; avec un nombre plus grand, il est premier ou il en est un sous-multiple.

19. *Théorème* 3. La somme algébrique de tant de nombres qu'on voudra, multiples chacun du même nombre, est un multiple de ce nombre.

Ce théorème peut s'écrire ainsi : $a = \dot{p}$, $b = \dot{p}$, $c = \dot{p}$, etc.; on a $a + b + c + \ldots . = \dot{p}$.

20. *Théorème* 4. La somme algébrique de tant de multiples d'un même nombre qu'on voudra, et affectés chacun d'un coefficient entier, est un multiple de ce même nombre.

Ce théorème peut s'écrire ainsi : $a = \dot{p}$, $b = \dot{p}$, $c = \dot{p}$, etc., on a aussi $ma + nb + rc + \ldots . = \dot{p}$.

Corollaire. Si $a = \dot{p}$, $b = \dot{p}$, $c = \dot{p}$... on a $a^m b^n c^r \ldots = \dot{p}$, m, n, r étant des exposants entiers positifs.

Observation. Nous omettons la démonstration trop facile de ces théorèmes.

21. *Théorème* 5. Le diviseur commun à deux nombres est aussi commun à leur résidu.

Démonstration. Ce résidu est égal au dividende, moins le diviseur multiplié par le quotient ; donc..... (théorème 4).

Corollaire. Le résidu de deux nombres premiers entre eux est toujours premier avec le diviseur.

22. *Théorème* 6. Le résidu de la somme algébrique de plusieurs nombres relativement à un même diviseur, est égal à la somme des résidus.

Démonstration. Soit $a = \dot{p} + r$, $b = \dot{p} + s$, $c = \dot{p} + t$, etc. ; p étant le diviseur et r, s, t les résidus, on a

$$a + b + c + \ldots\ldots = \dot{p} + r + s + t \ldots\ldots ;$$

donc, etc.

Observation. Si la somme des résidus surpasse le diviseur p, on prend le résidu de cette somme.

23. *Théorème* 7. Le résidu d'un produit est égal au produit des résidus des facteurs.

Démonstration. Soient a, b, c les facteurs, p un diviseur, $a = \dot{p} + r$, $b + \dot{p} + s$, $c = \dot{p} + t$, on a $abc \ldots\ldots = \dot{p} + rst \ldots$ si $rst \ldots$ est plus grand que p, on en prend le résidu.

Observation. Les preuves dites par 9 dont on se sert pour contrôler les opérations de l'arithmétique sont fondées sur les deux théorèmes précédents.

24. *Théorème* 8. Le produit de deux facteurs premiers avec un troisième est premier avec ce troisième nombre.

Démonstration. Soient a, b les deux facteurs premiers avec p, et admettons, s'il est possible, que q soit un facteur commun entre ab et p, de sorte qu'on a $ab = \dot{q}$, $p = \dot{q}$.

Supposons d'abord $p > a$, on a donc $p = \dot{a} + r$; le résidu r est plus petit que a. Cette équation donne celle-ci : $pb = \dot{ab} + br$; pb et $\dot{ab}$, par hypothèse, ont le facteur commun q ; ce même facteur divise donc br. De ce produit, on déduirait semblablement un produit br' divisible par q, et où $r' < r$; on parviendrait donc enfin à un produit $1 \times b$, divisible par q ; p et b auraient donc le diviseur commun q, ce qui est impossible ; donc ab et p n'ont pas de diviseur commun.

2° Si $a > p$, on a $a = \dot{p} + r$, où r est plus petit que p et premier avec p ; $ab = \dot{bp} + br$; si ab n'est pas premier avec p, alors br ne serait pas non plus premier avec p ; mais r étant plus petit que p, br est nécessairement premier avec p; donc, etc.

Ce théorème 8 est la proposition 26 du septième livre d'Euclide.

25. *Théorème* 9. Si tous les facteurs d'un produit sont premiers avec le nombre p, le produit sera premier aussi avec ce nombre p.

Ce théorème est un corollaire du précédent ; propositions 16, 17, 18, 19 du neuvième livre d'Euclide.

Corollaire. Si a est premier avec p, a^m est aussi premier avec p ; on en déduit qu'il est impossible que la racine d'un indice quelconque d'un nombre entier soit un nombre fractionnaire, et de là l'existence des quantités irrationnelles.

26. *Théorème* 10. Un nombre composé ne peut se résoudre que d'une seule manière, en facteurs premiers.

Démonstration. Soient a, b, c, d..... les nombres premiers, suivant l'ordre de grandeur, qui divisent le nombre composé N ; ainsi $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$; soit un autre nombre premier a', différent de a, b, c, d..... ; étant premier avec a, b, c, d.... il sera premier avec N ; ainsi N n'admet pas d'autres nombres premiers. Soit donc $N = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$, et $\alpha' > \alpha$; on aura $b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots = a^{\alpha'-\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ Mais cette équation est impossible, car le second membre est divisible par a et le premier ne l'est pas; donc, etc.

27. *Problème* 4. Combien un nombre composé a-t-il de diviseurs, et quelle est la somme de ces diviseurs?

Solution. Soit comme dans le théorème précédent,

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots$$

Effectuant le produit des polynômes

$$(1 + a + a^2 + \ldots a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \ldots b^{\beta})(1 + \ldots c^{\gamma})\ldots$$

tous les termes de ce produit sont inégaux; chacun est diviseur de N, et réciproquement tout diviseur de N est nécessairement un de ces termes; or le nombre de ces termes est évidemment $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots$; tel est donc le nombre des diviseurs de N, l'unité comprise, et la somme de tous ces diviseurs est donc égale à

$$\frac{(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)(c^{\gamma+1}-1)\ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}.$$

Coroll. Soit $N = 2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$, et supposons que $2^{\alpha+1}-1$ soit un nombre premier; ainsi $a = 2$; $b = 2^{\alpha+1}-1$; $\beta = 1$; la somme de tous les diviseurs est donc, toute réduction faite, égale à 2N; le nombre N, qui jouit de cette propriété d'être égale à la somme de ses diviseurs, est dit un nombre *parfait;* ces nombres sont ainsi dénommés à raison de leur rareté; voici les 11 premiers nombres :

Valeurs de α.

0 — 1
1 — 6
2 — 28
4 — 496
6 — 8128

12 — 33 550 336
16 | 85 898 691 328
18 | 137 438 691 328
30 | 2 305 843 008 139 952 128
40 | 2 417 851 639 228 158 837 784 756
46 | 9 903 520 314 282 971 830 448 816 128.

Si, dans un nombre parfait, on ajoute ensemble tous les chiffres, on obtient un second nombre; si on a fait de même pour ce second nombre, on obtient un troisième nombre qui est divisible par 10. Observation de Kraft. (M. de Pét^{g}, 1734—35). Sans démonstration.

Entre 1 et un sextillion, il n'y a que 10 nombres parfaits.

Cette solution se trouve dans Euclide. (Prop. 36, liv. 9.)

La suite prochainement.

NOTE SUR L'AIRE DU TRIANGLE

et sur l'aire du quadrilatère inscriptible en fonction des côtés.

—

La méthode *mnémonique* pour retrouver certaines aires ou des volumes (*voir* t. I, p. 117, t. II, p. 23, t. III, p. 93), peut servir à retrouver l'aire d'un triangle et du quadrilatère inscriptible en fonction des côtés lorsqu'on sait que les carrés de ces aires sont des fonctions entières de ces côtés; en effet, soit S l'aire du triangle ayant a, b, c pour côtés; S^2 est donc une fonction symétrique des côtés, du quatrième degré; lorsqu'un côté devient égal à la somme des deux autres, l'aire est nulle; donc S^2 renferme les trois facteurs $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$; le quatrième facteur ne peut donc être que de la forme $m(a+b+c)$, m étant un nombre constant; donc $S^2=m(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$; lorsque les trois côtés sont égaux, on a

$$S^2 = \frac{3}{16} a^4 = 3ma^4;\ \text{donc}\ m = \frac{1}{16}.$$

Observation. Avec deux côtés inégaux et un troisième côté, plus petit qu'une quantité donnée, il est impossible de construire un triangle ; ainsi en faisant $a = 0$, S devient imaginaire ; mais si l'on a en même temps $b = c$, alors $S = 0$; car, avec deux côtés égaux, on peut toujours construire un triangle, quelque petit que soit le troisième côté.

2° *Quadrilatère inscriptible.* Lorsqu'un côté est égal à la somme des trois autres, l'aire est nulle ; donc

$$S^2 = m(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a);$$

les côtés devenant égaux, on a

$$S^2 = a^4 = 16\,ma^4;\ \text{donc}\ m = \frac{1}{16}.$$

Tm.

NOTE

SUR LES INTERSECTIONS SUCCESSIVES DES LIGNES DE CONTACT.

PAR M. E. DESMAREST,

ancien élève de l'École polytechnique (*).

Deux courbes algébriques étant données, si des divers points de l'une on mène des tangentes à l'autre, déterminer le lieu géométrique des intersections successives des lignes qui unissent les points de contact.

Les équations des courbes étant

$$F(xy) = 0 \qquad \varphi(xy) = 0,$$

les tangentes à la première courbe sont représentées par l'équation

$$y - y' = -\frac{X'}{Y'}(x - x')$$

ou

$$yY' + xX' - (y'Y' + x'X') = 0.$$

(*) *V.* t. I, p. 263.

1° x', y' désignent les coordonnées d'un point de contact ; 2° Y', X' sont les polynômes dérivés pris par rapport à y et à x ; on démontre que la position sur la première courbe du point $x'y'$, opère toujours une réduction dans le polynôme $y'Y' + x'X'$.

Si nous nommons x'', y'' les coordonnées d'un point de la courbe $\varphi(xy) = 0$, et si la tangente passe en ce point, l'équation de la ligne des contacts sera

$$y''Y' + x''X' - (y'Y' + x'X') = 0,$$

ou en posant $y'' = f(x'')$,

$$\text{(A)} \qquad Y'f(x'') + X'x'' - (y'Y' + x'X') = 0 ;$$

si nous donnons à x'' l'accroissement h, l'équation de la nouvelle ligne sera

$$\text{(B)} \qquad Y'f(x'') + Y'f'(x'')h + Y'f''(x'')\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}, +$$
$$+ X'x'' + X'h - (y'Y' + x'X') = 0 ;$$

l'abscisse du point d'intersection des deux lignes est donnée par l'équation

$$Y'f'(x'')h + Y'f''(x'')\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}, + X'h = 0.$$

Si 1° on divise par h, et 2° on suppose $h = 0$, l'abscisse du point d'intersection, de deux lignes infiniment rapprochées, sera donnée par l'équation

$$Y'f'(x'') + X' = 0,$$

ainsi le lieu géométrique des intersections successives des lignes de contact sera obtenu en éliminant x'', y'' des trois équations

$$Y'f'(x'') + X' = 0, \quad Y'f(x'') + X'x'' - (y'Y' + x'X') = 0,$$
$$\varphi(x''y'') = 0,$$

et l'équation finale

$$\psi(x', y') = 0$$

sera l'équation du lieu géométrique cherché.

Première application. **Les deux courbes données sont des sections coniques, et sont, pour faciliter les calculs, rapportées au même sommet pris comme origine, au même axe; leurs équations sont**

$$y^2 = mx + nx^2, \qquad y^2 = px + qx^2,$$

l'équation de la tangente à la première courbe est

$$2yy' - (m + 2nx')x - mx' = 0;$$

la condition de passer par un point x', y'' de la seconde courbe donne

$$2y''y' - (m + 2nx')x'' - mx' = 0, \qquad y''^2 = px'' + qx''^2;$$

ainsi les deux cordes de contact sont représentées par les équations

(C) $$2y'f(x'') - (m + 2nx')x'' - mx' = 0,$$

(D) $$2y'f(x'') + 2y'f'(x'')h + \text{etc.} - (m + 2nx')x'' - $$
$$- (m + 2nx')h - mx' = 0;$$

l'intersection de ces deux droites donne, après avoir 1° divisé par h, 2° supposé $h = 0$,

$$\frac{y'(p + 2qx'')}{y''} - (m + 2nx') = 0;$$

on doit donc éliminer $x''y''$ des trois équations

(E) $$py' + 2qy'x'' - y''(m + 2nx') = 0,$$
$$2y'y'' - (m + 2nx')x'' - mx' = 0, \qquad y''^2 - px'' - qx''^2 = 0;$$

des deux premières on déduit

$$x'' = \frac{2py'^2 - mx'(m + 2nx')}{(m + 2nx')^2 - 4qy'^2}, \quad y'' = \frac{py'(m + 2nx') - 2mqy'x'}{(m + 2nx')^2 - 4qy'^2},$$

ces valeurs, subtituées dans la troisième équation du groupe E, donne l'équation du lieu géométrique cherché :

(M) $$mpx'(m + 2nx')^2 - (m^2qx'^2 + p^2y'^2)(m + 2nx') - 4mpqx' = 0 \; (*)$$

(*) Cette équation est le résultat que l'on obtient après la suppression du facteur $m + 2nx'$: ce facteur est étranger. 1° il ne peut être nul lorsque la première courbe donnée est une parabole; 2° si cette première courbe est une ellipse ou une hyperbole, il représente une droite passant au centre et parallèle à l'axe des

Examinons quelques cas particuliers.

1° Si les deux lignes données sont des paraboles, on a $n=0$, $q=0$, et le lieu géométrique est

$$y^2=\frac{m^2}{p}x;$$

si à la condition précédente on ajoute la condition $p=-m$, le lieu géométrique est

$$y^2=-mx;$$

donc si les deux paraboles sont identiques, mais opposées au sommet, le lieu cherché est la seconde parabole donnée.

2° Si la première courbe est une hyperbole et la seconde une parabole, on doit, dans l'équation générale M, supposer $q=0$; la nouvelle équation, divisée par le facteur $m+2nx$, donne

$$y^2=\frac{m^2}{p}x+\frac{2mn}{p}x^2.$$

3° Si la première courbe est une ellipse, la seconde une parabole, on doit, dans l'équation (M), 1° changer le signe de n, 2° supposer $q=0$, on a

$$y^2=\frac{m^2}{p}x-\frac{2mn}{p}x^2.$$

Nous pourrions ainsi examiner les modifications apportées dans l'équation M par les divers assemblages de deux sections coniques, mais l'examen des courbes à centre, fait en prenant ce centre pour origine, facilite le calcul et fait mieux ressortir quelques-unes des particularités que présentent les lieux géométriques obtenus.

Les deux courbes primitives sont

$$y^2+mx^2=n, \qquad y^2+px^2=q;$$

---

y et on peut facilement démontrer que cette droite est le lieu géométrique des intersections successives des cordes de contact lorsque le point de départ des tangentes est un point quelconque de l'axe des x.

si nous conservons les notations précédentes, les deux cordes de contact seront représentées par les équations

$$y'\sqrt{q-px''^2}+mx'x''-n=0,$$

$$y'\sqrt{q-px''^2}-\frac{py'x''}{\sqrt{q-px''^2}}h-\text{etc.}+mx'x''+mx'h-n=0.$$

La rencontre des deux cordes donne, après la division par h et la supposition $h=0$,

$$-py'x''+mx'y''=0;$$

l'élimination doit donc avoir lieu entre les trois équations

$$py'x''+my''x'=0,\quad y''y'+mx''x'-n=0,\quad y''^2+px''^2-q=0,$$

l'équation finale est

$$\text{(N)}\qquad q(py'^2+m^2x'^2)^2-n^2p^2y'^2-m^2n^2px'^2=0.$$

1° Si les courbes données sont des ellipses, on doit conserver les signes attribués aux quantités m, n, p, q; on peut, à cette première condition, en ajouter une seconde, admettre, par exemple, que la deuxième courbe est un cercle particulier, c'est-à-dire est le lieu des rencontres deux à deux des tangentes normales; on a alors $p=1$, $q=\frac{n(m+1)}{m}$; l'équation N est alors, après la suppression du facteur $y'^2+m^2x'^2$,

$$y'^2+m^2x'^2=\frac{nm}{m+1};$$

les foyers de cette dernière ellipse sont ceux de l'ellipse donnée.

2° Si les courbes données sont des ellipses ou des hyperboles semblables, le lieu géométrique est une ellipse ou une hyperbole semblable aux courbes données.

3° Si la première courbe est une ellipse, la deuxième une hyperbole, et si les axes sont égaux, on doit 1° changer les signes de p et de q ; 2° supposer $p=m$, $q=n$, l'équation générale N devient

$$y''^2 - mx''^2 = -n;$$

le lieu géométrique est donc l'hyperbole même qui est le point de départ des tangentes.

4° Si les conditions précédentes sont renversées, le résultat est également renversé : le lieu géométrique est l'ellipse même qui est le point de départ des tangentes.

Deuxième application. Nous donnerons comme dernière application l'exemple de deux courbes appartenant à une famille remarquable, citée souvent dans les premières recherches sur le calcul différentiel :

$$y-b-c(x-a)^m=0, \qquad y-p-q(x-d)^{\mathrm{R}}=0;$$

la tangente à la première courbe est

$$y-mc(x'-a)^{m-1}x-mb+(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0;$$

les lignes de contact seront représentées par l'équation

$$\text{(S)} \qquad \begin{gathered} p+q(x''-d)^{\mathrm{R}}-mc(x'-a)^{m-1}x''-mb+ \\ +(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0. \end{gathered}$$

Si on fait osciller cette ligne en donnant à x'' l'accroissement h, on a

$$\text{(T)} \qquad \begin{gathered} p+q(x''-d)^{\mathrm{R}}+\mathrm{R}q(x''-d)^{\mathrm{R}-1}h+\text{etc.},- \\ -mc(x'-a)^{m-1}x''-mc(x'-a)^{m-1}h-mb+ \\ +(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0; \end{gathered}$$

l'intersection de ces lignes donne, après la division par h, et la supposition $h=0$,

$$\mathrm{R}q(x''-d)^{\mathrm{R}-1}-mc(x'-a)^{m-1}=0;$$

l'élimination doit donc avoir lieu entre les trois équations

$$\text{(V)} \quad \mathrm{R}y''-\mathrm{R}p-mcx''(x'-a)^{m-1}+dmc(x'-a)^{m-1}=0,$$

$$y''-mc(x'-a)^{m-1}-mb+(m-1)y'+amc(x'-a)^{m-1}=0,$$

$$y''-p-q(x''-d)^{\mathrm{R}}=0.$$

Les deux premières donnent

$$x'' = \frac{Rp - Rmb + Ry'(m-1) + mc(aR - d)(x'-a)^{m-1}}{mc(R-1)(x'-a)^{m-1}},$$

$$y'' = \frac{Rp - mb + (m-1)y' + mc(a-d)(x'-a)^{m-1}}{R-1};$$

ces valeurs, substituées dans la troisième équation du groupe (V), donnent

$$\text{(U)} \qquad \frac{Rp - mb + (m-1)y' + mc(a-d)(x'-a)^{m-1}}{R-1} - q -$$

$$- d\left[\frac{Rp - Rmb + Ry'(m-1) + mcR(a-d)(x'-a)^{m-1}}{mc(R-1)(x'-a)^{m-1}}\right]^{R} = 0.$$

On peut, de ce cas général, déduire l'exemple des deux paraboles données dans la première application, on doit alors supposer

$$b=0, \quad a=0, \quad p=0, \quad d=0, \quad m=2, \quad R=2,$$

on a alors l'équation finale

$$y''^2 = \frac{c^2}{q}x''^2.$$

Si on suppose $c=\frac{1}{m}$, $q=\frac{1}{p}$, si on change les x en y, et *vice versâ*, les deux paraboles sont $y^2=mx$, $y^2=px$, c'est-à-dire sont celles qui ont été indiquées primitivement, et le lieu géométrique donné par l'équation (U) est, comme dans l'exemple cité,

$$y^2 = \frac{m^2}{p}x.$$

SOLUTION DU PROBLÈME 65 77 (p. 454, tome II).

PAR M. RISPAL,

Élève du collége de Rouen (institution Lévy).

1° On fait tourner l'angle θ de manière que ses côtés soient toujours tangents à une section conique ; quel est le lieu décrit par un point du plan de l'angle?

2° On fait tourner une section conique de sorte qu'elle touche constamment les deux côtés d'un angle θ ; quel est est le lieu décrit par un point de la courbe?

Indiquer une équation qui puisse résoudre à la fois les deux questions ; faire des applications à des cas particuliers. (Le Besgue.)

Soit une ellipse (*fig.* 24), rapportée à son centre et à ses axes ; $y'Ax'$ un angle θ tangent à cette courbe ; M un point tel que

$$MP = y_1 \quad OP = x_1$$
$$MQ = \beta \quad AQ = \alpha.$$

Si je puis trouver en fonction des données de la question, une relation telle que

$$f(y_1, x_1, \beta, \alpha) = 0,$$

je dis que cette équation répondra à la question. En effet, si on y suppose α et β constantes, tandis que y_1 et x_1 sont variables, elle représentera le lieu du point M se mouvant en demeurant invariablement attaché au plan de l'angle A, qui se meut avec lui. Si, au contraire, on suppose y_1 et x_1 constantes, α et β variables, on aura le lieu du point M invariablement attaché à la courbe qui se meut en restant constamment tangente aux côtés de l'angle θ.

Appliquons ce procédé.

Soient les équations des droites Ax' et Ay'

$$(1) \qquad (Ax') \qquad y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$(2) \qquad (Ay') \qquad y = m'x + \sqrt{a^2m'^2 + b^2}$$

liées entre elles par la relation

$$(3) \qquad \text{tang}\,\theta \text{ ou } \delta = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

D'après un théorème connu, la distance MQ d'un point M à une droite AQ suivant un angle θ, sera

$$(4)\qquad \mathrm{MQ} \text{ ou } \beta = \frac{y_1 - mx_1 - \sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}};$$

de même, $AQ = MV = \alpha$ donne

$$(5)\qquad \alpha = \frac{y_1 - m'x_1 - \sqrt{a^2m'^2+b^2}}{\sqrt{1+m'^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}},$$

et il ne s'agit plus que d'éliminer m et m' entre les trois équations (3), (4), (5). Or, dans le cas général, cette élimination est extrêmement compliquée, car les deux équations en m résultantes, sont toutes deux du quatrième degré. Mais faisons application à quelques cas particuliers.

1° Lieu du sommet d'un angle constant tournant tangentiellement à une ellipse. Dans ce cas, le point M coïncide avec A, et on a $\alpha = \beta = 0$.

Alors les équations deviennent

$$\delta = \frac{m-m'}{1+mm'},\quad 0 = y_1 - mx_1 - \sqrt{a^2m^2+b^2},$$
$$0 = y_1 - m'x_1 - \sqrt{a^2m'^2+b^2}.$$

Elles se réduisent à

$$m^2 - \frac{2x_1y_1}{x_1^2-a^2}m + \frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2} = 0,$$
$$m'^2 - \frac{2x_1y_1}{x_1^2-a^2}m' + \frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2} = 0,$$
$$\delta = \frac{m-m'}{1+mm'} \quad \text{ou} \quad \delta(1+mm') = m - m'.$$

Les deux premières rentrant l'une dans l'autre.

Donc mm' est le produit des racines de l'une d'elles, et $m - m'$ est la différence de ces mêmes racines. On en tire

$$\delta\left(1 + \frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}\right) = \frac{2\sqrt{x_1^2y_1^2-(y_1^2-b^2)(x_1^2-a^2)}}{x_1^2-a^2},$$

ou $$y_1^2 + x_1^2 - a^2 - b^2 = \frac{2\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}{\delta}.$$

Cette équation est du quatrième degré dans le cas général. Si les tangentes deviennent perpendiculaires entre elles, $\delta = \infty$; d'ailleurs le numératenr ne peut jamais devenir nul pour aucune valeur réelle de y_1 et de x_1 ; il est toujours réel, et l'équation devient alors

$$y_1^2 + x_1^2 = a^2 + b^2;$$

ce que l'on savait déjà.

2° Lieu du centre des ellipses tangentes à deux droites faisant un angle θ.

Dans ce cas nous prenons les deux tangentes pour axes, et $x_1 = y_1 = 0$; les équations deviennent ainsi

$$\beta = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}}, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{a^2m'^2 + b^2}}{\sqrt{1+m'^2}\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}}},$$

ou

$$\beta^2(1+m^2)\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right) = a^2m^2 + b^2,$$

$$\alpha^2(1+m'^2)\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right) = a^2m'^2 + b^2,$$

d'où

$$m^2 = \frac{(b^2-\beta^2)\,\delta^2 - \beta^2}{\beta^2(1+\delta^2) - a^2\delta^2} = \frac{(b^2-\beta^2)\,\delta^2 - \beta^2}{\beta^2 + (\beta^2 - a^2)\,\delta^2},$$

$$m'^2 = \frac{(b^2-\alpha^2)\,\delta^2 - \alpha^2}{\alpha^2(1+\delta^2) - a^2\delta^2} = \frac{(b^2-\alpha^2)\,\delta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + (\alpha^2 - a^2)\,\delta^2};$$

d'ailleurs

$$m' = \frac{m - \delta}{1 + \delta m}.$$

Nous n'essayerons pas l'élimination dans le cas général ; mais si nous supposons que l'angle des tangentes soit droit, alors $\delta = \infty$, et en divisant par δ^2 les deux termes, on aura

$$m^2 = \frac{b^2 - \beta^2}{\beta^2 - a^2}, \qquad m'^2 = \frac{b^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - a^2};$$

d'ailleurs, à cause de la perpendicularité, on a $mm' = -1$, $m^2m'^2 = 1$;

donc
$$\frac{(b^2 - \beta^2)(b^2 - \alpha^2)}{(\beta^2 - a^2)(\alpha^2 - a^2)} = 1,$$

$$b^4 - \alpha^2 b^2 - \beta^2 b^2 = a^4 - a^2\beta^2 - a^2\alpha^2,$$

ou
$$(a^2 - b^2)\beta^2 + (a^2 - b^2)\alpha^2 = a^4 - b^4,$$

et enfin
$$\beta^2 + \alpha^2 = a^2 + b^2,$$

résultat que l'on pouvait aussi aisément prévoir.

Ces exemples suffisent pour faire voir avec quelle facilité on peut déduire tous ces lieux, si connus, des trois équations que nous avons données. Dans le cas de l'hyperbole, on aurait les mêmes résultats, avec cette seule différence qu'il faudrait partout changer b^2 en $-b^2$.

On peut faire le même calcul dans la parabole, en partant de l'équation de la tangente

$$y = mx + \frac{p}{2m};$$

on a alors les trois équations

$$\delta = \frac{m - m'}{1 + mm'}, \qquad \beta = \frac{y_1 - mx'_1 - \frac{p}{2m}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}},$$

$$\alpha = \frac{y_1 - m'x_1 - \frac{p}{2m'}}{\sqrt{1+m'^2}\sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}}.$$

L'élimination donne encore deux équations en m du quatrième degré.

Nous remarquerons seulement que le lieu des sommets d'un angle constant tangent à la parabole est une hyperbole;

dans ce cas, $\beta = \alpha = 0$, et les équations deviennent

$$2my_1 - 2m^2x_1 - p = 0, \qquad 2m'y_1 - 2m'^2x_1 - p = 0,$$

ou

$$m^2 - \frac{y_1}{x_1}m + \frac{p}{2x_1} = 0,$$

alors

$$mm' = \frac{p}{2x_1}, \qquad m - m' = \frac{\sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{x_1},$$

$$\delta\left(\frac{p+2x_1}{2}\right) = \sqrt{y_1^2 - 2px_1},$$

$$p^2\delta^2 + 4p\delta^2x_1 + 4\delta^2x_1^2 = 4y_1^2 - 8px_1.$$

Cette équation représente une hyperbole dont le centre est situé sur l'axe de la parabole et ayant avec la parabole une directrice et un foyer communs; comme il est facile de le voir. Pour $\delta = \infty$, elle se réduit à

$$p^2 + 4px_1 + 4x_1^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad x_1 = -\frac{p}{2},$$

comme on le savait d'ailleurs.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

De la proposition de la note (1), p. 116, t. III, relative à la multisection du cube.

PAR M. A. DELADERÉERE,
Professeur licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

Il faut démontrer qu'on a $DB^3 : DH^3 :: DB : DE$ (*fig.* 23).

Pour cela, il n'y a qu'à mener DL perpendiculaire à CK; DQ, et HN perpendiculaires à AK, et joindre HL.

D'après cette construction, L est milieu de CK; d'ailleurs H est par construction milieu de GK, donc LH est parallèle à GC.

Ensuite NH et CK sont parallèles, comme perpendiculaires à AK ;

Donc dans le triangle DLH, OE est parallèle à LH.

Et dans le triangle DLC, NO est parallèle à CL.

D'après cela, et à cause que ADH est rectangle, on a

$$\mathrm{DA}^2:\mathrm{DH}^2::\mathrm{AQ}:\mathrm{QH}::\mathrm{AD}:\mathrm{DN}::\mathrm{DC}:\mathrm{DN}::\mathrm{DL}:\mathrm{DO}::\mathrm{DH}:\mathrm{DE};$$

donc $$\mathrm{DA}^2:\mathrm{DH}^2::\mathrm{DH}:\mathrm{DE},$$

et comme $\mathrm{DA}=\mathrm{DB}$,

$$\mathrm{DB}^2:\mathrm{DH}^2::\mathrm{DH}:\mathrm{DE};$$

multipliant les antécédents par DB, les conséquents par DH, il vient

$$\mathrm{DB}^3:\mathrm{DH}^3::\mathrm{DH}\times\mathrm{DB}:\mathrm{DE}\times\mathrm{DH};$$

divisant les deux termes du dernier rapport par DH, on a finalement

$$\mathrm{DB}^3:\mathrm{DH}^3::\mathrm{DB}:\mathrm{DE},$$

ce qu'il fallait démontrer.

LIMITES DU PÉRIMÈTRE D'UNE ELLIPSE,

ET RECTIFICATION D'UNE CYCLOÏDE.

PAR M. A. PEYRONNY,
Élève interne du collége de Saint-Louis (classe de M. Vincent).

—

THÉORÈME.

Le périmètre d'une ellipse dont les demi-axes principaux sont a et b est toujours compris entre $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Soient $\mathrm{OA}=a$ (*fig.* 22) et $\mathrm{OB}=b$ les demi-axes principaux de l'ellipse. Considérons deux points P et P′ ayant même abscisse et situés, l'un sur le cercle circonscrit, et l'autre sur l'ellipse ; menons ensuite deux tangentes qui viendront couper l'axe OA en un même point C. Si α, α' représentent les angles PCO, P'CO, K et K' l'élément du cercle au point P et celui de l'ellipse au point P', on aura

$$\frac{K}{K'}=\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha'}},$$

ou, en posant $\operatorname{tang}^2\alpha=m^2$, et remarquant que $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha'}=\frac{a}{b}\ldots$

$$K'=K\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{a^2(m^2+1)}}.$$

Ainsi, si m, m', m''..... représentent les tangentes de tous les angles compris entre 0° et 90°, n leur nombre et p le périmètre de l'ellipse, dont celui de la branche AB n'est que la quatrième partie, on pourra poser, en vertu de la relation

$$nK=\frac{\pi}{2}a$$

$$\frac{p}{4}=\frac{\pi}{2n}a\left\{\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{a^2(m^2+1)}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2m'^2}{a^2(m'^2+1)}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{a^2+b^2m''^2}{a^2(m''^2+1)}}+\ldots\ldots\text{ etc., en nombre } n\right\}.$$

Comme à une valeur m de la tangente en correspond une autre $\frac{1}{m}$, les deux termes $\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{a^2(m^2+1)}}$ et $\sqrt{\frac{b^2+a^2m^2}{a^2(m^2+1)}}$ se trouveront dans la suite qui constitue le coefficient de $\frac{\pi}{2}a$, et la relation précédente deviendra alors, après la suppression du facteur a,

$$\frac{p}{4}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}n}\left\{\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{m^2+1}}+\sqrt{\frac{b^2+a^2m^2}{m^2+1}}\right)+\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots\text{ etc., en nombre }\frac{n}{2}\right\}.$$

La quantité $\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{m^2+1}}+\sqrt{\frac{b^2+a^2m^2}{m^2+1}}$ ramenée à la forme $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ devient

$$\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2}}.$$

Pour $m=0$, cette fonction atteint son minimum, qui est $(a+b)$, et son maximum $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ répond à l'hypothèse $m=1$.

On aura donc, en remplaçant chaque expression par la valeur minimum $(a+b)$, puis par la valeur maximum $\sqrt{2(a^2+b^2)}$,

$$\frac{p}{4}>\frac{\pi}{4}(a+b) \quad \text{ou} \quad p>\pi(a+b),$$

$$\frac{p}{4}<\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)} \quad \text{ou} \quad p<\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

(*La suite prochainement.*)

Note. Les deux limites de M. Peyronny, et d'autres plus rapprochées, ont été données la première fois par J. Bernoulli, d'après une génération organique d'une courbe *rampant* sur une autre, moyen simple et d'une extrême fécondité pour les périmètres des courbes, sur lesquels la géométrie ordinaire et celle des projections ne nous apprennent absolument rien ; nous en entretiendrons nos lecteurs. Tm.

NOTE SUR LES RACINES CUBIQUES.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

—

Les traités d'arithmétique contiennent des méthodes pour rendre plus rapide, au moyen de divisions successives, l'extraction de la racine carrée des nombres.

L'extraction de la racine cubique est susceptible de simplifications analogues, et, comme la méthode à suivre pour les effectuer n'a encore été traitée, à notre connaissance, dans aucun ouvrage élémentaire, nous croyons utile de faire connaître et de développer par quelques exemples le procédé qui suit.

Nous ferons voir d'abord comment doit être modifiée, pour la rendre plus facile et plus prompte, la méthode usitée pour la détermination successive des chiffres de la racine. Puis après, comment, par une suite de divisions, on pourra rendre plus rapide encore la méthode indiquée.

Soit

$$N = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Supposons pour le moment que la racine $a+b$ soit entière et que b désigne le chiffre des unités, de l'égalité précédente on déduira celle-ci :

$$N - a^3 = b \times \left\{3a(a+b)+b^2\right\}.$$

Faisons

$$3a(a+b)+b^2 = P,$$

nous aurons

$$N - a^3 = bP.$$

Admettons maintenant que $(a+b)$ ne soit qu'une partie de la racine totale, et que le chiffre suivant soit c; de sorte que l'on ait

$$N = (a+b+c)^3.$$

Alors

$$N - a^3 - bP,$$

sera le reste au moyen duquel il faudra déterminer c. Pour cela nous savons qu'il faudra diviser une partie convenable de ce reste par $3(a+b)^2$, et que le quotient indiquera, au moins approximativement, le chiffre à vérifier c. Or le produit connu P est évidemment une partie de ce nouveau diviseur, et leur différence

$$3ab + 2b^2,$$

ajoutée à P donnera le diviseur cherché.

Cette différence revient à

$$3ab + 3b^2 - b^2,$$

et peut s'écrire ainsi

$$3b(a+b) - b^2\,;$$

faisons pour abréger

$$3b(a+b) = \mathrm{U},$$

et prenons la somme

$$\mathrm{P} + \mathrm{U},$$

pour diviseur. Celui-ci quoique trop fort de b^2, n'en sera que plus utile dans la pratique; parce que le diviseur exact $3(a+b)^2$ donne presque toujours, comme l'indique la théorie, un quotient entier supérieur au chiffre cherché.

Quelques applications numériques en familiarisant avec l'emploi de ces formules, vous en démontreront l'utilité.

Pour que l'on puisse suivre commodément les calculs, et en saisir l'ensemble avec plus de facilité, nous écrirons, en dehors du texte, le tableau ou le type de chaque opération.

Premier exemple.

Soit à trouver la racine cubique de 12 000 000 000.

Opération principale.

12 000 000 000
8 | 2
4 000
$P_1 =$ 1 324 | 2
1 352 000
$P_4 =$ 150 544 | 8
147 648 000
$P_5 =$ 15 656 841 | 9
6 736 431

$\sqrt[3]{12\,000\,000\,000} = 2289.$

Opérations partielles.

23
50
$P_1 = 1389$

22
60
$P_2 = 1324$

22
6
$U_2 = 132$

$S_2 = P_2 + U_2 = 1456$

229
660
13 821
1374
$P_3 =$ 151 221

228
660
13 744
1368
$P_4 =$ 150 544
$U_4 =$ 5 472
$S_4 =$ 156 016

228
24
912
456
$U_4 = 5472$

2 289
6 840
91 641
18 31 2
137 34
$P_5 =$ 156 56 841.

Le premier chiffre de la racine est 2; le reste correspondant est 4. Descendant la tranche, l'on a 40 à diviser par 12, le quotient est 3. Alors $a+b=23$; multipliant ce nombre par $3a=60$, et ajoutant 9, l'on a pour première valeur de P, le nombre 1389 qui multiplié par $b=3$ donne un produit supérieur à 4000. La soustraction est donc impossible, et le chiffre 3 est trop fort. Mais avec 2 la soustraction peut s'effectuer, et le reste correspondant 1352, suivi d'un zéro, donnera le nouveau dividende. $U=132$, par suite $P+U=1456$; le quotient correspondant est 9. Mais le produit bP ne peut se soustraire du reste; essayons 8, la soustraction devient possible et 147648 est le reste correspondant. La division de 1476480 par S_4 donne le chiffre 9, que l'on vérifie, et l'on a enfin 2289 pour la racine cubique demandée.

Deuxième exemple.

Soit à extraire avec 4 décimales la racine cubique de 40. L'opération se fera, d'après la méthode indiquée, conformément au tableau ci-joint.

Opération principale.

40	
27	3
13 000	
3 076	4
696 000	
347 821	1
348 179 000	
34 986 451	9
34 301 041 000	
3 507 791 511	9
2 730 917 401	

$\sqrt{40} = 3.4199$

Opérations partielles.

$S_1 =$ 27

34 341

90 1020

$P_2 =$ 3076 6821

340 341 000

68 $P_3 =$ 347 821

$S_2 =$ 3684

3 419

10 230

102 651

683 8

34 19

$P_4 =$ 34 976 451

34 199

102 570

2 394 011

17 099 5

68 398

3419 9

$P_5 =$ 35 077 91 511

Emploi de la division pour abréger les calculs.

Lorsqu'on aura calculé par la méthode précédente plus de la moitié des chiffres de la racine cubique d'un nombre, on pourra, en s'appuyant sur les mêmes formules, déterminer plus rapidement par la division les chiffres restants.

En effet, soit a un nombre de $n+1$ chiffres, suivi de n zéros et b un nombre de n chiffres. Nommons N le cube de la somme $a+b$, la racine aura $2n+1$ chiffres, et l'on aura

$$\frac{N-a^3}{3a^2} = b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}.$$

D'après ce

$$a > 10^{2n}, \quad b < 10^n,$$

d'où

$$b^2 < 10^{2n}, \quad \frac{b^2}{a} < 1.$$

De plus, puisque l'on a

$$b^3 < 10^{3n}, \quad a^2 > 10^{4n},$$

il suit que

$$\frac{b^3}{3a^2} < \frac{10^{3n}}{3.10^{4n}} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{3.10^n}.$$

D'où l'on voit que la somme

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2},$$

en général moindre que l'unité, n'en pourrait différer en plus que d'une quantité $< \frac{1}{3.10^n}$.

Application.

On détermine par la méthode précédente la partie 2,71 formée par les trois premiers chiffres de la racine cubique de 20.

Opération principale.

20
8 2
12 000
1 669 | 7
317 000
219 511 | 1
97 489

Opérations partielles.

28
60
1746

27
60
1669
540
27
2236
271
810
2711
2168
219511
813
220324

Première division.

972 | 220
96 | 44

97489 000 000
97099 601 984
389 398 016

Deuxième division.

38939 | 22103
16836 | 1761
1364
31
16

$\sqrt[3]{20} = 2{,}71441761.$

Les deux chiffres 44 qui suivent 2,71 s'obtiennent par la division. Pour cela on écrira deux zéros à la droite du reste 97489 et l'on divisera le nombre résultant 9748900 par 220324. On sait que dans une division dont les deux termes sont de grands nombres, les premiers chiffres à la droite du dividende et du diviseur n'ont qu'une faible influence sur les chiffres du quotient. On pourra donc se borner ici à diviser 974 par 220, en faisant usage de la méthode approximative connue, et le quotient 44 donnera les deux chiffres cherchés de la racine dont la partie connue deviendra par conséquent 27144. Pour la vérifier, on retranchera le produit bP de 97489000000 et l'on aura le reste correspondant 389398016. Écrivant 4 zéros à la droite, et divisant le nombre qui en résulte par la valeur correspondante de P + U, ou seulement 38939 par 22103, le quotient 1761 complétera l'extraction, et l'on aura ainsi

$$\sqrt[3]{20} = 2,71441761,$$

à moins de $\dfrac{1}{100\,000\,000}$ d'unité près.

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME SUR LE BILLARD CIRCULAIRE.

(*Question d'examen.*)

—

On donne un cercle et deux points intérieurs A, B (fig. 25); *ces points étant considérés comme des billes infiniment petites, et la circonférence comme une ligne matérielle parfaitement élastique : on propose de déterminer sur la circonférence un point* D *tel que la bille* A, *dirigée vers le point* D, *revienne au point* B, *après s'être réfléchie sur la circonférence.*

1. Supposez le problème résolu, et menez les cordes DAF, DBE, et les tangentes HDG, FH, EG. Les angles FDH, EDG seront égaux ; donc, les cordes DAF, DBE, auront la même longueur, et par conséquent le triangle DHF sera

égal au triangle DGE. D'ailleurs, les points H, G, appartiennent aux polaires OX, OY des points donnés A, B : ainsi, la question se ramène à inscrire dans l'angle donné YOX, une droite HDG qui touche, en son milieu D, une circonférence située dans l'intérieur de l'angle.

Pour mettre en équations ce dernier problème, je dirige les axes de coordonnées suivant les côtés OX, OY de l'angle donné YOX ; et je prends pour inconnues les deux coordonnées x', y', du point D, milieu de HDG. Le coefficient de l'inclinaison de la droite HDG, sur l'axe OX, sera $-\frac{y'}{x'}$, comme il est facile de s'en assurer. De plus, on sait que si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe FDE, et X', Y' les dérivées de $f(x, y)$, relatives à x et y, dans lesquelles les variables x, y sont remplacées par x', y', le coefficient d'inclinaison de la tangente HDG a aussi pour expression $-\frac{X'}{Y'}$: donc $\frac{y'}{x'} = \frac{X'}{Y'}$; d'où $Y'y' - X'x' = 0$. Par conséquent, on aura, pour déterminer les valeurs des inconnues x', y', les équations $f(x', y') = 0$, $Y'y' - X'x' = 0$.

Ainsi, quelle que soit la courbe FDE dont l'équation est $f(x, y) = 0$, le point D auquel il faut mener la tangente HDG est situé sur la ligne $Yy - Xx = 0$.

Dans la question proposée, la courbe FDE étant une circonférence, l'équation $f(x, y) = 0$ devient $y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta + ay + bx + c = 0$. L'angle θ est l'angle YOX que forment les polaires OX, OY des points A, B. Les coefficients a, b, changés de signe, représentent les doubles des distances du point O, pôle de la droite AB, aux pieds des perpendiculaires CL, CI, abaissées du centre C sur les axes. Et le coefficient c est le carré de la tangente menée du point O à la circonférence. On a d'ailleurs $Y = 2y + 2x\cos\theta + a$,

$X = 2x + 2y\cos\theta + b$; et par suite l'équation $Yy - Xx = 0$ devient $2y^2 - 2x^2 + ay - bx = 0$.

Elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les polaires OX, OY ; ou, ce qui revient au même, les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles que forment les droites CA, CB. Cette hyperbole passe par les quatre sommets du quadrilatère OICL, elle a son centre au milieu de la diagonale IL. Enfin, les tangentes à la courbe, aux points L, I, où elle coupe les polaires des points B, A, sont parallèles à la droite BA. En effet, ces tangentes doivent être perpendiculaires à l'hypoténuse des triangles rectangles OLC, OIC, dont les côtés de l'angle droit sont des cordes de l'hyperbole équilatère; et la droite AB est aussi perpendiculaire à CO, car le point O est le pôle de AB.

Dans le cas particulier où $CA = CB$, on a : $CI = CL$; $OI = OL$; $a = b$, et alors, l'équation $2y^2 - 2x^2 + ay - bx = 0$ représente les deux diagonales CO, IL du quadrilatère COLI.

Si l'on suppose $CA > CB$, on aura $CI < CL$, l'angle $ICO >$ l'angle LCO. La bissectrice de l'angle ACB sera située dans l'intérieur de l'angle ICO, et comme cette bissectrice est parallèle à l'une des asymptotes, il faudra que les deux points C, I se trouvent sur une des deux branches de l'hyperbole, et les points O, L seront situés sur l'autre branche. La première, qui passe par le centre du cercle, coupera nécessairement la circonférence en deux points D, D'. Et il est facile de reconnaître que ces deux points satisfont à la question proposée. C'est-à-dire que si l'on dirige la bille A vers un de ces points, par exemple au point D, elle reviendra en B, après s'être réfléchie sur la circonférence.

Car le rayon CD étant moyen géométrique entre CA et CI; les triangles CDA, CDI sont semblables, et l'angle $ADC = DIC$. De même, la similitude des triangles CDB, CDL donne BDC = DLC. Mais l'hyperbole considérée étant équilatère, la différence des angles DIL, DLI est égale à la différence des angles CIL, CLI (*), on a donc DIC = DLC, et par conséquent ADC = BDC.

D'après cela, on voit que la question proposée admet au moins deux solutions.

2. Le nombre des solutions est, dans tous les cas, égal à celui des points communs à la circonférence et à l'hyperbole. Afin de déterminer le nombre de ces points par le calcul le plus simple, je transporte l'origine des coordonnées au centre C de la circonférence. Puis je dirige l'axe des y suivant la bissectrice CY de l'angle ACB des deux droites CA, CB, menées du centre aux deux points donnés A, B (*fig.* 26), et je prends, pour axe des x, la bissectrice de l'angle adjacent BCA', en supposant toujours CB < CA. Enfin, je nomme α, β, les coordonnées x, y du centre de l'hyperbole, situé au milieu M de la droite IL, qui unit les pieds I, L des perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les polaires des points A, B; et r le rayon de la circonférence.

L'équation de la circonférence sera $y^2+x^2=r^2$, et celle de l'hyperbole : $xy-\alpha y-\beta x=0$. La première donne $\dfrac{y}{x+r}=\dfrac{r-x}{y}$; et, en posant $\dfrac{y}{x+r}=z$, $\dfrac{r-x}{y}=z$, on en déduit $y=\dfrac{2rz}{1+z^2}$, $x=\dfrac{r(1-z^2)}{1+z^2}$. Substituant les valeurs de x, y dans $xy-\alpha y-\beta x=0$, il vient :

$$\frac{2r^2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}-\frac{2\alpha rz+\beta r(1-z^2)}{(1+z^2)}=0;$$

(*) La différence des angles formés par le diamètre IL avec les cordes supplémentaires menées à ses extrémités, est égale à l'angle de ce diamètre et de la tangente menée par l'une de ses extrémités. La tangente à l'hyperbole au point I étant parallèle à AB, l'angle dont il s'agit est précisément celui des deux droites AB, IL.

ou $$z^4 - \frac{2(r+\alpha)}{\beta} z^3 + \frac{2(r-\alpha)}{\beta} z - 1 = 0.$$

Posons $-\frac{2(r+\alpha)}{\beta} = \mathrm{A}$, $\frac{2(r-\alpha)}{\beta} = \mathrm{B}$, il en résultera l'équation $z^4 + \mathrm{A}z^3 + \mathrm{B}z - 1 = 0$, qui a déjà été discutée (t. II, pag. 18-21).

On a démontré que si les coefficients A, B de cette dernière équation satisfont à l'inégalité $\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 < 0$, ses quatre racines sont réelles et inégales.

Deux de ces quatre racines réelles deviennent égales, lorsque $\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = 0$.

Deux des racines de l'équation sont imaginaires, si l'on a $\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 > 0$.

Or, les égalités $\mathrm{A} = -\frac{2(r+\alpha)}{4}$, $\mathrm{B} = \frac{2(r-\alpha)}{4}$, donnent $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{4} = -\frac{\alpha}{\beta}$, et $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{4} = -\frac{r}{\beta}$. Par suite, on a :

$$\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} - \sqrt[3]{\frac{r^2}{\beta^2}} + 1\,;$$

on en concluera que :

L'équation $z^4 - \frac{2(r+\alpha)}{\beta} z^3 + \frac{2(r-\alpha)}{\beta} z - 1 = 0$ a ses quatre racines réelles et inégales, lorsque les coordonnées α, β du centre de l'hyperbole satisfont à l'inégalité $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} < \sqrt[3]{r^2}$. Deux des racines réelles de cette équation deviennent égales entre elles, lorsque les coordonnées α, β donnent $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} = \sqrt[3]{r^2}$. Deux des racines sont imaginaires, si l'on a $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} > \sqrt[3]{r^2}$.

Dans le premier cas, chacune des branches de l'hyperbole coupe la circonférence, et alors le problème admet quatre solutions, déterminées par les quatre points E, E′, D, D′, communs aux deux courbes.

Dans le second, la branche de l'hyperbole EE′ qui ne contient pas le centre du cercle, devient tangente à la circonférence. Et enfin, cette branche n'a aucun point de commun avec la circonférence quand l'inégalité $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{6^2}>\sqrt[3]{r^2}$ a lieu.

La condition $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{6^2}<\sqrt[3]{r^2}$ montre dans quelle partie du plan du cercle doit se trouver le milieu M de la droite IL, pour qu'il soit possible de déterminer sur la circonférence quatre points E, E′, D, D′ satisfaisant à la question proposée. En effet, construisez la courbe PQRS (*fig.* 26), dont l'équation est $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{r^2}$. Si la condition $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{6^2}<\sqrt[3]{r^2}$ est remplie, le point M devra être situé dans l'intérieur de la partie du cercle terminée par cette courbe. C'est le cas particulier où le problème admet quatre solutions. Lorsque le point M est sur la courbe, le nombre des solutions se réduit à trois; et il y en a seulement deux, si ce point est extérieur à la partie du cercle terminée par la courbe. On conçoit, d'après cela, que le nombre des solutions est égal à celui des tangentes que l'on peut mener par le point M à la courbe PQRS. C'est d'ailleurs ce qui résultera des considérations suivantes.

Je prolonge la droite CM, d'une longueur MN = CM; le point N sera sur l'hyperbole. Je joins le point N à un des points, E′, communs à l'hyperbole et à la circonférence, par la droite NE′, dont le prolongement coupe les asymptotes aux points O, O′, et les axes des coordonnées en H, G. Je mène encore le rayon CE′, et la droite MF parallèle à CE′. Le point F sera le milieu de la corde NE′, puisque M est le milieu de CN. De plus, NO = E′O′, comme parties d'une sécante à l'hyperbole, comprises entre la courbe et ses asymptotes; donc, le point F est au milieu de la droite OO′. D'où je conclus, à cause du parallélisme des droites CE′, MF, que E′ est aussi le milieu de l'hypoténuse HG du triangle rectangle HCG. Et, par suite, HG = 2CE′. Ce qui montre d'abord qu'on obtiendra les points cherchés E′, E, D′, D, en menant par le point N, donné dans l'intérieur de l'angle droit YCX, des droites telles que leurs parties, comprises entre les côtés de l'angle prolongés, soient égales au diamètre du cercle, et en prenant les milieux de ces droites.

Cela posé, si l'on conduit par le point M, milieu de CN, une parallèle à HG, terminée à la rencontre des axes OX, OY, elle sera égale à la moitié de HG, c'est-à-dire au rayon r de la circonférence. Or, toute droite égale à r, et inscrite dans les angles formés par les axes, est tangente à la courbe PQRS dont l'équation est $\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{r^2}$ (t. I, p. 265). Donc, à chacun des points E, E′, D, D′, correspond une tangente à la courbe PQRS, menée par le point M, et réciproquement. C'est ce que nous voulions démontrer.

3. Lorsque CA=CB (*fig.* 27), on a CI=CL; le triangle CIL étant isocèle, la bissectrice CY de l'angle ICL passe par le milieu M de la base IL du triangle, et $\alpha = 0$. L'équation $z^4+\frac{2(r+\alpha)}{6}z^3+\frac{2(r-\alpha)}{6}z-1=0$ est alors une équation réciproque $z^4-\frac{2r}{6}z^3+\frac{2r}{6}z-1=0$; et il est facile de la résoudre, et d'obtenir les coordonnées des points cherchés, au moyen des relations $y=\frac{2rz}{1+z^2}$, $x=\frac{r(1-z^2)}{1+z^2}$. Mais, dans ce cas particulier, l'équation $xy-\alpha y-6x=0$ devient $xy-6x=0$; elle représente les deux droites $x=0$, $y=6$.

La première est la bissectrice de l'angle ACB, la seconde est la droite IL. La droite $x=0$ coupe toujours la circonférence en deux points D, D′ (*fig.* 27), qui satisfont évidemment à la question proposée. Si la distance CM ou β est moindre que le rayon du cercle, la droite IL rencontrera la circonférence en deux points E, E′, qui conviendront aussi à la question. C'est ce que l'on peut vérifier en conduisant les droites EA, EC, EB. Car le rayon EC étant moyen géométrique entre CA et CI, les triangles ECA, ICE seront semblables ; donc, l'angle AEC = l'angle CIL. De même, la similitude des triangles CEB, CEL donne BEC = CLI. Mais les angles CIL, CLI sont égaux, puisque CL = CI. Par conséquent AEC = BEC. On prouverait, de même, que AE′C = BE′C.

4. Si les points donnés A, B, sont en ligne droite avec le centre C du cercle (*fig.* 28) : la droite IL coïncidera avec l'axe CX ; l'ordonnée β du milieu M de IL sera nulle. Alors l'équation $xy - \alpha y - \beta x = 0$ se réduit à $xy - \alpha y = 0$; elle représente les deux droites $y=0$, $x=\alpha$. La première rencontre la circonférence aux points D, D′, qui répondent à la question proposée. La droite $x=\alpha$ rencontrera la circonférence en deux points E, E′, lorsqu'on aura $\alpha < r$. Et ces deux points satisferont encore au problème. Pour le vérifier, je mènerai la tangente HEG, qui coupe aux points H, G les polaires IH, LG de A, B. On aura HE = EG, puisque IM = ML. D'ailleurs, la corde des contacts EK des tangentes HE, HK passe par le point A, et celle des tangentes GE, GF contient le point B. Les triangles isocèles KEH, FGE étant égaux, on aura l'angle HEK = FEG. C'est ce qu'il fallait démontrer.

G.

DE QUELQUES
PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES.

PAR M. CHABERT,
Professeur à l'École navale.

Le carré d'un nombre entier quelconque n est égal à la somme de tous les nombres impairs depuis l'unité jusqu'au double de ce nombre diminué d'une unité.

C'est-à-dire : $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots. + (2n - 1)$.

Il est d'abord évident que la proposition est vraie pour 1, pour 2 dont le carré 4 est égal à $1 + 3$, pour 3 dont le carré 9 est égal à $1 + 3 + 5$, et il est facile de prouver que si la loi est vraie pour le nombre n, elle est encore vraie pour $n+1$, car si

$$1 + 3 + 5 + \ldots. + (2n - 1) = n^2,$$

on obtient aisément :

$$1+3+5+\ldots.+(2n-1)+(2n+1) = (n^2+2n+1) = (n+1)^2.$$

Donc la suite des nombres impairs représente un carré quelconque, et en prenant un nombre quelconque de termes de la série $1+3+5+ \ldots. +(2n+1)+$ etc., on a nécessairement un carré. On voit aussi que les carrés sont alternativement pairs et impairs ; ce qui, au reste, est évident à priori.

Si on considère la série qui représente les cubes de tous les nombres entiers : $1 + 7 + 19 + 37 + 61 + 91 +$ etc., on voit aussi que tous les termes de cette série sont des nombres impairs ; et même tous ceux que j'ai écrits, et bien d'autres encore, sont des nombres premiers absolus ; ce qui ferait croire que la formule $3n^2 + 3n + 1$ ne représente que des nombres premiers, si on ne savait qu'il n'existe aucune formule algébrique propre à n'exprimer que des nombres premiers. (Legendre, *Théorie des nombres.*)

Mais si la formule $3n^2+3n+1$ ne contient pas seulement des nombres premiers, elle en contient un si grand nombre qu'on peut les ranger à côté de ces formules remarquables citées par Euler, Legendre, etc.

Il est aisé de voir que $3n^2+3n+1$ représente toujours un nombre impair ; mais à priori on voit que les nombres entiers étant alternativement pairs et impairs, il en sera de même de leurs puissances d'un ordre quelconque, et que par conséquent la différence entre deux puissances n^e consécutives est toujours un nombre impair ; de sorte que

$$(n+1)^m - n^m = mn^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} n^{m-2} + \text{etc.....} + 1$$

est toujours un nombre impair.

On peut se demander si $3n^2+3n+1$ ne peut pas être un carré parfait ? ce qui revient à dire : L'équation indéterminée $3x^2+3x+1=y^2$ est-elle susceptible de donner pour x et y des valeurs rationnelles ?

On peut appliquer à la recherche des solutions rationnelles de cette équation un procédé qui convient à tous les cas, et qu'en conséquence je vais développer sur l'équation générale.

Soit : $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ dont il s'agit de trouver les solutions rationnelles pour x et pour y.

Résolvons l'équation par rapport à x. On a

$$x = -\frac{by+d}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+d^2-4af.}$$

Pour que les valeurs de x et de y soient rationnelles, il faut et il suffit qu'il existe des valeurs rationnelles de y qui rendent la quantité sous le radical un carré parfait.

Proposons-nous donc de trouver des valeurs de y qui rendent ny^2+py+q un carré parfait.

Égalons ny^2+py+q à 0, et supposons d'abord que les valeurs de y tirées de cette équation soient réelles et égales à β et β'. On aura

$$\sqrt{ny^2+py+q}=\sqrt{(ny-n\beta)(y-\beta')}\,;$$

on pourrait trouver tout de suite une solution en égalant les deux facteurs sous le radical ; mais remarquons que, sans changer l'équation, on peut multiplier l'un de ces facteurs par une quantité arbitraire, pourvu qu'on divise l'autre par la même quantité. On a ainsi

$$\sqrt{\frac{(ny-n\beta)}{f}(fy-f\beta')}\,;$$

et si nous posons :

$$\frac{ny-n\beta}{f}=fy-f\beta',$$

nous obtiendrons des valeurs de y fonctions de f, et qui satisferont à la question toutes les fois que f sera rationnel.

De l'équation précédente on tire :

$$y=\frac{\beta n-\beta' f^2}{n-f^2}\,;$$

substituant cette valeur de y sous le radical, on a

$$\sqrt{ny^2+py+q}=f(y-\beta')\,;$$

et, par suite,

$$x=-\frac{by+d}{2a}\pm\frac{f(y-\beta')}{2a}.$$

Donc, pour toute valeur rationnelle de f, on a une valeur rationnelle pour y et deux valeurs rationnelles pour x.

Mais il pourrait se faire que β et β' fussent imaginaires, alors il faudrait modifier notre méthode.

Il pourrait se faire aussi que β et β' fussent irrationnels; ces deux cas se présentent à la fois pour l'équation $3x^2 + 3x + 1 = y^2$, car si on égale $3x^2 + 3x + 1$ à 0, on tire

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}.$$

Voici comment on peut opérer dans ce cas :

On suppose f de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Alors évidemment la valeur générale de y devient en partie réelle, en partie imaginaire; mais le coefficient de la partie imaginaire contient b, on pourra donc profiter de l'indétermination de b pour égaler à 0 le coefficient de $\sqrt{-1}$; ensuite on disposera de a de manière à rendre le radical un carré parfait. Et il est clair que y ayant une valeur réelle, x aura aussi une valeur réelle; car le produit

$$(y - \alpha - \beta\sqrt{-1})\,(y - \alpha + \beta\sqrt{-1})$$

est toujours réel quand y est réel.

Resterait à séparer les valeurs entières de x et de y : ce procédé est en général insuffisant; mais il peut servir, dans certains cas, à trouver un grand nombre de valeurs rationnelles; et comme il est infiniment plus simple que le procédé indiqué par Legendre, dans sa Théorie des nombres, il sera peut-être utile que j'y revienne dans un prochain article.

ANALYSE D'OUVRAGES.

—

Programme développé d'un cours d'arithmétique élémentaire renfermant, outre les questions nécessaires à tout examen, des tableaux comparatifs des anciennes et nouvelles mesures *et du calcul des intérêts* (première partie); par L. Castelnau, professeur de mathématiques (*).

Le programme que nous annonçons ne consiste pas uniquement en une table des matières traitées dans la plupart des ouvrages; c'est un exposé méthodique, une analyse raisonnée des principales questions dont l'ensemble forme un cours d'arithmétique élémentaire. L'auteur a su faire entrer dans l'énoncé même des questions proposées une indication suffisante du moyen de les résoudre; en rapprochant les principes par tous les points qui leur sont communs, il a facilement établi leur liaison, et mis en évidence les avantages qui résultent d'une théorie bien faite.

Ce programme est destiné à des commençants. Il se compose de six chapitres subdivisés en leçons, dont l'étendue a toujours été proportionnée à la difficulté du sujet qu'on y traite; plusieurs des leçons se terminent par des applications numériques très-bien choisies pour donner une idée précise des simplifications dont les règles générales sont parfois susceptibles.

Le programme de M. *Castelnau* sera très-utile aux élèves de première année, il convient parfaitement à l'enseignement des écoles primaires.

ANNONCES.

1. *Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'école militaire, à l'école des mines, au génie civil et à la*

(*) Se trouve chez A. Allouard, libraire-commissionnaire. Paris, quai Voltaire, 21. Prix, 1 fr.

marine; par C. Beck, professeur de mathématiques supérieures au collége royal d'Ath (*).

Le gouvernement belge a souscrit pour 80 exemplaires à cet ouvrage. Nous en rendrons compte dans un de nos prochains numéros.

2. *Leçons de géométrie*, suivies de notions élémentaires de géométrie descriptive ; par L.-P. Cirodde, professeur de mathématiques au collége royal de Henri IV ; ouvrage autorisé par le conseil royal de l'instruction publique, deuxième édition; Paris, chez Hachette, libraire, rue Pierre-Sarrazin, 12; 1844. (On en rendra compte.)

3. La deuxième édition des *Éléments de géométrie* de M. Lionnet, professeur au collége Louis-le-Grand, vient, sur le rapport de M. Sturm, et sur la proposition de M. Poinsot, d'être adoptée par le conseil royal de l'instruction publique, pour l'usage des colléges ; chez Dézobry, libraire, rue des Maçons-Sorbonne, 1. (Voir, t. I, p. 431.)

4. Éléments d'Algèbre, par M. *Bourdon*, inspecteur général de l'Université; 9e *édition*. 1 vol. in-8°, 1843. — Chez *Bachelier*, libraire, quai des Augustins, 55.

5. Cours de Géométrie élémentaire, par M. *A. J. H. Vincent*, professeur au collége royal Saint-Louis; revu conjointement par l'auteur et par M. *Bourdon*, inspecteur général de l'Université; 5e *édition*. 1 vol. in-8° avec planches, 1844. (Ouvrage adopté par l'Université.) — Chez *Bachelier*, libraire, quai des Augustins, 55.

(*) 2 vol. in-8. Se trouve à Paris, chez Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Grands-Augustins, 55. Prix, 5 fr.

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

QUESTION 84.

On a mis dans une urne 20 billets numérotés 1, 2, ... 20. Sur ce nombre, il y a 5 bons billets et 15 mauvais. 20 personnes doivent puiser successivement dans l'urne et prendre un des billets. La chance de prendre un bon billet est-elle la même pour toutes ces personnes? (Fodot.)

QUESTION 85.

On a un jeu complet de 52 cartes; on les jette successivement sur une table, en les retournant et prononçant à mesure, 1, 2, 3, ... 13, et recommençant. Quelle est la probabilité de rencontrer juste? L'*as* compte pour 1, le *valet* pour 11, la *dame* pour 12, et le *roi* pour 13. (Fodot.)

QUESTION 86.

Inscrire, dans un triangle donné, une ellipse dont la surface soit égale à celle d'un cercle donné.

En discutant cette question, on déterminera, comme cas particulier, l'ellipse inscrite dont la surface est un maximum.

STATIQUE APPLIQUÉE AU MAGNÉTISME
(*École normale*).

Note sur la manière de corriger le défaut de centrage des boussoles d'inclinaison.

PAR M. ÉMILE BARY,
Professeur au collége de Charlemagne.

—

On sait qu'il est presque impossible de construire une aiguille d'inclinaison de manière que l'axe autour duquel elle est mobile passe exactement par le centre de gravité de cette aiguille. Pour constater ce *défaut de centrage*, on fait coïncider le plan de rotation avec le méridien magnétique, et l'on observe l'angle a que l'aiguille en équilibre fait avec l'horizontale menée dans ce plan ; puis on change le sens de l'aimantation de l'aiguille, et l'on reconnaît que dans le même méridien elle fait avec l'horizontale un angle a', qui, dans les appareils les plus précis, diffère peu du premier angle a, mais qui ne lui est jamais égal. On a coutume de prendre pour mesure de l'inclinaison la moyenne $\frac{a+a'}{2}$. Je me propose ici d'apprécier cette correction, et en outre de la modifier dans les cas où elle serait insuffisante. Pour cela, je n'aurai qu'à résoudre et à discuter un problème fort simple de statique, dont voici l'énoncé.

Une aiguille aimantée, que l'on suppose réduite à son axe, étant suspendue par un de ses points F voisin de son centre de gravité G, a fait avec l'horizontale un angle a dans le méridien magnétique. La même aiguille suspendue par le même point F, mais aimantée inégalement et en sens contraire, a fait avec l'horizontale un angle a' dans ce méridien. On demande l'inclinaison vraie de l'aiguille, c'est-à-dire l'angle i qu'elle ferait avec l'horizontale dans le même méridien, si elle était suspendue par son centre de gravité. On admet que dans les deux cas la distribution du magnétisme libre soit la même suivant la longueur de l'aiguille. De plus, lorsqu'on la suspendait horizontalement (*) sous l'influence seule du globe, et qu'on l'écartait de sa direction d'équilibre, elle exécutait en une minute n oscillations dans le premier cas, et n' dans le second.

Solution. Plaçons l'observateur à Paris ou en un point quelconque de notre hémisphère magnétique. Soit $a > a'$, ce qui revient à supposer que dans le premier état magnétique de l'aiguille son centre G soit situé sur sa partie *australe*, c'est-à-dire sur celle qui s'abaisse vers le nord. Alors la pesanteur doit augmenter l'inclinaison. Désignons par p le poids de l'aiguille, par d la distance inconnue du centre G au point fixe F, par l la distance FA du point fixe au pôle austral A de l'aiguille, et par l' la distance FB du même point fixe au pôle boréal B (*fig.* 29). Chacune des forces du couple terrestre appliqué à l'aiguille pourra être représentée, d'après la théorie du pendule, par cn^2, c étant un poids constant dans le même lieu pour une aiguille dans laquelle la distribution du magnétisme libre ne change pas. Égalons le moment du poids à la somme des moments des forces magnétiques du globe, forces qui font avec l'horizontale FH l'angle i demandé ; il viendra

$$pd \cos a = cn^2 l \sin(a - i) + cn^2 l' \sin(a - i).$$

Dans le second état magnétique de l'aiguille, le centre G

(*) Cette suspension s'opère à l'aide d'un étrier de papier supporté par un long fil de soie non tordu.

sera situé sur sa partie *boréale*, c'est-à-dire sur celle qui s'élève vers le sud, et la pesanteur diminuera l'inclinaison. Chacune des forces terrestres aura pour valeur cn'^2, et l'équation des moments sera (*)

$$pd\cos a' = cn'^2 l \sin(i - a') + cn'^2 l' \sin(i - a').$$

En divisant ces deux équations membre à membre, nous éliminerons p, d, c, $l + l'$, et nous aurons

$$\frac{\cos a}{\cos a'} = \frac{n^2 \sin(a - i)}{n'^2 \sin(i - a')}.$$

De là on déduit sans peine

$$\tang i = \frac{n^2 \tang a + n'^2 \tang a'}{n^2 + n'^2}.$$

Discussion. Cette formule montre que l'inclinaison réelle i dépend non-seulement des inclinaisons apparentes a et a', mais encore des intensités relatives du magnétisme développé dans l'aiguille par les deux aimantations inverses. Il sera facile de rendre n' aussi peu différent de n que l'on voudra, en prenant une aiguille qui ne soit pas trop fortement trempée, en l'aimantant chaque fois avec des faisceaux d'aimants très-énergiques, et en multipliant les frictions de manière à *saturer* l'aiguille dans les deux cas. Il faudra aussi que la méthode d'aimantation soit exactement la même dans le second cas que dans le premier, afin que l'intervalle AB ou $l + l'$ des deux pôles demeure constant. Nous supposerons donc,

---

(*) Dans la pratique l'angle a ou l'angle a' n'est pas le résultat d'une seule observation ; a ou a' est la moyenne des angles que l'on obtient en présentant successivement la même face de l'aiguille à l'est et à l'ouest, et en lisant chaque fois sur le limbe gradué aux deux extrémités de l'aiguille. On corrige ainsi 1° le défaut possible de coïncidence de l'axe magnétique avec l'axe de figure, 2° la faible courbure que peut avoir ce dernier axe. Pour savoir jusqu'où vont ordinairement les écarts offerts par ces diverses déterminations du même angle a ou a', voyez le *Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme*, par M. Becquerel, t. 7, p. 27. Vous y trouverez des exemples numériques très-bien choisis, que l'auteur a empruntés aux observations du capitaine Duperrey.

dans ce qui va suivre, $n = n'$, et la formule deviendra

$$\tang i = \frac{\tang a + \tang a'}{2}.$$

Ainsi *la tangente de la véritable inclinaison est égale à la demi-somme des tangentes des deux inclinaisons observées.*

Il est aisé de construire l'angle i géométriquement, connaissant a et a' : on tracera une circonférence de cercle avec un rayon égal à l'unité. Soit F (*fig.* 30) le centre ; soit FH un rayon horizontal ; soient $HT = \tang a$ et $HT' = \tang a'$. On prendra le milieu O de la différence TT' des deux tangentes, on joindra ce point O au centre F, et l'angle HFO sera évidemment l'angle demandé i.

De cette construction résulte l'inégalité

$$i > \frac{a + a'}{2}.$$

Car si l'on menait la bissectrice FO' de l'angle TFT' ou $a - a'$, elle diviserait la base TT' en deux parties TO' et O'T', qui seraient entre elles comme les côtés adjacents FT et FT' ou comme $\sec a$ est à $\sec a'$. O'T' serait donc plus petit que OT' ou $\frac{TT'}{2}$, et partant HFO' ou $\frac{a + a'}{2}$ serait plus petit que HFO qui est notre angle i.

On déduirait encore cette inégalité de l'équation non résolue

$$\frac{\cos a}{\cos a'} = \frac{\sin(a - i)}{\sin(i - a')}.$$

En effet, de $a > a'$ on conclut $\cos a < \cos a'$; donc on doit avoir $\sin(a - i) < \sin(i - a')$, et par suite, $a - i < i - a'$, ou $i > \frac{a + a'}{2}$, C. Q. F. T. On voit donc que l'approximation usitée qui consiste à poser $i = \frac{a + a'}{2}$ donne une inclinaison un peu trop faible.

L'expression que j'ai obtenue pour $\tang i$ n'étant pas immédiatement calculable par logarithmes, on pourra la remplacer par celle-ci :

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin(a+a')}{2\cos a \cos a'}.$$

Mais il vaut mieux prendre pour inconnue l'excès de i sur $\frac{a+a'}{2}$. Des transformations faciles conduiront à la formule

$$\operatorname{tang}\left(i - \frac{a+a'}{2}\right) = \operatorname{tang}\frac{a+a'}{2} \operatorname{tang}^2\frac{a-a'}{2}.$$

Cette expression est toujours positive, quel que soit le signe de $a - a'$; ce que l'on pouvait prévoir. Elle servira à calculer i très-simplement en fonction de la demi-somme et de la demi-différence des angles observés (*). Cette expression a aussi l'avantage de donner la mesure de l'erreur que l'on commet ordinairement dans la pratique. Pour la même différence $a - a'$, l'erreur croît à mesure que l'inclinaison augmente. On conçoit que cette erreur soit négligeable pour des inclinaisons faibles ou même moyennes. Mais pour les grandes inclinaisons, elle devient trop forte pour qu'on la laisse subsister. Appuyons cette remarque de quelques exemples numériques.

(*) Si l'on supposait n' différent de n, on parviendrait à la formule plus générale

$$\operatorname{tang}(i-\theta) = \frac{[(n^2+n'^2)\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta' + (n^2-n'^2)]\operatorname{tang}\theta'}{n^2+n'^2 + (n^2-n'^2)\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta'}$$

dans laquelle j'ai remplacé pour abréger $\frac{a+a'}{2}$ par θ et $\frac{a-a'}{2}$ par θ'.

Si l'on faisait $n' = n$ dans cette expression, on retomberait sur celle qui est indiquée dans le texte. Il serait aisé aussi de trouver le rapport qui devrait exister entre n et n' pour que l'on eût rigoureusement

$$\operatorname{tang}(i-\theta) = 0, \text{ ou en d'autres termes } i = \frac{a+a'}{2}$$

Mais le cas où cette condition serait remplie est beaucoup trop particulier pour se présenter dans les observations.

Une boussole d'inclinaison peut être regardée comme très-bonne, si, pour des inclinaisons voisines de 45°, la différence $a - a'$ n'est que de 1°. Posons donc

$$\frac{a+a'}{2} = 45° \qquad \text{et} \qquad \frac{a-a'}{2} = 30' \,;$$

nous trouverons (*) $i - \frac{a+a'}{2} = 15'',72$.

L'erreur ne tombant que sur les secondes a peu d'importance; car ici, la nature des observations ne permettant pas d'atteindre une précision illimitée, il est peut-être inutile de dépasser les minutes dans l'évaluation des angles, et un surcroît d'exactitude qui ne porte que sur les secondes est sans doute illusoire. Mais supposons qu'à une haute latitude l'expérience ait donné

$$\frac{a+a'}{2} = 88° \qquad \text{et} \qquad \frac{a-a'}{2} = 30'.$$

Il viendra $\qquad i - \frac{a+a'}{2} = 7'\,29'',84.$

On commettrait donc une erreur notable si l'on posait dans ce cas $i = \frac{a+a'}{2}$. Il en serait de même *à fortiori* si la différence $a - a'$ surpassait un degré.

Pour $\quad \frac{a+a'}{2} = 88° \qquad \text{et} \qquad \frac{a-a'}{2} = 1°,$

on trouverait $\quad i - \frac{a+a'}{2} = 29'\,59'',59.$

(*) L'angle $i - \frac{a+a'}{2}$ étant très-petit, on peut toujours le déterminer au moyen de la première partie des tables trigonométriques, qui comprend les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés. Le calcul de $i - \frac{a+a'}{2}$ offre donc un peu moins d'incertitude que le calcul direct de l'angle i, pour lequel il faudrait généralement recourir à la seconde partie des tables, où les logarithmes sont espacés de dix en dix secondes. Toutefois cette remarque n'a de valeur qu'en théorie, parce que la seconde partie des tables donne une approximation plus que suffisante pour les angles déduits de l'observation.

Ainsi la moyenne $\frac{a+a'}{2}$ des deux angles serait trop faible de près d'un demi-degré.

Enfin supposons l'aiguille assez mal *centrée* pour qu'à une certaine latitude elle se dirige horizontalement dans le méridien magnétique après le renversement de ses pôles. On ferait alors $a' = 0$, et les formules se réduiraient à

$$\text{tang}\, i = \frac{\text{tang}\, a}{2}, \qquad \text{tang}\left(i - \frac{a}{2}\right) = \text{tang}^3 \frac{a}{2}.$$

Ces formules seraient alors d'une nécessité incontestable. Ajoutons cependant que les boussoles d'inclinaison, telles qu'on les fabrique aujourd'hui, ne pourraient présenter cette circonstance que si l'angle a était fort petit, c'est-à-dire si elles étaient transportées dans le voisinage de l'équateur magnétique.

Notre mode de correction serait encore applicable, si, au lieu de chercher à mesurer directement l'inclinaison *absolue* i dans le méridien magnétique, on évaluait les inclinaisons *relatives* i' et i'' dans deux plans verticaux faisant entre eux un angle ε. Dans cette méthode indirecte, on calculerait i par la formule connue

$$\cot i = \frac{\sqrt{\cot^2 i' + \cot^2 i'' - 2 \cos\varepsilon \cot i' \cot i''}}{\sin\varepsilon},$$

et si l'angle ε était droit, ce qui est le cas ordinaire, on aurait

$$\cot i = \sqrt{\cot^2 i' + \cot^2 i''}.$$

Comme il faut renverser les pôles de l'aiguille dans chacune des deux observations, notre calcul donnerait

dans le premier cas, $\text{tang}\, i' = \frac{\text{tang}\, a + \text{tang}\, a'}{2}$,

et dans le second, $\text{tang}\, i'' = \frac{\text{tang}\, b + \text{tang}\, b'}{2}$,

b et b' désignant les angles homologues aux angles a et a'. On obtiendrait ainsi i' et i'' plus exactement que si l'on se contentait de prendre

$$i' = \frac{a+a'}{2} \qquad \text{et} \qquad i'' = \frac{b+b'}{2},$$

et l'on serait conduit à une valeur plus rigoureuse de l'inclinaison absolue i.

En résumé, je pense que le mode de correction que je propose aurait quelque avantage même pour les observations que l'on fait avec les meilleures boussoles, et que de plus il servirait à utiliser des aiguilles d'inclinaison dont le défaut de centrage est trop grand pour être suffisamment corrigé par l'emploi des moyennes, auquel on s'est borné jusqu'ici.

MÉMOIRE

SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

PAR B. AMIOT,
Professeur de mathématiques au collége Saint-Louis.

---

1. Lorsqu'une circonférence est divisée en un nombre m d'arcs égaux, les cordes qui sous-tendent ces arcs forment le polygone régulier ordinaire de m côtés. Mais il existe plusieurs espèces de polygones dans l'ordre de m côtés. (Voyez *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, par M. Poinsot, *Journal de l'École polytechnique*, 10^e cahier, page 16.)

Soit a un nombre entier inférieur et premier à m, toute corde, qui sous-tend un arc égal à une fraction de la circonférence marquée par $\frac{a}{m}$, peut être considérée comme le côté d'un polygone régulier de m côtés. Si $a = 1$, on aura le polygone régulier ordinaire, et dans tout autre cas, ce sera un polygone régulier *étoilé*. L'espèce de ce polygone est marquée par le nombre de fois que le périmètre fait le tour entier de la circonférence, ou, ce qui est la même chose, par le nombre d'unités contenues dans le numérateur de la fraction $\frac{a}{m}$.

2. n et n' étant deux nombres entiers quelconques premiers entre eux, supposons que l'on connaisse les valeurs de tous les côtés des différentes espèces de polygones réguliers de l'ordre n ainsi que de l'ordre n', et proposons-nous de déterminer les valeurs des côtés des différentes espèces de polygones réguliers inscrits au même cercle et contenus dans l'ordre marqué par le produit nn'.

Rappelons d'abord la proposition suivante démontrée par M. Poinsot. (*Voyez* Mémoire déjà cité.)

Dans l'ordre des polygones de m côtés, il y a autant d'espèces différentes qu'il y a de nombres premiers à m depuis l'unité jusqu'au nombre $\frac{m-1}{2}$.

Si l'on désigne ce nombre par M, et que l'on suppose $m=\alpha^p.\beta^q.\gamma^r\ldots\ldots$, α, β, γ représentant les facteurs simples ou premiers de m, on sait que l'on a :

$$M=\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

3. Soient deux nombres entiers n et n' premiers entre eux ; soient en outre a un nombre entier premier à n et moindre que $\frac{n}{2}$, et a' un nombre entier premier à n' et moindre que $\frac{n'}{2}$, si l'on forme les deux fractions $\frac{a}{n}\pm\frac{a'}{n'}=\frac{A}{nn'}$, A représentant l'un ou l'autre des deux nombres $an'\pm a'n$, et que l'on remplace successivement a par tous les nombres

premiers à n, depuis l'unité jusqu'à $\frac{n-1}{2}$, et a' par tous les nombres premiers à n' depuis l'unité jusqu'à $\frac{n'-1}{2}$, il s'agit de prouver que l'on obtiendra pour A tous les nombres premiers à nn' compris depuis l'unité jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$, pourvu toutefois que l'on prenne $nn' - A$ au lieu de A, toutes les fois que ce dernier nombre excédera $\frac{nn'-1}{2}$.

D'abord il est manifeste que $A = an' \pm a'n$ est toujours un nombre premier avec n et n', et par conséquent avec le produit nn'. Car si l'on supposait qu'un certain facteur premier p divisât, par exemple, A et n, ce facteur diviserait an' et par suite a ou n', ce qui est également contraire à l'hypothèse. Il en résulte que $nn' - A$ est aussi un nombre premier à nn'.

Je dis, en second lieu, que tous les nombres obtenus pour A sont différents les uns des autres.

En effet, soient les valeurs de A

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 n' + a_1' n, \\
A_2 &= a_2 n' + a_1' n, \\
A_3 &= a_2 n' + a_2' n, \\
A_4 &= a_1 n' - a_1' n, \\
A_5 &= a_2 n' - a_1' n, \\
A_6 &= a_2 n' - a_2' n, \\
A_7 &= \text{etc.}
\end{aligned}$$

Il est évident que A_1 diffère de A_2, de A_4, etc. Mais supposons que l'on eût $A_1 = A_3$, il en résulterait $(a_1 - a_2)n' = (a_2' - a_1')n$, et par conséquent n diviserait $a_1 - a_2$, ce qui est impossible, puisque chacun des nombres a_1 et a_2 est moindre que $\frac{n}{2}$. On verrait exactement de la même manière que deux autres quelconques de ces nombres sont nécessairement différents l'un de l'autre.

Mais il peut arriver que A_1, par exemple, soit plus grand que $\frac{nn'-1}{2}$; alors, au lieu de A_1 on prendra $nn'-A_1$, et je dis que ce nombre diffère pareillement de A_2, A_3........ En effet, supposons que l'on ait $nn'-A_1=A_2$, il en résultera $n'(n-a_1)=n(a_2+2a_1')$, et par suite n devra diviser a_1, ce qui est impossible, puisque l'on suppose $a_1<\frac{n}{2}$. Si l'on supposait $nn'-A_1=A_3$, il en résulterait $n'(n-a_1-a_2)=$ $=n(a_1'+a_2')$; et par suite n' diviserait $a_1'+a_2'$, ce qui ne se peut, puisque cette somme est moindre que n'.

Enfin, si l'on supposait $nn'-A_1=A_4$, il en résulterait $n=2a_1$, ce qui est encore inadmissible.

4. Cela posé, soient N le nombre des nombres premiers à n depuis l'unité jusqu'à $\frac{n-1}{2}$, et N' celui des nombres premiers à n' depuis 1 jusqu'à $\frac{n'-1}{2}$; si l'on donne successivement à a les N valeurs comprises de 1 à $\frac{n-1}{2}$, on aura, à cause du double signe, 2N valeurs de A correspondantes à une même valeur de a'. On en aura le même nombre pour chacune des valeurs de a', et par conséquent en tout on obtiendra 2NN' valeurs qui seront premières à nn', différentes les unes des autres et comprises depuis 1 jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$, en ayant soin de prendre $nn'-A$, au lieu de A, chaque fois que A excédera $\frac{nn'-1}{2}$.

Or, si l'on désigne par α, β, γ les facteurs simples de n, par α', β', γ'.... ceux de n', de sorte que l'on ait

$$n=\alpha^p.\beta^q.\gamma^r.... \qquad \text{et} \qquad n'=\alpha'^{p'}.\beta'^{q'}.\gamma'^{r'}....,$$

il en résultera

$$nn' = \alpha^p \alpha'^{p'} 6^q 6'^{q'} \gamma^r \gamma'^{r'} \ldots ;$$

et si l'on désigne par N_1 le nombre des nombres premiers à nn' et compris depuis l'unité jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$, on aura

$$N_1 = \frac{nn'}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha'}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6'}\right)\ldots$$

D'ailleurs, on a

$$N = \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots \text{ et } N' = \frac{n'}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha'}\right)\left(1-\frac{1}{6'}\right)\ldots$$

et par conséquent $N_1 = 2NN'$.

Donc enfin les différentes valeurs obtenues pour A, ou $nn' - A$, chaque fois que A excédera $\frac{nn'-1}{2}$, sont bien les différents nombres premiers à nn' compris depuis l'unité jusqu'à $\frac{nn'-1}{2}$.

5. Soient maintenant $BC = x$ (*fig.* 1) le côté d'un polygone régulier de n côtés, et $AB = y$ celui d'un polygone régulier de n' côtés, inscrits l'un et l'autre à un cercle de rayon r, de sorte que les arcs BC et BA soient des fractions de la circonférence exprimées par $\frac{a}{n}$ et $\frac{a'}{n'}$; il s'agit de calculer la corde $AC = z$, qui sous-tend l'arc $AC = \frac{a}{n} - \frac{a'}{n'} = \frac{A}{nn'}$ de la circonférence.

Si l'on abaisse BI perpendiculaire sur le prolongement de AC, on a dans le triangle ABC,

$$(1) \qquad x^2 = y^2 + z^2 + 2z.AI ;$$

les deux triangles semblables KOB et ABI donnent

$$AI : KO :: AB : BO \ldots \quad \text{d'où} \quad AI = \frac{y\sqrt{4r^2 - x^2}}{2r},$$

et par suite, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad z^2+\frac{y}{r}\sqrt{4r^2-x^2}.\,z+y^2-x^2=0.$$

On en déduit

$$(3) \qquad z=\frac{-y\sqrt{4r^2-x^2}\pm x\sqrt{4r^2-y^2}}{2r}.$$

Une de ces valeurs est positive et correspond à AC; on a, en effet,

$$z'=\frac{x\sqrt{4r^2-y^2}-y\sqrt{4r^2-x^2}}{2r}=\frac{2r(x^2-y^2)}{x\sqrt{4r^2-y^2}+y\sqrt{4r^2-x^2}},$$

quantité évidemment positive, puisque l'on suppose $x>y$.

L'autre valeur

$$z''=-\frac{y\sqrt{4r^2-x^2}+x\sqrt{4r^2-y^2}}{2r}$$

est visiblement négative. Pour l'interpréter, je change z en $-z$ dans l'équation (1), ce qui donne

$$x^2=y^2+z^2-2z.\mathrm{A'I},$$

en prenant $\mathrm{A'I}=\mathrm{AI}$. Or, dans le triangle CBA′, on a

$$x^2=y^2+\overline{\mathrm{CA'}}^2-2\mathrm{CA'}.\mathrm{A'I};$$

et par conséquent CA′ est bien en valeur absolue la 2ᵉ racine de l'équation (1); c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{CA'}=-z''=\frac{y\sqrt{4r^2-x^2}+x\sqrt{4r^2-y^2}}{2r}.$$

Pour interpréter géométriquement cette solution, je prends $\mathrm{BA_1}=\mathrm{BA}$, et le triangle $\mathrm{CBA_1}$, égal au triangle CBA′ donne $\mathrm{CA_1}=\mathrm{CA'}$. D'ailleurs, arc $\mathrm{CABA_1}=\mathrm{CAB}+ +\mathrm{AB}=\frac{a}{n}+\frac{a'}{n'}$ de la circonférence. Donc enfin :

Des deux racines de l'équation (1), *l'une représente la corde* *qui sous-tend l'arc* AC $= \frac{a}{n} - \frac{a'}{n'}$, *et l'autre la corde qui sous-tend* $CA_1 = \frac{a}{n} + \frac{a'}{n'}$ *de la circonférence.*

6. Supposons maintenant que l'on connaisse les N valeurs $x_1, x_2 \ldots\ldots x_N$ des côtés des différents polygones de l'ordre n, ainsi que les N' valeurs $y_1, y_2 \ldots\ldots y_{N'}$ de ceux des polygones de l'ordre n', il suffira de remplacer dans la formule (3) x successivement par les valeurs $x_1, x_2 \ldots\ldots x_N$, et y par les valeurs $y_1, y_2 \ldots\ldots y_N$, pour obtenir les 2NN' côtés des différents polygones de l'ordre nn'.

7. Ainsi, pour obtenir les côtés des 4 pentédécagones réguliers inscrits au même cercle, nous prendrons le côté du triangle équilatéral et les côtés des deux pentagones réguliers inscrits à ce cercle, qui sont, le rayon étant pris pour unité, $y_1 = \sqrt{3}$ et $x_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.
Ces valeurs étant substituées dans la formule (3), nous avons les 4 valeurs suivantes :

$$z_1 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right),$$

$$z_2 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right),$$

$$z_3 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right),$$

$$z_4 = -\frac{1}{4}\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}).$$

8. On pourrait obtenir de même les valeurs des côtés d'un grand nombre de polygones, en partant des valeurs connues des polygones de 3, 4, 5 côtés ou de leurs multiples 6, 8, 15, etc., que l'on combinerait deux à deux, de manière à ne prendre jamais que des nombres premiers entre eux.

Mais les différents polygones que l'on obtient ainsi peuvent être également calculés par les formules ordinaires de la géométrie. Par exemple, en prenant les côtés des polygones de 4 et 5 côtés, de 8 et de 15, etc., on trouve ceux de 20, de 120, etc., et l'on peut obtenir ces mêmes polygones, en doublant, pour le premier, une fois le nombre des côtés du décagone, et, pour le deuxième, trois fois le nombre des côtés du pentédécagone.

9. Mais les polygones de 3, 4 et 5 côtés ne sont plus les seuls que l'on puisse inscrire géométriquement, c'est-à-dire avec la règle et le compas, et dont on sache par conséquent calculer les côtés sans se servir d'aucune équation de degré supérieur au deuxième. M. Gauss a démontré que l'on peut inscrire géométriquement dans un cercle tous les polygones dont le nombre des côtés est exprimé par 2^p+1, pourvu que ce nombre soit premier; il a donné des méthodes générales pour ramener le calcul des côtés de ces différents polygones à la résolution d'une suite d'équations du deuxième degré. Ces méthodes sont fort belles et ne laissent rien à désirer quant à la théorie; mais elles reposent sur les considérations les plus élevées de la théorie des nombres, et ne conduisent pas à des résultats très-simples, même pour le polygone de 17 côtés.

Nous avons donc pensé qu'un procédé particulier, par lequel on peut calculer et construire les valeurs des côtés des 8 polygones de 17 côtés sans sortir des notions les plus élémentaires de l'algèbre, ne sera pas dépourvu de tout intérêt : il offrira, du moins, un exercice utile de calcul et de construction géométrique.

10. Supposons un cercle O (*fig.* 32), de rayon égal à l'unité, divisé en 17 parties égales, nous aurons dans le triangle AOB,

$$\overline{AB}^2 = 2 - \sqrt{4 - \overline{AC}^2},$$

en observant que $BB' = AC$.

Nous aurons pareillement dans le triangle AOC,

$$\overline{AC}^2 = 2 - \sqrt{4 - \overline{AD}^2},$$

parce que $AD = CC'$. Puis, dans le triangle AOD,

$$\overline{AD}^2 = 2 - \sqrt{4 - \overline{AE}^2};$$

et enfin dans le triangle AOE,

$$\overline{AE}^2 - 2 + \sqrt{A - \overline{AB}^2},$$

parce que $AB = EE'$.

Si, pour simplifier, nous posons,

$$\begin{array}{lll} a = \sqrt{4 - \overline{AB}^2} & \text{d'où résulte} & \overline{AB}^2 = 4 - a^2, \\ b = \sqrt{4 - \overline{AC}^2} & & \overline{AC}^2 = 4 - b^2, \\ c = \sqrt{4 - \overline{AD}^2} & & \overline{AD}^2 = 4 - c^2, \\ d = \sqrt{4 - \overline{AE}^2} & & \overline{AE}^2 = 4 - d^2, \end{array}$$

nous aurons les quatre équations,

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b + 2, \\ b^2 = c + 2, \\ c^2 = d + 2, \\ d^2 = -a + 2. \end{array} \right.$$

Si nous considérons pareillement les quatre triangles AOH, AOK, AOL et AOM, et que nous posions

$$a' = \sqrt{4 - AK^2}, \quad b' = \sqrt{4 - AL^2},$$
$$c' = \sqrt{4 - AM^2}, \quad d' = \sqrt{4 - AH^2},$$

nous aurons les quatre équations

$$(B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a'^2 = -b' + 2, \\ b'^2 = -c' + 2, \\ c'^2 = -d' + 2, \\ d'^2 = +a' + 2; \end{array} \right.$$

système qui ne diffère du précédent qu'en ce que a, b, c et d y sont remplacés par $-a'$, $-b'$, $-c'$ et $-d'$.

11. Si l'on éliminait directement b, c et d entre les équations (A), on aurait une équation du 16^e degré en a, dont les racines seraient non-seulement toutes les valeurs cherchées, mais encore celles qui correspondent aux polygones de 5 et de 3 côtés. Car, en faisant $b=d$ et $c=-a$, les deux dernières équations du système rentrent dans les deux premières, et l'on retombe sur le pentagone régulier. De même, en supposant $a=b$, $b=c$, $c=d$ et $d=-a$, on a la seule équation $a^2=a+2$ qui convient au triangle équilatéral.

Pour supprimer ces solutions étrangères à la question, je soustrais d'abord la troisième équation de la première, et la quatrième de la deuxième, puis je multiplie les deux équations ainsi obtenues et je supprime les facteurs $b-d$ et $c+a$, ce qui me donne

$$(\alpha)\qquad (a-c)(b+d)=1 \text{ ou bien } ab+ad-bc-cd=1.$$

Je soustrais ensuite la deuxième équation de la première, la troisième de la deuxième, la quatrième de la troisième, et la première de la quatrième ; je multiplie membre à membre, et je supprime les facteurs communs $b-c$, $c-d$, $d+a$ et $-(a+b)$, ce qui fournit

$$(\beta)\qquad (a-b)(c+d)(b+c)(a-d)=1$$

ou bien

$$(ac-bd+ad-bc)(ac-bd+ab-cd)=1.$$

Si nous posons

$$x=c-a \quad \text{et} \quad z=-ac$$
$$y=b+d \qquad\quad t=bd,$$

les équations (α) et (β) deviendront

$$(\alpha')\qquad xy=1,$$
$$(\beta')\qquad (t+z+bc-ad)(t+z+cd-ab)=1,$$

et la question sera ramenée à calculer x, y, z et t, ou simplement $X = x + y$, $Y = t + z$ et $Z = tz$, puisque déjà nous connaissons xy.

Or, en vertu de (α), l'équation ($\mathcal{E}'$) devient

$$Y^2 + 3Y + b^2d + bd^2 - ca^2 - ac^2 = 1\ ;$$

et comme on déduit des équations (A)

$$b^2d + bd^2 + ca^2 - ac^2 = -1 + 2(b + d + c - a) = -1 + 2X,$$

on a enfin, entre Y et X, l'équation

$$\text{(Y)} \qquad Y^2 + 3Y + 2X = 2.$$

Si l'on élève au carré l'équation $X = b + c + d - a$, en observant d'ailleurs que $b^2 + d^2 + c^2 + a^2 = x + y + 8 = X + 8$, on obtient sans peine la deuxième équation

$$\text{(X)} \qquad X^2 - 2Y - X = 6.$$

Pour avoir Z, j'élève pareillement au carré les deux membres de l'équation $Y = bd - ac$, et j'ai

$$Y^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = a^2c^2 + b^2d^2 + 2Z.$$

Or

$$a^2c^2 + b^2d^2 = bd - ac + 2(b + d + c - a) + 8,$$

et par conséquent, on trouve, après quelques réductions,

$$\text{(Z)} \qquad Z = -2(X + Y) - 3.$$

12. Pour obtenir les valeurs de X et de Y, je remarque que les équations (X) et (Y) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$Y(Y + 3) = 2(1 - X) \qquad \text{et} \qquad X(X - 1) = 2(Y + 3).$$

Si on les multiplie membre à membre, on a

$$(XY + 4)(X - 1)(Y + 3) = 0.$$

Et l'on voit qu'à la valeur $X - 1$ correspond $Y = -3$, système qui ne peut convenir à la question, attendu que la valeur correspondante de Z serait $+4 - 3 = 1$, et que Z doit être négatif.

Reste donc l'équation $XY = -4$, laquelle combinée avec (X) donne, par l'élimination de Y,

$$X^3 - X^2 - 6X + 8 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré, mais on voit sans peine qu'elle admet la racine 2 ; par conséquent elle se décompose dans les deux facteurs

$$(X-2)(X^2+X-4)=0.$$

A la valeur $X=2$ correspond $Y=-2$, et ce système doit encore être rejeté. En effet, la valeur correspondante de Z serait -3, et il est facile de reconnaître que l'on doit avoir, en valeur absolue, $Z<2$. Car la corde d, qui sous-tend l'arc $A'E = \frac{1}{34}$ de la circonférence, est moindre que la moitié du côté du décagone ; la corde c, qui sous-tend l'arc $A'D = \frac{4}{17} + \frac{1}{34}$ de $C = \frac{9}{34}C$ est plus petite que le côté du décagone étoilé qui sous-tend $\frac{3}{10}C$, et par conséquent on a

$$abcd < 2.2.\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} < 2.$$

Restent donc les deux valeurs de X fournies par l'équation $X^2+X-4=0$. Or, si nous substituons dans l'équation (Y) la valeur $X = -\frac{4}{Y}$, et que nous supprimions la racine étrangère $Y=-2$, nous obtenons encore l'équation $Y^2+Y-4=0$. Par conséquent, des deux racines de cette équation, l'une est la valeur de X, et l'autre celle de Y ; et l'on a, pour la valeur correspondante de Z, $Z=-1$.

13. D'après cela, pour résoudre la question qui nous occupe, il suffira de résoudre ou de construire le système d'équations suivantes :

$$(1)\qquad X^2+X-4=0,$$
$$(2)\qquad x^2-Xx-1=0,$$
$$(3)\qquad z^2-Yz-1=0,$$
$$(4)\qquad a^2-ax+z=0,$$
$$(5)\qquad b^2-by+t=0.$$

La racine positive de l'équation (1) sera la valeur de X, et la négative celle de Y ; les deux racines de l'équation (2) seront positives et représenteront, la plus petite, la valeur de x, et la plus grande, celle de y ; l'équation (3) donnera deux valeurs de signes contraires, la positive sera z et la négative t ; enfin, les deux racines de (4) seront $-a$ et c, et celles de (5), b et d.

En effectuant les calculs, on trouvera aisément

$$X=\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1),\qquad Y=-\frac{1}{2}(\sqrt{17}+1),$$

$$x=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right),$$

$$y=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right),$$

$$z-=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right),$$

$$t=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right).$$

$$-a=\frac{1}{8}\Big(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-$$
$$-\sqrt{68+14\sqrt{17}-4\sqrt{170-26\sqrt{17}+16\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}\Big),$$

$$c=\frac{1}{8}\Big(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}+$$
$$+\sqrt{68+14\sqrt{17}-4\sqrt{170-26\sqrt{17}+16\sqrt{34+14\sqrt{17}}}}\Big),$$

$$b=\frac{1}{8}\Big(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+$$

$$+\sqrt{68+14\sqrt{17}+4\sqrt{170-26\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\Big),$$

$$d=\frac{1}{8}\Big(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-$$

$$-\sqrt{68+14\sqrt{17}+4\sqrt{170-26\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\Big).$$

14. Si au lieu du système d'équations (A), on avait considéré le système (B), on aurait effectué les mêmes calculs en posant $x=a'-c'$, $y=-(b'+d')$, $z=-a'c'$ et $t=b'd'$, d'où serait résulté que la racine négative de l'équation (1) aurait représenté X et la racine positive Y. Il s'ensuit que les valeurs de a', $-b'$, $-c'$ et d' se déduiront de celles de $-a$, b, c et d, en changeant $\sqrt{17}$ en $-\sqrt{17}$ dans les quatre dernières formules.

15. Une fois les valeurs de a, b....a'.... ainsi obtenues, on aura aisément celles des côtés AB, AC ... des huit polygones de 17 côtés ; et en les combinant avec les valeurs connues des côtés des polygones de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15 .... côtés, on obtiendra tous les polygones de 51, 68, 85, 102, 136, 170, 255 .... côtés.

16. Au lieu de résoudre les équations du n° 13, on pourrait les construire et arriver assez simplement aux valeurs des lignes cherchées. Pour cela, l'équation (1) se met sous la forme $2^2=X(1+X)$, et donne visiblement (Fig. 33) $X=OX$ et $Y=OY$, si l'on suppose $OM=2$ et $MI=\frac{1}{2}=\frac{OA}{2}$. De même, les équations (2) et (3) se mettront sous la forme $1^2=x(x-X)$ et $1^2=z(z-Y)$, et l'on a, en posant $OL=\frac{1}{2}X$ et $OL'=\frac{1}{2}Y$ (*fig.* 33) : $x=A'x$, $y=A'y$, $z=A'z$ et $t=A't$.

Pour rétablir l'homogénéité dans les équations (4) et (5), je pose $z \times 1 = k^2$, $t \times 1 = h^2$, et je construis $k = \mathrm{A}'k$ et $h = \mathrm{A}'h$; ce qui me donne $k^2 = a(a - x)$ et $h^2 = b(y - b)$. Par conséquent, en prenant $\mathrm{A}'k_1 = k$, et $k_1 v = \frac{x}{2}$, on aura $\mathrm{A}'a = a$, et $\mathrm{A}'c = c$; de même, en prenant $\mathrm{A}'y_1 = y$ et $\mathrm{A}'h_1 = h$, on aura $\mathrm{A}'d = d$ et $\mathrm{A}b = y_1 d = b$; de sorte qu'en portant les cordes $\mathrm{A}'d$, $\mathrm{A}'c$, $\mathrm{A}'b$ et $\mathrm{A}'a$ sur la circonférence O, on aura les arcs $\mathrm{AB} = \frac{1}{17}$, $\mathrm{AC} = \frac{2}{17}$, $\mathrm{AD} = \frac{4}{17}$ et $\mathrm{AE} = \frac{8}{17}$ de la circonférence.

Si l'on change ensuite X en Y et réciproquement, puis que l'on répète d'ailleurs la même construction, on aura les quatre cordes $\mathrm{A}'c' = c'$, $\mathrm{A}'a' = a'$, $\mathrm{A}'b' = b'$ et $\mathrm{A}'d' = d'$, telles qu'en les portant de A en M (*fig.* 32), en K, en L et en H, on obtiendra les arcs $\mathrm{AH} = \frac{3}{17}$, $\mathrm{AL} = \frac{5}{17}$, $\mathrm{AK} = \frac{6}{17}$ et $\mathrm{AM} = \frac{7}{17}$ de la circonférence.

QUESTION D'EXAMEN

RÉSOLUE

PAR M. L. ANNE,

Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur au collége Louis-le-Grand.

—

Trouver les éléments d'une niche cylindrique dont la surface et la capacité sont données.

1re PARTIE.

Soient x le rayon et y la hauteur du demi-cylindre formant cette niche, x est aussi le rayon du quart de sphère qui la termine.

Soient encore πa^2 la surface de cette niche et $\frac{4}{3}\pi b^3$ sa capacité, les équations du problème seront

$$\pi xy + \pi x^2 = \pi a^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi b^3,$$

ou $\quad xy + x^2 = a^2 \quad$ et $\quad 3x^2y + 2x^3 = 8b^3.$

Pour éliminer y, multiplions la première équation par $3x$ et retranchons-en la seconde, on aura

$$x^3 - 3a^2x + 8b^3 = 0.$$

La condition de réalité ou d'imaginarité des racines est ici donnée par $4.27(16b^6 - a^6)$, c'est-à-dire

1° $a > b\sqrt[3]{4}$, 3 racines réelles et inégales,

2° $a = b\sqrt[3]{4}$, 2 racines réelles, dont une double,

3° $a < b\sqrt[3]{4}$, 1 seule racine réelle

1^er^ *cas.* $a > b\sqrt[3]{4}$, les trois racines réelles. Dans $x^3 - 3a^2x + 8b^3 = 0$, le dernier terme $+8b^3$ est positif; le second terme manque; donc une racine est négative et une seule.

Le résultat de la substitution de $+a$ à la place de x est $-2(a^3 - 4b^3)$, quantité négative par l'hypothèse $a > b\sqrt[3]{4}$. Ainsi, des deux racines positives, l'une est plus petite que a, l'autre est plus grande.

La hauteur du cylindre est donnée par $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$, dans laquelle on substitue, à la place de x, ces racines de l'équation précédente. Donc, pour $x > a$, y est négatif; les éléments de la niche ne pouvant être que positifs, il en résulte que des trois racines trouvées, la première doit être rejetée, comme donnant un rayon négatif; la troisième doit l'être aussi, comme donnant une hauteur négative, et la seconde est la seule admissible. Ainsi, quand le problème est possible, il n'admet qu'une seule solution ; c'est-à-dire que deux niches ne peuvent avoir même surface et même capacité sans coïncider.

2e *cas.* $a = b\sqrt[3]{4}$, 2 racines réelles, dont une double. Le trinôme $x^3-3a^2x+8b^3=x^3-3a^2x+2a^3=(x+2a)(x-a)^2$. La première racine donne un rayon négatif $x = -2a$; les deux autres donnent un rayon positif $x = +a$; mais à ce rayon correspond une hauteur nulle $y = 0$, c'est-à-dire que la niche se réduit au quart de sphère qui la surmonte : et en effet les données des problèmes peuvent s'écrire

$$\pi a^2 = \frac{1}{4}.4\pi a^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{1}{4}.\frac{4}{3}\pi a^3,$$

qui expriment bien la surface et la capacité du quart de la même sphère.

Tel est le cas du maximum de capacité pour une surface donnée, ou du minimum de surface pour une capacité donnée.

3e *cas.* $a < b\sqrt[3]{4}$, 1 seule racine réelle. Cette racine unique est négative, puisque le dernier terme de l'équation est positif. Ainsi, dans ce cas, le problème n'est pas possible ; ce qui s'accorde avec la solution du 2e cas.

2e PARTIE.

Si maintenant l'on suppose que le rayon x de la niche et sa hauteur y soient les coordonnées du point commun des deux courbes qui auraient pour équations les équations du problème, ces coordonnées donneront en unités linéaires les valeurs numériques de ces éléments de la niche, et nous allons établir l'identité de ces deux modes de résolution.

$$2x^3 + 3x^2y - 8b^3 = 0 \qquad (\textit{fig. } 34).$$

Cette courbe est du troisième degré et s'étend indéfiniment dans tous les sens ; seulement chaque valeur numérique négative de y donne pour x une valeur réelle positive et une seule (quand, dans une équation $f(x)=0$, il manque un terme entre deux termes de même signe, cette équation a au moins deux racines imaginaires) ; c'est-à-dire que toute parallèle à l'axe des x, et menée au-dessous de cet axe, rencontre toujours la courbe en un seul point situé à droite de l'axe des y.

La méthode générale des asymptotes, appliquée à cette équation, donne pour le coefficient d'inclinaison, $3c+2=0$, et 0 pour l'ordonnée à l'origine. Ainsi, $y=-\frac{2}{3}x$ est l'asymptote de cette courbe. Toutefois il faut se rappeler deux choses :

1° Si le lieu représenté par l'équation se compose d'une courbe et d'une droite, la méthode générale des asymptotes donne évidemment cette droite, puisque au delà de la courbe le lieu se réduit à cette droite. Ainsi $y=-\frac{2}{3}x$ ou ToT' n'est asymptote que parce que $3y+2x$ n'est pas diviseur de $2x^3+3x^2y-8b^3$.

2° Si l'équation de la courbe était complète, l'équation en c serait du degré de l'équation de la courbe, c'est-à-dire du troisième degré ; et comme elle est du premier degré, elle a deux racines infinies. Ainsi, si la méthode générale des asymptotes ne donne pas les asymptotes parallèles à l'axe des y, du moins elle avertit de leur existence. En changeant y en x et x en y, on trouve, en effet, $c_1^2(2c_1+3)=0$ ou $c_1^2=0$ avec $d_1=0$; c'est-à-dire que deux branches de la courbe sont asymptotes à la même partie de l'axe des y.

Car si l'on trouve une valeur double de c, $[c-\alpha]^2=0$, à laquelle corresponde une valeur double de d, $(d-\delta)^2=0$, deux branches de la courbe sont asymptotes à la même extrémité de la droite $y=\alpha x+\delta$.

Pour mieux suivre le cours de la courbe,

$$2x^3 + 3x^2y - 8b^3 = 0,$$

cherchons le coefficient d'inclinaison de sa tangente :

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{6x^2+6xy}{3x^2} = -\frac{2x^3+16b^3}{3x^3} = -\frac{2}{3} - \frac{16b^3}{3x^3},$$

$$y = \frac{2(4b^3 - x^3)}{3x^2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8b^3}{3x^2}.$$

Pour $x = b\sqrt[3]{4} = oB$, on a $y = 0$; B est un point de la courbe, si x décroît de $b\sqrt[3]{4}$ à 0; la fraction $\frac{8b^3}{3x^2}$ reste toujours plus grande que $\frac{2}{3}x$ et croît de plus en plus en convergeant vers l'infini, tandis que $\frac{2}{3}x$ décroît de plus en plus en convergeant vers zéro : donc y converge vers l'infini. Ainsi, la courbe part de B pour devenir asymptote à l'axe des y, du côté des x positifs.

Si x croît de $b\sqrt[3]{4}$ jusqu'à l'infini, la fraction $\frac{8b^3}{3x^2}$ décroît de plus en plus en convergeant vers zéro, de sorte que la valeur de y se réduit à $y = -\frac{2}{3}x$ pour $x = \infty$. Ainsi la courbe part de B pour devenir asymptote à la droite $y = -\frac{2}{3}x$ ou ToT' au-dessus d'elle.

Au reste, le coefficient d'inclinaison de la tangente pour toute valeur positive de x reste toujours négatif; donc la courbe dans tout le cours de cette branche tourne sa concavité vers la région supérieure et à droite du plan.

Pour dessiner la courbe du côté des x négatifs, changeons x en $-x$, et portons les valeurs absolues de x, à gauche de l'origine et sur l'axe des x. L'équation devient

$$y = x_1 + \frac{8b^3}{3x_1^2},$$

et le coefficient d'inclinaison de la tangente devient

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2(8b^3 - x_1^3)}{3x_1^3};$$

y restant toujours positif pour toute valeur de x_1, la courbe est tout entière située au-dessus de l'axe des x, au-dessus de la droite $y = \frac{2}{3}x_1 = -\frac{2}{3}x$, ou ToT', est asymptote à cette droite, et l'est aussi à l'axe des y,

pour $x_1 < 2b$; tang α est positif ;

pour $x_1 > 2b$; tang α est négatif ;

pour $x_1 = 2b = oC$ on a $y = 2b =$ CD et tang $\alpha = 0$;

donc à la rencontre D de la courbe et de la bissectrice GoG' de l'angle des coordonnées de signes contraires, la tangente est parallèle à l'axe des x, c'est le point le plus bas, cette branche tourne sa concavité vers la région supérieure du plan, et la courbe se trouve ainsi complétement tracée.

La deuxième équation $xy + x^2 = a^2$ ou

$$y = \frac{a^2 - x^2}{x} = -x + \frac{a^2}{x}$$

est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont l'une l'axe des y, l'autre la bissectrice $y = -x$ ou GoG' de l'angle des coordonnées de signes contraires ; et comme pour la même abscisse l'ordonnée de la courbe est moins longue que celle de la droite, cette hyperbole est tout entière contenue dans les angles G'oY' et YoG opposés au sommet, elle rencontre nécessairement la première courbe en un point M_1 situé dans l'angle G'oY', puisque cet angle contient son asymptote ToT' ; ainsi il y a toujours une valeur réelle et négative de x, $x = oN_1$, à laquelle correspond une valeur réelle et positive de y, $y = N_1M_1$.

L'hyperbole coupe l'axe des x du côté des x positifs au point $x = +a$; ce point est à droite de B si $a > b\sqrt[3]{4}$; est en B si $a = b\sqrt[3]{4}$; et est à gauche de B si $a < b\sqrt[3]{4}$: ce qui donne lieu à trois cas bien distincts.

1er Cas. $a > b\sqrt[3]{4}$. Soit $oA = a$, l'hyperbole part de A pour devenir asymptote à oG et rencontre nécessairement la première courbe en un point M_3 situé à droite de A, puisque l'angle XoG contient son asymptote oT.

Ainsi il y a une valeur réelle et positive de x, $x = oN_3$, à laquelle correspond une valeur réelle et négative de y,

$$y = N_3M_3.$$

L'hyperbole part de A pour devenir asymptote à l'axe des y, et même pour devenir plus asymptote à cet axe que la première courbe, ce qui établit l'existence d'une troisième rencontre M_2 des deux courbes, car alors l'hyperbole doit passer entre la première courbe et l'axe des y, pour ensuite rester continuellement entre ces deux lignes. Pour le démontrer, soient X l'abscisse de la première courbe, et x celle de l'hyperbole correspondant à la même coordonnée y, les équations du problème donnent

$$2X^3 + 3yX^2 = 8b^3,$$
$$2x^3 + 3yx^2 = 3a^2x - x^3,$$
$$2(X^3 - x^3) + 3y(X^2 - x^2) = 8b^3 - 3a^2x + x^3,$$
$$(X - x)\,[2X^2 + 2Xx + 2x^2 + 3yX + 3yx] = 8b^3 + x^3 - 3a^2x;$$

pour de très-petites valeurs de x, $3a^2x$ est très-petit et peut être plus petit que toute quantité donnée, par exemple $8b^3$; donc pour de très-petites valeurs de x, ou ce qui revient au même, pour de très-grandes valeurs de y, le second membre est positif, et comme les coordonnées le sont aussi, $(X - x)$ l'est aussi; donc toute parallèle à l'axe des x, du côté des x

positifs, et pour une valeur de y suffisamment grande, rencontre constamment l'hyperbole après avoir rencontré l'axe des y, et avant de rencontrer la première courbe.

Ainsi il y a une valeur réelle et positive de x, $x = oN_2$, à laquelle correspond une valeur réelle et positive de y,

$$y = N_2M_2\,;$$

et cette rencontre est la seule dont les deux coordonnées soient positives.

2e *cas.* $a = b\sqrt[3]{4}$. Alors le point A vient se confondre avec le point B, en ce point les deux courbes sont tangentes l'une à l'autre.

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{2x^3+16b^3}{3x^3} = -\frac{24b^3}{12b^3} = -2,$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{y+2x}{x} = -2.$$

A partir de ce point l'hyperbole reste constamment entre la première courbe et l'axe des y; car par cette hypothèse et pour $x = a - \delta$ le trinôme $8b^3 + x^3 - 3a^2x$ devient $\delta^2(3a - \delta)$, quantité essentiellement positive puisque $\delta < a$.

Ainsi pour cette hypothèse il n'y a que deux valeurs réelles de x, l'une négative à laquelle correspond une valeur de y réelle et positive, l'autre positive à laquelle correspond une valeur de y nulle.

3e *cas.* $a < b\sqrt[3]{4}$. Les deux courbes ne peuvent alors avoir aucun point commun du côté des x positifs, car l'hyperbole traverse l'axe des x entre l'origine et le point B pour ensuite rester constamment entre l'axe des y et la première courbe, puisque le trinôme $8b^3 + x^3 - 3a^2x$ pour $x = a - \delta$ devient $(8b^3 - 2a^3) + \delta^2(3a - \delta)$, quantité essentiellement positive comme formée de deux termes positifs.

Ainsi le problème n'est pas possible dans cette hypothèse.

TROISIÈME PARTIE.

Soit proposé de trouver le lieu des points d'où l'on peut mener une, deux ou trois tangentes à la courbe précédente $2x^3+3x^2y-8b^3=0$; l'équation de la tangente à cette courbe est $y-y'=-\frac{6x'^2+6x'y'}{3x'^2}(x-x')$ avec la relation

$$2x'^3+3x'^2y'-8b^3=0.$$

Si elle est menée du point $x=\alpha$, $y=\beta$, ces coordonnées doivent vérifier son équation ; on a

$$\beta-y'=-\frac{6x'^2+6x'y'}{3x'^2}(\alpha-x').$$

Si entre cette équation et la précédente on élimine ou y' ou x', par exemple y'; il en résulte une équation en x', α, β qui pour chaque système de valeurs simultanées de α et de β aura un certain nombre de racines réelles; si à ces valeurs réelles de x correspondent des valeurs réelles de y, on pourra du point (α, β) mener autant de tangentes, et les coordonnées de leurs points de contact seront ces valeurs de x et de y ainsi déterminées. L'équation de la courbe étant du premier degré en y, y est des deux inconnues celle qu'il est le plus simple d'éliminer, et en outre comme à chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y, les conclusions tirées de l'équation finale en x seront absolues. L'équation de la tangente devient, éliminant y,

$$\beta-\frac{8b^3-2x^3}{3x^2}=-\frac{16b^3+2x^3}{3x^3}(\alpha-x)$$

ou $$(3\beta+2\alpha)x^3-24b^3x+16b^3\alpha=0.$$

Pour tout point du plan situé au-dessous de l'asymptote, le coefficient de x^3 devient négatif ; par exemple $-K^2$, et alors l'équation devient

$$K^2x^3+24b^3x-16b^3\alpha=0,$$

équation qui a toujours deux racines imaginaires, puisque

b^3 est essentiellement positif, ainsi de tout point du plan situé au-dessous de l'asymptote on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

Pour tout point situé au-dessus de l'asymptote, la condition de réalité ou d'imaginarité des racines est donnée par

$$\frac{27.16.16.b^6\alpha^2}{(3\beta + 2\alpha)^2} \lesseqgtr \frac{4.24.24.24.b^9}{(3\beta + 2\alpha)^3}$$

ou

$$2\alpha^3 + 3\alpha^2\beta \lesseqgtr 8b^3$$

1° Si $2\alpha^3 + 3\alpha^2\beta > 8b^3$, le point (α, β) est intérieur à la courbe, ainsi de tout point intérieur à la courbe on ne peut mener qu'une tangente ; elle l'est à la branche qui ne contient pas le point.

2° Si $2\alpha^3 + 3\alpha^2\beta = 8b^3$, le point (α, β) est un point de la courbe, ainsi cette courbe est elle-même le lieu d'où l'on peut lui mener deux tangentes ; et en effet on peut toujours en un point de la courbe lui mener une tangente, et de ce même point en mener une à l'autre branche.

3° Si $2\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 < 8b^3$, le point est extérieur à la courbe, ainsi de tout point compris entre la courbe et son asymptote on peut toujours lui mener trois tangentes.

Toutes ces conséquences pouvaient être prévues d'après la forme de la courbe.

Remarque. Si l'équation finale, au lieu d'être ainsi du troisième degré, avait été d'un degré supérieur, on lui aurait appliqué les calculs du théorème de M. Sturm, et les fonctions $V, V_1, V_2, V_3 \ldots$ ayant leurs coefficients fonctions de α et de β, auraient, pour chaque système de valeurs de α et β, donné le nombre des racines réelles : toutefois il faut bien se rappeler que cette méthode ne permet de supprimer ou d'introduire un facteur numérique ou algébrique qu'autant que ce facteur est essentiellement positif ; ainsi l'on ne peut supprimer ou introduire comme facteurs, dans tout le cours du calcul, que des puissances paires de α et de β.

Soit, par exemple, $y = x^{2m+1}$ (*fig.* 35), on trouve

$$\begin{aligned}
V &= 2^m x^{2m+1} - (2m+1)\,\alpha x^{2m} + \beta,\\
V_1 &= x^2 - \alpha x,\\
V_2 &= \alpha^{2m} x - \beta,\\
V_3 &= \beta\,(\alpha^{2m+1} - \beta).
\end{aligned}$$

1° Si α et β sont de même signe, il manque $(2m-1)$ termes entre deux termes de signes contraires : donc V a au moins $(2m-2)$ racines imaginaires. Ainsi, de tout point situé dans l'angle des coordonnées de même signe, on ne peut pas mener plus de trois tangentes à la courbe ; et si α et β sont de signes contraires, V a au moins $2m$ racines imaginaires ; ainsi, de tout point situé dans l'angle des coordonnées de signe contraire, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

2° Si α et β étant positifs, on a $\alpha^{2m+1} > \beta$,
ou si α et β étant négatifs, on a $+\alpha^{2m+1} > +\beta$,
la suite $-x$ donne 3 variations, la suite $+x$ en donne 0. Donc, de tout point situé entre la convexité de la courbe et l'axe des x, on peut toujours mener trois tangentes à la courbe.

3° Si $\alpha^{2m+1} = \beta$, la suite $-x$ donne 2 variations, et la suite $+x$ en donne 0. Donc cette courbe est encore le lieu d'où l'on peut lui mener deux tangentes.

4° Si α et β étant positifs, on a $\alpha^{2m+1} < \beta$,
ou si α et β étant négatifs, on a $+\alpha^{2m+1} < +\beta$,
la suite $-x$ donne 2 variations, la suite $+x$ en donne 1 ; donc il n'y a que 1 racine réelle. Ainsi, de tout point situé entre la concavité de la courbe et l'axe des x, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

NOTE

Sur un mode particulier de description des lignes et des surfaces du second ordre.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

La description de l'ellipse par le point d'une ligne droite de longueur constante, dont les extrémités demeurent sur deux axes fixes est connue de tout le monde, et l'on peut la regarder même comme définitivement acquise à la pratique dans la construction des épures où cette ligne doit figurer. Le mode analogue de description des autres sections coniques et même des surfaces du second ordre, si toutefois il est déjà consigné quelque part, est loin de présenter des avantages équivalents dans la pratique. Cependant on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici quelques détails sur cette question.

Déjà dans le scolie de la page 227, tome II de ce recueil, nous avons indiqué une loi suivant laquelle doit couper les côtés d'un angle fixe, la droite mobile dont un point, qui la partage en deux segments additifs ou soustractifs ayant entre eux un rapport constant, décrit l'hyperbole. Ce qui suit constitue, à vrai dire, le développement et la généralisation de cette remarque. Nous y avons considéré une relation très-simple entre les deux longueurs interceptées par la droite mobile sur les côtés de l'angle. Cette relation sera examinée dans un état de généralité que ne comportait point le scolie dont nous parlons. Il s'agit ici de l'équation algébrique du second degré entre trois variables qui sont les longueurs interceptées par un plan mobile sur les arêtes d'un angle trièdre. Nommons les ξ, η, ζ, prenons les arêtes pour axes des coordonnées x, y, z, les lettres des deux alphabets se correspondant respectivement, la relation donnée sera

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0. \qquad (1)$$

Nous admettrons en outre que la trace du plan mené par le point décrivant et par chacun des axes, sur le plan des deux autres axes, détermine sur celle du plan mobile deux segments additifs ou soustractifs dont le rapport soit constant. On verra facilement, en faisant usage au besoin de la théorie des transversales ou de toute autre considération équivalente, qu'il existe nécessairement une relation entre les six segments ainsi obtenus, et que cette relation revient à dire que les distances des points de division à chacun des axes, mesurées dans le plan mobile, doivent être entre elles comme trois lignes données p, q, r, ces dernières lettres répondant aux coordonnées x, y, z, pour la symétrie de la notation.

Ceci étant bien compris, il n'y a aucune difficulté à former l'équation du lieu géométrique ou de la surface déterminée par le point du plan mobile. En effet celui-ci a pour équation

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 1. \qquad (2)$$

Celles des plans menés par le point décrivant et par chacun des axes sont

$$\frac{px}{qy} = \frac{\xi}{\eta}, \qquad \frac{qy}{rz} = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad \frac{rz}{px} = \frac{\zeta}{\xi}. \qquad (3)$$

Et ainsi que l'on devait s'y attendre, chacune de ces équations est une conséquence des deux autres. En les combinant avec l'équation (2), il vient

$$\xi = \frac{p}{s}x, \quad \eta = \frac{q}{s}y, \quad \zeta = \frac{r}{s}z, \qquad (4)$$

expressions dans lesquelles on a fait, pour abréger

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}. \qquad (5)$$

Leur forme linéaire en fonction des coordonnées x, y, z du point décrivant fait voir que leur substitution dans la relation donnée (1) entre les longueurs ξ, η, ζ conduit à une équation de même degré. Ainsi est démontré que le point déterminé ci-dessus a pour lieu géométrique une surface de l'ordre de celle qui résulterait de la construction de l'équation (1) entre les variables ξ, η, ζ regardées comme les coordonnées d'un point. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2; \qquad (6)$$

il vient immédiatement

$$p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2=s^2\rho^2, \qquad (7)$$

équation d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, qui devient identique avec l'équation aux diamètres conjugués

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (8)$$

si l'on pose

$$a=\frac{s}{p}\rho, \quad b=\frac{s}{q}\rho, \quad c=\frac{s}{r}\rho. \qquad (9)$$

En choisissant convenablement les signes des divers carrés qui entrent dans l'équation (6) la transformée (7) représentera à volonté l'une quelconque des surfaces du second ordre ayant un centre. Celles qui, au contraire, en sont dépourvues, seront représentées par les transformées d'une équation différente de l'équation (6). Dans tous les cas, la surface aux coordonnées x, y, z, sera visiblement de même espèce que celle aux coordonnées primitives ξ, η, ζ. Les relations de l'une avec l'autre pourraient être déduites du théorème qu'on vient de démontrer, mais ce n'est pas ici le lieu de s'étendre sur de tels développements.

Nous terminerons cette note par l'explication d'un fait qui pourrait être regardé comme contraire à l'analogie que nous avons annoncé exister entre le mode de description des surfaces du second ordre, et celui de l'ellipse. On démontre aisément, dans le cas d'axes rectangulaires, et lorsque la somme $\xi^2+\eta^2$ est constante, que le point dont les coordonnées sont ξ, η, est sur la normale à l'ellipse menée par le point décrivant. La même chose a lieu, l'angle des axes étant quelconque, mais la droite mobile de longueur constante : en ce sens seulement que ce sont les perpendiculaires aux axes menées aux distances ξ, η de l'origine, qui se rencontrent sur la normale. Or l'ellipsoïde ne possède point cette propriété, si ce n'est dans un cas très-particulier, où l'on a $p=q=r$.

Cette circonstance tient uniquement à ce que, dans les cas particuliers qui viennent d'être cités, l'éllipse coïncide, par son mode même de description, avec l'épicycloïde dite *rallongée* ou *raccourcie* que décrit le point du plan d'un cercle roulant intérieurement sur une circonférence d'un diamètre double, concentrique à l'ellipse. Un peu d'attention suffira pour se rendre compte de l'identité des deux courbes. Or, dès que la droite mobile cesse d'avoir une longueur constante, rien de semblable n'existe. Le fait purement accidentel, relatif à la normale, appartient donc réellement aux propriétés de la famille des épicycloïdes bien plus qu'aux sections coniques en général, et ne peut être allégué contre l'analogie visible de la description des surfaces par le point d'un plan mobile, avec celle des courbes par le point d'une droite.

NOTE

SUR

LE FOLIUM DE DESCARTES.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur des colléges royaux.

—

1. La courbe (*fig.* 36) dont l'équation, rapportée à des axes rectangulaires, est

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0, \qquad (1)$$

est connue sous le nom de folium de Descartes. Comme on ne sait point résoudre cette équation, celle-ci ne peut faire connaître directement ni la nature ni la forme de la courbe.

Pour la transformer en une autre plus aisée à discuter, nous remarquerons qu'elle reste la même quand on y change x en y, et réciproquement. La courbe qu'elle représente est donc symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle formé par les axes des coordonnées. Il est donc facile de prévoir qu'en prenant cette droite et celle qui lui est perpendiculaire à l'origine pour nouveaux axes, la discussion sera simplifiée.

Les formules pour passer aux axes nouveaux sont

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' - y'),$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' + y').$$

D'ailleurs, en nommant a' la portion de la bissectrice dont la projection sur l'axe des x est a, l'on a

$$a = \frac{a'}{\sqrt{2}}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1); remplaçons, pour plus de simplicité, $\frac{3a'}{2}$ par a', et supprimons les accents, l'équation réduite sera

$$y^2(a+3x)+x^2(x-a)=0.$$

Elle donne

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}}. \tag{3}$$

L'équation mise sous cette forme, on voit de suite (*fig.* 37) que la courbe limitée à droite à l'abscisse $AB=a$, l'est à gauche, à la distance $AD=\frac{1}{3}a$, par l'asymptote VV', dont l'équation est

$$a+3x=0.$$

L'équation suivante

$$m=\frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}},$$

déduite de l'équation (3) donnant pour m, à la limite $x=0$:

$$m=\pm 1,$$

fait voir que les bissectrices GL, G'L' touchent les deux branches BMAU, BM'AU' à l'origine.

2. Comparons cette courbe à celle dont l'équation est

$$y=x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \tag{4}$$

Cette seconde courbe, de même forme que la précédente, mais dont l'asymptote VV' (*fig.* 38) est éloignée de l'axe HV d'une distance $HD=AD$, est d'une construction géométrique facile. En effet, si l'on mène par B la droite arbitraire BC, l'on aura toujours, pour tous les points de la courbe, $CA=CM$. Elle est aussi le lieu des sommets des hyperboles qui, ayant le foyer commun B, ont l'axe AY pour asymptote commune. C'est ce que l'on vérifierait en cherchant directement le lieu des points qui satisfont à l'une ou à l'autre condition. Il serait curieux de chercher si la première courbe jouit de quelques propriétés analogues.

La comparaison des formules (3) et (4) fait voir qu'entre les points A et B, la première courbe est plus près de l'axe des x que la seconde, et qu'entre A et D, elle s'en éloigne au contraire davantage ; de sorte que si les deux courbes étaient construites sur la même droite AB, la première serait complétement enveloppée par la seconde.

3. Un point essentiel à déterminer, si l'on construit les deux courbes, est celui M, où, sur la partie fermée, située à droite de l'axe des y, l'ordonnée est un maximum. Nous croyons que les élèves n'attachent pas en général assez d'importance aux constructions géométriques. Ce n'est que par elles néanmoins que dans beaucoup de cas on peut se faire une idée bien nette de la forme et de l'étendue de la courbe que l'on discute. Nous les considérons d'ailleurs comme un exercice extrêmement utile pour les élèves, et très-propre à exercer leur sagacité. Elles nous semblent donc préférables sous ce rapport aux résultats déduits du calcul, et c'est par ce motif que nous allons, pour chacune des deux courbes considérées, indiquer la construction précise du point que nous venons de désigner.

La dérivée de l'équation

$$y^2(x+a)+x^2(x-a)=0$$

de la seconde courbe, prise par rapport à x et égalée à zéro, donnera les points de la courbe où la tangente est parallèle aux x, et dont l'ordonnée sera dans le cas actuel un maximum.

Or cette équation réduite est

$$x^2+ax-a^2=0.$$

En la résolvant, on a

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2}.$$

Pour construire à la fois l'abscisse et l'ordonnée du point, faisons $AK = \frac{1}{2} AB$; prenons $AH = AB$; décrivons du centre K la circonférence KH, coupant l'axe des x en P et P'. Le point cherché M sera sur la perpendiculaire élevée en P sur AX, et sur la droite BN menée de B à l'extrémité N de la corde $AN = AP$. Quant au point P', on voit qu'il est hors des limites de la courbe, ou que l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP' est imaginaire.

4. Si l'on fait le calcul analogue pour l'équation

$$y^2 (a + 3x) + x^2 (x - a) = 0$$

de la première courbe, l'on trouvera, pour la condition cherchée,

$$3x^2 - a^2 = 0 \; ;$$

d'où

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}} .$$

Construction. Sur HB (*fig*. 37), comme diamètre, décrivez une circonférence ; faites $AE = HD = \frac{1}{3} AB$; élevez la perpendiculaire EH sur AB. Alors la corde $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Or cette corde est plus grande que AE et aussi que $AO = HO$. Donc la circonférence AH coupera le prolongement de HO en P et celui de AO en P'. Le point P' est hors des limites de la courbe. Le point P est le seul auquel correspondent les points cherchés.

Construisons l'ordonnée du même point. L'équation (3) donne

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a - x}{a + 3x} .$$

Faisons $AQ = 3AP$; sur BQ, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence rencontrée par la perpendiculaire au point P sur HX en Z, et après avoir pris QP″= HP, la parallèle P″M″ à BZ sera l'ordonnée cherchée. La même construction s'appliquant à une abscisse quelconque, on pourra donc déterminer autant de points de la courbe que l'on voudra.

La transformation dont nous avons fait usage pour discuter la courbe de Descartes doit être remarquée à cause de sa grande utilité pratique. Elle nous semble préférable, lorsqu'elle rend possible la résolution directe de l'équation primitive, à la méthode des coordonnées polaires, plus facile en apparence, mais qui, en général, dans les courbes de forme compliquée, est peu propre à indiquer d'une manière précise leur limite exacte, le sens de leur courbure et la position des asymptotes, lorsqu'il en existe.

Dans le folium de Descartes, par exemple, si on passe de l'équation primitive

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

à l'équation aux coordonnées polaires, au moyen des formules connues

$$y = \rho \sin\omega, \qquad x = \rho\cos\omega,$$

l'on trouve

$$\rho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega}.$$

Or, en posant

$$\sin^3\omega + \cos^3\omega = 0,$$

on en tire

$$\sin\omega = -\cos\omega.$$

Par suite,

$$\rho = -\frac{3a\sin^2\omega}{0} = \mp\infty;$$

d'où l'on doit conclure seulement que la courbe considérée peut avoir une asymptote parallèle à la bissectrice ZAZ' (*fig.* 36) de l'angle YAX'. Mais ce résultat ne fait connaître ni l'existence réelle de cette asymptote, ni sa distance à la bissectrice.

Je dis son existence réelle : en effet, il pourrait se faire, dans de certains cas, que, malgré une indication de ce genre, il n'y en eût aucune.

Car soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - x^2 - y^2 = 0,$$

discutée dans les *Annales*, t. II, p. 232 ; son équation polaire est

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$

et cependant la courbe n'a pas d'asymptote, ou celle-ci est à une distance infinie de l'axe des y, ce qui, au fond, est la même chose.

6. L'auteur, d'ailleurs plein de mérite, de l'article inséré dans le même tome des *Annales*, p. 314, a été induit en erreur par une discussion de ce genre. C'est ce que je vais montrer par la discussion directe de l'équation à laquelle il est parvenu.

Cette équation est

$$y^3 - x^3 - y^2x + yx^2 + y^2 + x^2 - xy = 0. \qquad (1)$$

Elle donne la solution d'un problème très-intéressant proposé par M. Breton de Champ. Elle est, dans une suite de parallélogrammes ACBM, A'C'B'M .... etc. (*fig.* 39), qui ont un angle commun M, et dont les côtés adjacents varient en conservant une différence constante, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des sommets C, C' .... etc., sur les diagonales opposées et correspondantes.

L'auteur a été amené par son calcul à prendre pour origine le point O de la bissectrice de l'angle AMG, où vont concourir, par une propriété fort remarquable, toutes les perpendiculaires considérées et, pour axes des coordonnées, les droites OX, OY, parallèles aux côtés de cet angle.

L'équation (1), étant du troisième degré par rapport aux deux variables, ne peut être résolue directement. L'auteur de l'article la discute par les coordonnées polaires. Mais la composition de cette équation, comme la nature même de la question, indique suffisamment que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle YOX Il est donc naturel alors de prendre cette droite OX' et sa perpendiculaire OY' pour axes coordonnés ; et c'est à ces axes nouveaux que nous allons la rapporter.

Les formules d'où dépend cette transformation sont

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y' + x'),$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y' - x').$$

L'équation transformée est, par suite,

$$y^2(2\sqrt{2}\,x - 1) + 2\sqrt{2}\,x^3 - 3x^2 = 0. \qquad (2)$$

Elle donne

$$y = \pm\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{2}\,x - 1}}, \qquad (3)$$

et devient, sous cette forme, facile à discuter.

Les valeurs de x qui satisfont aux équations particulières

$$2\sqrt{2}\,x - 1 = 0,$$
$$3 - 2\sqrt{2}\,x = 0,$$

étant $x' = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ pour la première, et $x'' = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ pour la seconde, il suit de l'équation (3) que les abscisses auxquelles correspondent des ordonnées réelles seront toutes comprises entre les valeurs x' et x''.

Pour interpréter ces résultats, il faut se rappeler que l'équation (1) a été obtenue en prenant le côté du carré MPOQ pour unité. Alors si on considère le carré inscrit $mpq'p'$, formé en joignant les points milieux des côtés du premier, l'on aura $OR = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $OS = \frac{3}{4}\sqrt{2}$. La courbe sera donc entièrement renfermée entre les parallèles $p'q'$, pq à l'axe OY'; et si l'on fait croître x depuis x' jusqu'à x'', l'ordonnée positive correspondante décroîtra d'une manière continue depuis l'infini jusqu'à zéro.

La première de ces parallèles, et non point l'axe OY', sera donc une asymptote de la courbe, et la seconde une tangente.

Ces conséquences se trouvent vérifiées par la valeur du coefficient angulaire de la tangente, qui est

$$\tan\varphi = \mp \frac{8x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 3}{(2\sqrt{2}\,x - 1)\sqrt{(2\sqrt{2}\,x - 1)(3 - 2\sqrt{2}\,x)}}. \quad (4)$$

Le numérateur a ses racines imaginaires et ne peut en conséquence devenir *ni nul, ni négatif*. Donc, en adoptant le signe supérieur qui convient à la partie SPU de la courbe, ce coefficient est constamment négatif, ou l'angle que fait la tangente avec OSX' est toujours obtus.

Pour $x = x' = x''$ la valeur de $\tan\varphi$ devient infinie. Ce qui prouve de nouveau que $p'q'$ est une asymptote, et sa parallèle pq une tangente au sommet. De S à U la courbe change donc le sens de sa courbure. Ainsi il y a un point d'inflexion entre ces deux points. Pour le trouver, cherchons la condition qui rend $\tan\varphi$ un maximum ou un minimum. Elle sera exprimée par l'équation

$$-12x + 6\sqrt{2} = 0,$$

qui donne

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

d'où il faut conclure que P et Q sont les deux points d'inflexion cherchés.

Cette hypothèse, introduite dans (4), donne

$$\text{tang}\,\varphi = \pm 1\,;$$

d'où il suit que les côtés MA et MB ou MG de l'angle invariable des parallélogrammes sont tangents à la courbe.

L'enveloppe des diagonales successives BA, B'A' .... etc., est, comme l'indique l'auteur, une parabole. Son équation, rapportée aux droites MB, MA, prises pour axes des x et des y, est

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2(x - y) + 1 = 0. \qquad (5)$$

Si on y fait successivement $x = 0$, $y = 0$, l'on trouve

$$(y - 1)^2 = 0, \qquad (x + 1)^2 = 0\,;$$

ce qui montre que les droites MP, MQ sont des tangentes; et comme elles sont rectangulaires, il s'ensuit que la droite DD', parallèle à PQ, est la directrice de cette parabole; qu'en conséquence le point I en est le foyer, et S le sommet. Les trois points P, S, Q sont donc des points communs aux deux courbes, où elles ont une tangente commune et où par conséquent elles se touchent elles-mêmes. Elles diffèrent dans tous les autres points.

Note. 1. Le folium de Descartes est une courbe du troisième degré de première espèce, ayant une asymptote rectiligne du genre hyperbolique ordinaire (*Introd. in Analys.*, lib. II, cap. IX). On trouve de suite cette asymptote, en appliquant à l'équation (1) la méthode d'Euler exposée par M. le professeur Vannson (t. II, p. 398); le marquis de L'Hospital construit la partie infinie de cette courbe avec son asymptote (*Analyse des inf. petits*, sect. I, p. 15, et sect. X, p. 166, deuxième édition, 1715).

Bernoulli (Jean) procède ainsi pour carrer la courbe (*Opera omnia*, t. III, p. 405). Dans l'équation (3) faisons $a-x=z^2$; on en tire

$$ydx=\frac{2z^2(z^2-a)\,dz}{\sqrt{4a-3z^2}}=\frac{2z^6(z^2-a)\,dz}{\sqrt{4az^6-3z^8}};$$

ce qui donne immédiatement

$$\int ydx=C-\frac{1}{6}z^3(4a-3z^2)^{\frac{1}{2}}=C-\frac{1}{6}(a-x)^{\frac{3}{2}}(a-3x)^{\frac{1}{2}};$$

l'intégrale est nulle pour $x=0$; donc $C=\frac{1}{6}a^2$; ainsi l'aire est exprimée par $\frac{1}{6}\left[a^2-(a-x)^{\frac{3}{2}}(4+3x)^{\frac{1}{2}}\right]$; faisant $x=a$, on trouve, pour l'aire du demi-folium, $\frac{1}{6}a^2$; faisant ensuite $x=-\frac{1}{3}a$; la demi-aire asymptotique est équivalente à $\frac{1}{6}a^2$; l'ordonnée maxima est $y=a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc le carré de cette ordonnée est équivalent à l'aire totale du folium ou bien à l'aire totale asymptotique.

On a encore ici l'exemple d'une aire fermée carrable; mais elle est dans l'exception indiquée par Newton. (*Voir* t. II, p. 351.)

Tous les foliums construits dans le même angle des axes sont semblables. Il reste à trouver dans quel cas une équation générale du troisième degré représente un folium. (*Voir* Mémoire de Nicole, Acad. des Sciences, 1729.)

2. La partie fermée de la courbe, ressemblant à une foliole, a donné son nom à la courbe. J'ignore pourquoi cette courbe est attribuée à Descartes : il n'en est point question dans sa géométrie. Elle est probablement dans les lettres; ce que je n'ose pourtant garantir, car je n'ai à ma disposition que l'édition de M. Cousin, qui n'a point de table de matières,

lacune déplorable. Il est vrai que dans le troisième livre de la Géométrie, Descartes construit une courbe du troisième degré, dont l'équation a quelque analogie avec celle du folium. Voici la génération de cette courbe : une parabole donnée se meut parallèlement à son axe ; d'un point donné sur cet axe, on dirige des rayons vers un point fixe situé dans le plan de la parabole ; le lieu d'intersection de ce rayon avec la parabole est une ligne du troisième degré, dont Descartes fait usage pour construire les racines de l'équation du sixième degré, en combinant cette courbe avec un cercle.

3. Les équations polaires peuvent servir à déterminer les asymptotes avec autant de certitude et, en certains cas, avec plus de facilité que les équations à coordonnées ordinaires. Dans les uns et les autres, il faut toujours *deux* conditions : la direction de l'asymptote, et sa distance à un point connu, et il est naturel de choisir le pôle. L'expression de cette distance est dans les ouvrages élémentaires, et peut se conclure, sans difficulté, de la formule de M. Rispal (t. II, p. 511). Mais une ligne peut avoir des points isolés multiples situés à l'infini ; la droite qui passe par ce point a alors une direction déterminée et devient une asymptote, quoique la courbe n'ait que des branches finies ; ce qui explique le fait, en apparence paradoxal, signalé par M. le professeur Vannson (t. II, p. 402). Nous reviendrons sur ce point d'analyse appliquée, et sur une propriété générale des surfaces et des courbes algébriques, peut-être non encore remarquée. Tm.

DÉMONSTRATION DE THÉORÈMES

sur les courbes du second degré,

PAR M. ROGUET,
professeur de mathématiques.

Hexagone de Pascal. *Lorsqu'on prolonge deux à deux les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une courbe du second degré, les trois points de concours sont en ligne droite.*

Soit $y-ax-b=0$ et $y-a'x-b'=0$ les équations des droites AB,DC (*fig.* 40), si l'on multiplie par ordre ces deux équations, on aura une équation du second degré

$$(1)\quad y^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

qui sera l'équation des deux droites AB et CD.

On aura une équation de la même forme

$$(2)\quad y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0$$

pour les droites AF,DE.

Soit (3) $y^2+B''xy+C''x^2+D''y+E''x+F''=0$ l'équation de la courbe

L'axe des y passant par les points A et D, on a

$$D=D'=D'' \text{ et } F=F'=F'';$$

en effet, si l'on suppose $x=0$ dans chacune des trois équations, on obtiendra trois équations en y

$$y^2+Dy+F=0,$$
$$y^2+D'y+F'=0,$$
$$y^2+D''y+F''=0,$$

qui auront toutes trois pour racines OD et OA.

Si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (3) et (1), on aura une équation qui sera satisfaite par les valeurs des coordonnées des points A, D, C et B, et qui sera

$$x[(B-B'')y+(C-C'')x+E-E'']=0;$$

elle se décompose en

$$x=0 \text{ et } (B-B'')y+(C-C'')x+E-E''=0. \qquad (4)$$

Cette dernière est l'équation de la droite CB, puisqu'elle est du premier degré et doit être satisfaite par les coordonnées des points C et B.

Soustrayant de même l'équation (3) de (2), on aura

$$x[(B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E'']=0,$$

qui se décompose en

$$x=0 \text{ et } (B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E''=0. \qquad (5)$$

Cette dernière est l'équation de FE.

Les valeurs des coordonnées du point de concours des droites CB et FE doivent donc satisfaire à l'équation :

$$(B-B')y+(C-C')x+E-E'=0, \qquad (6)$$

qu'on obtient en retranchant l'une de l'autre les équations (5) et (4). Mais si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (1) et (2), on obtient pour équation :

$$x[(B-B')y+(C-C')x+E-E']=0,$$

qui se décompose en $x=0$, et

$$(B-B')y+(C-C')x+E-E'=0.$$

Cette dernière doit être satisfaite par les valeurs des coordonnées du point de rencontre des droites AB et ED, et aussi par les valeurs des coordonnées du point de rencontre des droites AF et CD. Elle est donc l'équation de la droite qui joint ces deux points de rencontre. Or elle n'est autre que l'équation (6).

Par conséquent, les trois points de concours sont en ligne droite.

Hexagone de Brianchon. *Les trois diagonales qui joignent les sommets des angles opposés d'un hexagone circonscrit à une courbe du second degré, se coupent au même point.*

Si du point A (*fig.* 41) on mène une sécante à la courbe, et que par les points de rencontre on mène des tangentes à la courbe, ces tangentes se couperont en un point de la corde des contacts des côtés AB, AF. Il en sera de même pour le point D. Par conséquent, si par les points de rencontre de AD avec la courbe on mène deux tangentes à la courbe, ces tangentes se couperont en un point situé à la fois sur la corde des contacts des tangentes AB, AF, et sur la corde des contacts des tangentes DC, DE; ce point sera donc le point de concours de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit à la courbe et formé en joignant, deux à deux, chaque point de contact au suivant. La diagonale BE sera pareillement dirigée suivant la corde des contacts de deux tangentes menées à la courbe par le point de concours de deux autres côtés opposés de l'hexagone inscrit. Enfin la diagonale CF sera dirigée suivant la corde des contacts de deux tangentes menées du point de concours des côtés formant le troisième couple de côtés opposés de l'hexagone inscrit. Les trois diagonales se confondent donc avec les cordes de contact des trois couples de tangentes menées de trois points situés en ligne droite. Or, on sait que si de différents points d'une droite on mène des tangentes à une courbe du second degré, les cordes de contact passent toutes par un même point; par conséquent, les diagonales de l'hexagone circonscrit doivent se couper au même point.

QUESTIONS D'EXAMEN,

RÉSOLUES

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'Ecole normale, professeur de mathématiques.

—

PREMIÈRE QUESTION.

De combien de manières le premier membre d'une équation du degré $2m$ peut-il se décomposer en facteurs du second degré?

Désignons, pour abréger, par a, b, c.... h, k, l, les $2m$ facteurs binômes. $x-\alpha$, $x-\beta$, etc., correspondant aux diverses racines, réelles ou imaginaires, de l'équation.

Précisons la question : Combien peut-on écrire de listes de facteurs du deuxième degré, telles que le produit des fac teurs de chaque liste soit égal au premier membre de l'équation proposée? Deux listes différant au moins par un facteur.

Pour former ces listes, on peut procéder comme suit :

Je prends le facteur a, que je multiplie par b. Réservant d'abord le produit ab, je suppose qu'on ait résolu le problème proposé pour le produit des $2m-2$ facteurs restants, et obtenu toutes les décompositions différentes qu'il demande; soit P''_{2m-2} le nombre de ces décompositions. A chacune des listes obtenues, je joins le produit réservé ab, et j'ai une première série de P''_{2m-2} décompositions différentes du produit des $2m$ facteurs proposés.

Je joins ensuite au facteur a un facteur c autre que b; je réserve ce produit; je forme toutes les listes différentes de facteurs du deuxième degré des $2m-2$ facteurs restants;

j'en ai encore P''_{2m-2}; à chacune je joins ac, et j'ai une nouvelle série de listes de produits de $2m$ facteurs, lesquelles sont différentes des premières. Je joindrai ainsi successivement le facteur a à chacun des $2m - 1$ facteurs restants, et chaque fois j'aurai P''_{2m-2} listes. Cela fait, je les aurai évidemment toutes; car dans l'une quelconque des listes demandées, a doit être joint à l'un des $2m - 1$ autres facteurs, et se trouver absent des autres produits du deuxième degré. De là résulte évidemment la formule

$$P''_{2m} = P''_{2m-2} \times (2m - 1).$$

En changeant successivement

$$m \text{ en } m - 1,\ m - 2, \ldots\ldots m - (m - 1),$$

et multipliant les égalités résultantes, on obtient la formule :

$$P''_{2m} = 1.3.5.7\ldots.\ (2m - 1)$$

Corollaire. Étant donné un polynôme entier de degré impair $(2m+1)$, de combien de manières peut-on le décomposer en un produit de facteurs du deuxième degré, multiplié par un facteur du premier ? Soient a, b, c .... h, k, l, n, les facteurs du premier degré. On laissera d'abord n de côté; on formera toutes les listes de facteurs du deuxième degré relatives aux $2m$ facteurs restants, lesquelles seront au nombre de $P''_{2m} = 1.3.5.7\ldots\ (2m - 1)$.

En joignant à chaque décomposition le facteur réservé n, on aura une série de décompositions relatives à la question actuelle. En isolant d'abord successivement chacun des $2m + 1$ facteurs, on aura autant de séries différentes. Le nombre des listes est donc $1.3.5.7\ldots.\ (2m - 1)\ (2m + 1)$.

Deuxième question.

De combien de manières peut-on décomposer un produit de $3\,m$ facteurs $a, b, c, \ldots.\ e, h, k$ en facteurs ou diviseurs du troisième degré? Cette question est analogue à la précédente.

Je mets à part le facteur a, et je forme toutes les combinaisons des $3m-1$ facteurs restants pris 2 à 2; il y en a $\frac{(3m-1)(3m-2)}{1.2}$.

Je multiplie a par l'un de ces produits de deux facteurs, bc par exemple; réservant le produit abc ainsi obtenu, je forme toutes les décompositions indiquées par la question appliquée au produit des $3m-3$ facteurs, autres que a, b, c; soit P'''_{3m-3} le nombre des listes obtenues. A chacune d'elles j'ajoute le produit abc, et j'ai ainsi une liste de diviseurs du troisième degré dont le produit est celui des $3m$ facteurs donnés. Ayant fait cela pour les P'''_{3m-3} listes, j'ai un nombre égal de décompositions du produit donné.

Je multiplie a par une autre combinaison des facteurs restants, bd par exemple; j'opère comme précédemment sur les $3m-3$ facteurs restants; puis joignant à chaque décomposition du produit de ces $3m-3$ facteurs le produit abd, j'obtiens une série de P'''_{3m-3} décompositions relatives au produit proposé de $3m$ facteurs; ces dernières listes sont différentes des premières, puisque dans le diviseur qui contient a dans chacune, ce facteur est constamment joint à bc dans les premières et à bd dans les dernières. Quand on aura fait usage, de la même manière, de toutes les combinaisons de deux facteurs autres que a, on aura toutes les décompositions possibles. Dans chaque liste en effet, a doit accompagner une combinaison de deux des facteurs restants, et être absent des autres produits. On a évidemment

$$P'''_{3m} = P'''_{3m-3}\frac{(3m-1)(3m-2)}{1.2}.$$

Remplaçant successivement m par $m-1, m-2, \ldots m-(m-1)$ et multipliant toutes les égalités obtenues membres à membres on trouve

$$P'''_{3m} = \frac{1}{1.2}\Big(1.2.4.5.7.8\ldots\ldots(3m-2)(3m-1)\Big).$$

On obtiendrait exactement de la même manière, le nombre des décompositions d'un produit de facteurs du premier degré, en diviseurs d'un degré quelconque, si l'on suppose le degré du produit multiple de celui d'un diviseur.

Exemple : calculer P^p_{pm}

Soit C_{p-1} le nombre des combinaisons des $pm-1$ facteurs autre que a, pris $p-1$ à $p-1$. On aura la formule $P^p_{pm} = P^p_{pm-p}\, C_{p-1}$. D'où l'on déduira la valeur de P^p_{pm} par la méthode indiquée.

Troisième question.

Si on demande le nombre de décompositions en diviseurs du degré p accompagnés d'un seul diviseur du degré q, pour un produit de $pm+q$ facteurs du premier degré $(q<p)$; il suffira évidemment de trouver le nombre de décompositions en facteurs du degré p pour un produit de pm facteurs et de multiplier le nombre P^p_{pm} obtenu par celui des combinaisons q à q de tous les facteurs du produit proposé de $pm+q$ facteurs.

En effet chacune des listes demandées s'obtient en mettant à part q des facteurs proposés, et y joignant ensuite chacune des décompositions, en facteurs du degré p, du produit des pm facteurs restants.

Pendant que je m'occupe de combinaisons, je crois utile de mettre ici une solution plus simple du problème des mots (tome I[er], page 14).

Quatrième question.

Je reproduis l'énoncé. Déterminer le nombre des mots que l'on peut former avec 19 consonnes et 5 voyelles, chaque mot étant composé de 3 consonnes et de 2 voyelles, en excluant tous les mots renfermant trois consonnes de suite.

Je vais d'abord former sans exclusion, tous les mots de 3 consonnes et 2 voyelles.

Pour que deux mots soient identiques, il faut, 1° que toutes les lettres soient les mêmes dans les deux; 2° qu'abstraction faite des consonnes, les voyelles y occupent la même position relative, c'est-à-dire, offrent le même arrangement; 3° que les voyelles effacées, il en soit ainsi des consonnes; 4° que ces trois conditions remplies, la même lettre ait la même place dans les deux mots (*).

Cela posé je forme les arrangements complets des 19 consonnes 3 à 3; il y en a 19^3; *id.* des 5 voyelles 2 à 2; il y en a 5^2. Je prends l'un des premiers bcd; l'un des seconds ae, et je forme tous les mots dans lesquels les 3 consonnes b, c, d offrent, abstraction faite des voyelles, l'arrangement bcd, et les voyelles semblablement, l'arrangement précité. Pour le faire avec ordre et sûrement, je forme les combinaisons des 5 numéros de places 1,2,3,4,5 pris 2 à 2; j'écris les numéros de chaque combinaison dans l'ordre de leurs grandeurs; à côté de chacune j'écris la combinaison des 3 numéros restants, aussi par ordre de grandeurs. On obtient le tableau ci-contre:

1.2	3.4.5
1.3	2.4.5
1.4	2.3.5
1.5	2.3.4
2.3	1.4.5
2.4	1.3.5
2.5	1.3.4
3.4	1.2.5
3.5	1.2.4
4.5	1.2.3

Chaque combinaison de 2 numéros, et sa correspondante de 3 me servent à former un mot avec les consonnes et les voyelles choisies. Le 1er chiffre de la combinaison de 2 numéros indique la place de a, le 2e celle de e. Le 1er chiffre de la correspondante de 3 indique la place de b, le 2e celle de c, le 3e celle de d dans l'ordre de l'arrangement.

(*) Cette condition est suffisante à elle seule, et comprend implicitement les trois autres; on verra pourquoi j'ai cependant énoncé celles-ci.

Exemples : les 6^{mes} combinaisons donnent le mot *baced.*

Nous avons ainsi $\frac{5 \times 4}{2}$ ou 10 mots, pour lesquels les 3 premières conditions sont remplies, mais la quatrième ne l'est pas. Ces mots sont donc différents, et ce sont les seuls qui puissent satisfaire à ces 3 premières conditions lorsqu'on fait usage des arrangements adoptés. Avec le même arrangement *ae* j'emploie un autre arrangement quelconque de consonnes. En opérant de même j'aurai 10 mots différents entre eux à cause de (4°) non remplie ; et différents des précédentes d'après la condition 3° non remplie, si les consonnes sont les mêmes que dans l'arrangement *bcd*, ou d'après 1° *id.*, s'il n'en est pas ainsi.

Employant ainsi, avec le même arrangement *ae* de voyelles, tous les arrangements complets de consonnes, j'obtiens des mots différents au nombre de $\frac{5 \times 4}{2} \times 19^3$.

Prenant au lieu de *ae*, un autre arrangement de voyelles, et opérant comme avec *ae*, j'aurai un nombre égal de mots différant entre eux d'après ce qui vient d'être dit, et des précédents d'après 2° ou 1°.

Et ainsi de suite après avoir employé tous les arrangements complets de 2 voyelles, nous aurons des mots au nombre de $\frac{5 \times 4}{2} \times 19^3 \times 5^2$.

Évidemment nous avons tous les mots possibles de 3 consonnes et de 2 voyelles ; car pour chacun les consonnes effacées, les voyelles doivent offrir un certain arrangement ; de même pour les consonnes, lorsqu'on effacerait les voyelles.

Considérons à part les mots qu'il faut exclure d'après la fin de l'énoncé. On les obtiendrait isolément de la manière suivante.

On prendra l'arrangement *ac* et l'arrangement *bcd*, par exemple. On mettra le deuxième en bloc, comme une seule lettre, à toutes les places possibles relativement à celles de l'arrangement *ae*, ce qui donne les mots *aebcd*, *abcde*, *bcdae*, au nombre de 3 ; les seuls qui, pour la disposition relative *ae* des voyelles, contiennent l'arrangement des consonnes *bcd* consécutives. Tous les arrangements de consonnes étant ainsi employés avec le même arrangement *ae*, nous aurons pour chacun 3 mots, et pour tous, 3×19^3 mots, différents les uns des autres, à cause de 3° ou 1° non remplie. Si nous employons de même tous les arrangements complets de voyelles, nous aurons en tout $3 \times 19^3 \times 5^2$ mots à retrancher. De sorte que définitivement le nombre demandé est

$$\frac{5 \times 4}{2} \times 19^3 \times 5^2 - 3 \times 19^3 \times 5^2.$$

La formule donnée (t. I, p. 48) doit être rectifiée ; le premier terme doit être divisé par 2, comme le deuxième. Cela vient de ce que, dans la formation des mots contenant 3 consonnes et 2 voyelles différentes (p. 46), il y aura double emploi pour chaque mot ; on a le même mot, par exemple, lorsque dans *abcd*, on met *e* à la première place, et lorsque dans *ebcd*, on met *a* à la deuxième (*eabcd*). Il faut donc diviser par 2 le nombre des mots obtenus dans les conditions de ce paragraphe. La formule ainsi modifiée devient

$$19^3 \times 5 \times 4 \times \frac{5 \times 4}{2} + 19^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5 - 19^3 \times 5^2 \times 3 =$$

$$= 19^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5\,(4 + 1) - 19^3.5^2.3 =$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times 19^3 \times 5^2 - 19^3.5^2.3.$$

C'est la considération de la formule ainsi modifiée qui m'a fait penser à la solution que je propose aujourd'hui.

CINQUIÈME QUESTION.

Trouver, par des considérations *à priori*, combien il y a de nombres différents dans la table de Pythagore.

Il suffit évidemment de se rendre compte des causes de répétition, pour distinguer les nombres sur lesquels elles influent.

D'après le principe relatif à l'interversion de deux facteurs, $3 \times 7 = 7 \times 3 = 21$, si l'on a égard à la disposition de la table, on verra que 21 sera le septième de la troisième colonne horizontale et le troisième de la septième colonne *id.* Ce nombre est ainsi répété deux fois. Il en est ainsi pour tous les deux produits de deux facteurs inégaux, c'est-à-dire pour tous ceux de la table, excepté les carrés. Cette remarque s'applique donc à 72 produits, parmi lesquels on ne trouvera au plus que 36 nombres différents : joignons-y les 9 carrés, cela en fera 45. On peut les mettre à part dans la table, en tirant une ligne diagonale le long des carrés, sur leur droite, par exemple. Tous les nombres à gauche sont les 45 produits indiqués.

Si un produit est double dans cette partie de la table, ce n'est plus à cause de l'interversion des facteurs : nous n'y aurons plus égard.

Tous les nombres moindres que 10, qui ne sont pas premiers, donnent lieu à répétition.

Ainsi $4 = 1.2^2$ donne les produits 1.4 et 4×1 en isolant 1; si 1 n'est pas isolé, on ne doit plus y avoir égard, et $4 = 2^2 = 2 \times 2$; ce qui répète ce produit ailleurs que dans les premières colonnes, horizontales ou verticales. Il en est de même évidemment de 6, 8, 9; (4 nombres à déduire).

Si, en dehors des causes précédentes, deux produits sont égaux, c'est qu'ils sont composés des mêmes facteurs premiers, et que ces facteurs premiers peuvent se partager au moins de deux manières, en deux groupes de facteurs, tels que le produit des facteurs de chaque groupe soit moindre que 10.

Les facteurs premiers qui entrent dans nos produits sont 2, 3, 5, 7. Or un produit dans lequel entre 5 ou 7 ne peut se répéter dans nos 45 nombres. En effet, en groupant les facteurs, on est obligé de laisser 5 ou 7 tout seul; car si on lui adjoignait un autre facteur, au moins 2, le groupe donnerait au moins 10 : il n'y a donc qu'une manière de partager un tel produit en deux facteurs.

Il n'y a donc qu'à s'occuper des nombres qui comprennent pour facteurs premiers, soit 2 seul, soit 3 *id.*, soit 3 et 2, en ne dépassant pas 81. 2^2, 2^3 ont été considérés dans la remarque précédente; de même, 2×3, 3^2. Nous n'avons qu'à considérer :

1° $\begin{cases} 2^4,\ 2^5,\ 2^6. \qquad 2^4 = 2 \times 2^3 = 2^2 \times 2^2. \qquad \text{(1 répétition.)} \\ 2^5 = 2^2 \times 2^3. \text{ Pas d'autre ; car on ne peut mettre } 2^4 \text{ pour} \end{cases}$
un des facteurs. 2^6 ne donne que $2^3 \times 2^3$ pour la même raison.

Parmi les puissances de 3, nous n'avons, en outre de 9 déjà considéré, que 3^3 et 3^4, qui ne fournissent chacun qu'un produit, 3×3^2 et $3^2 \times 3^2$.

2° $\begin{cases} 2^2.3 = 4 \times 3 = 2 \times (2 \times 3) \qquad \text{(1 répétition).} \\ 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 2^2 \times (2 \times 3) \quad \text{(1 répétition).} \\ 2^4.3 \text{ n'en donne pas ; car on ne peut mettre que 2 avec 3} \end{cases}$
dans un groupe. De même des puissances supérieures de 2 avec la première de 3.

3° $\begin{cases} 2.3^2 = 2.9 = (2 \times 3) \times 3 \qquad \text{(1 répétition).} \\ 2 \times 3^3 \text{ ne donne rien ; car on doit mettre, et on ne peut} \end{cases}$
mettre que 3 avec 2.

Enfin, $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ (1 répétition)

Aucune autre répétition n'est possible; car d'autres puissances de 2 ne peuvent se joindre à 3 dans un groupe, ni réciproquement. Nous avons donc en tout 9 répétitions parmi les 45 produits. En tout, 36 nombres différents dans la table de Pythagore.

THÉORÈME DE DESCARTES.

PAR M. FINCK,
professeur au collége de Strasbourg.

Il s'agit, comme on sait, de prouver que $(x-a)\,f(x)$ renferme au moins une variation de plus que $f(x)$.

1° La proposition est évidente si $f(x)$ n'a point de variation. Car le premier terme de $(x-a)\,f(x)$ est positif, et le dernier est négatif. Donc il y a au produit au moins une variation.

2° Je suppose notre proposition prouvée pour le cas où $f(x)$ renferme n variations, et je dis qu'elle est vraie s'il en renferme $n+1$. Car soit

$$f(x)=x^m+\ldots\pm Ax^\alpha\mp Bx^{\alpha-i}\mp\ldots\mp Lx^\lambda$$

Admettons que de x^m à x^α il y ait n variations, et que de x^α à x^λ il y en ait une seule, de sorte que $f(x)$ en contient $n+1$

On pourra supposer que i est 1, 2, 3, etc.; λ peut être nul ou non.

$(x-a)\,f(x)$ comprend deux parties ; la première

$$\varphi(x)=(x-a)\,(x^m+\ldots\pm Ax^\alpha),$$

renferme par hypothèse au moins une variation de plus que $x^m+\ldots\pm Ax^\alpha$, c'est-à-dire au moins $n+1$; la seconde $\psi(x)=(x-a)\,(\mp Bx^{\alpha-i}\ldots\mp Lx^\lambda)$ en contient au moins une d'après le premier cas. Mais le dernier de φ et le premier de ψ sont de même signe, et sont respectivement

$$\mp Aax^\alpha\quad\mp Bx^{\alpha-i+1}$$

donc $\varphi x + \psi x$, ou $(x-a)fx$ a au moins $n+1+1$ variations quand même i serait $=1$. Donc, etc.

Or, la proposition est prouvée pour $n=0$, donc elle est complétement démontrée.

Note rectificative sur la construction des tables des sinus naturels (t. I, p. 272, et t. III, p. 12).

M. Fink déclare qu'il n'a jamais argué de faux les calculs de M. Vincent; qu'il les trouve exacts; que les quantités qu'il a négligées, étaient négligeables; mais que seulement il a omis de prouver que ces quantités n'influent pas sur l'exactitude. De quoi d'ailleurs M. Vincent pouvait, peut-être, se dispenser, puisque à propos de *sinus*, il ne prétendait pas exposer une théorie complète des approximations. M. Fink ajoute que s'il a employé la méthode intégrale, c'est en vue d'abréger; et qu'il possède une méthode élémentaire très-simple qui sera insérée dans la seconde édition de la Trigonométrie, prête à paraître.

THÉORÈME SUR LE TRIANGLE INSCRIT DANS UN CERCLE.

PAR M. ARISTIDE MARE,
élève du collége Saint-Louis (institution Barbet).

Soit ABC (Fig. 42), *un triangle acutangle inscrit dans un cercle, dont le centre* O *est situé dans l'intérieur du triangle; si des trois sommets* A, B, C, *on mène les rayons* AO, BO, CO, *dont les prolongements rencontrent la circonférence aux points* A′, B′, C′, *: les six points* A, B, C, A′, B′, C′, *seront les sommets d'un hexagone inscrit, dont la surface sera double de celle du triangle* ABC.

Remarquons d'abord que le diamètre AOA′ divise l'hexagone en deux quadrilatères AB′ CA′, AC′ BA′ de même surface ; car le quadrilatère AB′ CA′ se compose des triangles AOB′, B′OC, COA′ respectivement égaux aux triangles BOA′, BOC′, C′OA qui forment le quadrilatère AC′ BA′. Tout se réduit donc à démontrer que le triangle ABC est équivalent au quadrilatère AB′ CA′. Or, les triangles AOB, AOB′ sont équivalents comme ayant des bases égales OB, OB′, et même hauteur. On a de même BOC = B′OC, et AOC = A′OC. Donc, ABC = AB′CA′.

La même démonstration s'applique à un triangle ABC, inscrit dans une ellipse dont le centre O serait intérieur au triangle ; car la démonstration est entièrement fondée sur ce que le point O est le milieu des trois droites AOA′, BOB′, COC′.

Si le centre du cercle est extérieur au triangle ABC (*fig.* 43), l'un des trois angles du triangle ABC sera obtus ; supposons que ce soit l'angle BAC, alors, le centre du cercle sera intérieur au triangle A′BC, et la surface de l'hexagone sera le double de la surface du triangle A′BC ; ou, ce qui revient au même, la surface de l'hexagone sera le double de la somme des surfaces des triangles BAC, et BCB′.

NOTE
SUR
LA THÉORIE DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

PAR M. ABEL TRANSON,
répétiteur d'analyse à l'École polytechnique.

La théorie des quantités négatives se présente dès le début de l'algèbre, et il importe qu'elle ne laisse dans l'esprit des élèves aucun nuage. Cependant les explications que l'on donne ordinairement à ce sujet ne laissent-elles rien à désirer ?

Par exemple, si on fait naître ces quantités d'une *soustraction impossible*, demeure-t-il bien clair qu'une opération qui ne peut pas avoir lieu puisse produire des quantités quelconques ?

Ensuite, les quantités négatives étant une fois admises, on ne peut pas les soumettre aux opérations fondamentales du calcul sans avoir donné à la définition de ces mêmes opérations une extension nouvelle. Mais si cette extension paraît tout à fait arbitraire, elle ne jettera aucun jour sur les règles qu'on en déduit. Il faudra donc que l'élève admette ces règles sur la foi du professeur, sauf à en constater plus tard l'utilité.

Ayant eu l'occasion, il y a déjà quelques années, de faire un cours de mathématiques élémentaires, j'ai essayé de lever ces difficultés en présentant la théorie à peu près de la façon suivante.

J'ai fait remarquer premièrement, avec tous les auteurs, que certaines grandeurs concrètes ne sont pas complétement déterminées par leurs valeurs numériques. Ces sortes de grandeurs étant susceptibles de croître dans deux sens contraires, il est indispensable de spécifier le sens dans lequel elles ont été formées et dans lequel elles doivent être comptées.

Ceci n'est pas, à proprement parler, une convenance du calculateur : c'est une nécessité qui résulte de la nature même des choses.

A la vérité, la dualité du sens ne se manifeste pas dans toute sorte de grandeurs concrètes ; mais il est naturel que la grandeur abstraite soit considérée comme absolument susceptible de ce double aspect, puisque toute relation entre les grandeurs reçoit de son passage à l'abstrait toute la généralité possible. Déjà en arithmétique, on a rencontré un résultat analogue. Assurément la subdivision de l'unité n'est pas praticable sur toutes sortes de grandeurs concrètes, et toutefois, dans le passage du concret à l'abstrait, l'unité n'est-elle pas considérée comme absolument susceptible de cette subdivision, sauf au calculateur à rejeter dans l'application un résultat fractionnaire, si les grandeurs qu'il combine entre elles n'admettent pas cette forme particulière du nombre ?

Ainsi dès le début de l'algèbre, il y aura lieu d'admettre des monômes *positifs* et des monômes *négatifs*, c'est-à-dire des quantités algébriques isolées, dans lesquelles on distinguera le sens de formation par quelque signe convenable.

Maintenant si on fait attention que le propre des grandeurs de même sens, lorsqu'elles sont réunies, est de former un total qui est aussi de même sens ; au lieu que si on réunit deux grandeurs de sens contraires, on a un tout numériquement égal à leur différence et conservant le signe de la plus grande ; on comprendra que les signes déjà adoptés pour représenter l'addition et la soustraction sont singulièrement propres à spécifier le sens de la formation des grandeurs. Car lorsqu'on voudra réunir des grandeurs de même nature, mais de sens différents, les signes + et —, dont elles auront été affectées pour marquer le sens de leur formation, indiqueront en même temps les opérations à effectuer entre elles pour obtenir le résultat de leur réunion ; et de nouveau, quand ces opérations auront été effectuées, le signe du résultat marquera, non pas une opération à faire, mais le sens dans lequel ce résultat doit être pris.

(*La suite prochainement.*)

NOTE

SUR

LES QUANTITÉS NÉGATIVES.

(Fin.—Voir p. 318.)

PAR M. ABEL TRANSON,
répétiteur à l'École polytechnique.

Les signes propres à marquer le sens des grandeurs étaient arbitraires *à priori*. Mais on voit que les signes habituels ont un avantage considérable, et que leur adoption entraîne forcément la règle qu'on pratique dans l'addition algébrique, règle qui entraîne à son tour celle de la soustraction.

Que dirons-nous maintenant de la multiplication ? Comme l'introduction d'une forme particulière du nombre, de la forme fractionnaire, nécessite que l'on modifie en arithmétique les définitions de la multiplication ; s'étonnerait-on qu'il fallût modifier encore cette même définition au moment où on introduit dans le calcul un aspect nouveau de la grandeur, un élément qui est indispensable à sa détermination complète, et que jusque-là on avait négligé ?

Nous dirons que « la multiplication a pour objet de trou-
» ver une grandeur qui soit composée en quantité *et en signe*
» avec le multiplicande, de la même façon que le multipli-
» cateur est composé avec l'unité positive. »

La règle des signes des monômes découle avec clarté de cette définition, puisque toutes les fois que le multiplicateur aura comme l'unité le signe $+$, le produit aura le même signe que le multiplicande ; au lieu que si le multiplicateur est de sens opposé à l'unité, le signe du produit aura un signe contraire à celui du multiplicande.

Il résulte aussi de cette définition que, si on change le signe de l'un de ces facteurs, le signe du produit est changé; au lieu que le produit conserve son signe, lorsqu'on change à la fois les signes des deux facteurs. Et cette remarque suffira pour qu'on puisse étendre immédiatement, à tous les cas de la multiplication des polynômes, la règle des signes qu'on aura d'abord démontrée, comme M. Finck, pour le cas seulement où ces polynômes ont une valeur numérique positive.

Les choses ainsi établies, il n'y aura, ce me semble, rien d'imprévu pour les élèves, lorsqu'ils rencontreront plus tard, dans la résolution d'une équation, une quantité négative pour valeur de l'inconnue. Ils sauront bien que la justesse d'une telle solution est subordonnée à la question de savoir si la quantité cherchée comporte dans l'ordre concret une formation en double sens. Sinon, il faudra bien, pour que la question proposée ait une signification raisonnable, en modifier l'énoncé de telle sorte que cette quantité inconnue soit comptée dans un sens opposé à celui qu'on avait pris d'abord. Mais quoi qu'il en soit, les solutions négatives leur apparaîtront de prime abord ce qu'elles sont en effet, c'est-à-dire un résultat nécessaire de la généralité absolue du calcul algébrique.

Dans son *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, M. Hoëné Wronsky a dit avec raison, ce me semble, que les caractères particuliers qu'on nomme état *positif* et état *négatif* des nombres portent sur leur QUALITÉ; tandis que les opérations d'addition et de soustraction ne portent que sur leur QUANTITÉ. « C'est, dit l'auteur, le défaut de cette distinction » très-simple qui, jusqu'à ce jour, a couvert de tant d'obscu- » rité les questions algorithmiques concernant l'état positif » ou négatif des nombres. » (*Introd.*, 1808, pag. 159.)

Note. Kant a essayé d'introduire en philosophie l'idée des grandeurs négatives (*). Dans la préface de l'opuscule consacré à cet essai, l'auteur se plaint de ce que la philosophie, au lieu de mettre à profit les doctrines mathématiques, le plus souvent se montre hostile contre elles, et cherche à les réduire en pures abstractions, n'ayant qu'une utilité spéciale. Il est facile de deviner, dit-il, de quel côté est l'avantage dans cette lutte entre deux sciences, dont l'une surpasse tout en certitude et en clarté, tandis que l'autre aspire seulement à acquérir ces qualités. Nous recommandons cette réflexion aux jeunes philosophes de l'École normale, qui doivent sans cesse se rappeler que Platon, Aristote, Spinosa, Mallebranche, Clarke, étaient très-versés dans les connaissances géométriques et physiques de leur temps; j'ai omis Descartes et Leibnitz, hommes hors rang, génies créateurs. Mais revenons à notre sujet.

Kant distingue deux sortes d'oppositions : l'une, qu'il appelle *logique*, implique une contradiction, et l'autre n'implique point de contradiction. Ainsi le *mouvement* et le *repos* forment une opposition *logique* et ne sauraient se rencontrer dans le même objet. Mais la diversité de direction donne lieu à une opposition de la seconde espèce, d'une existence possible; le même bâtiment peut être poussé par un vent qui vient de l'est et par un autre soufflant de l'ouest; un homme peut avoir simultanément un *actif* et un *passif*. Dans le premier cas, on établit deux propositions qui s'excluent : A est B, proposition affirmative; A n'est pas B, proposition qui contient une négation; les deux ne sauraient être simultanément vraies. Dans le deuxième cas, on a ces deux propositions : A est augmenté de B; A est diminué de B; les deux peuvent exister simultanément, et le résultat est que

(*) Versuch den Begriff der negativen Grœssen in die Weltweisheit einzuführen, 1763. in-12 de 72 pages.

A ne change pas. C'est ce dernier genre d'opposition qu'on rencontre en mathématiques ; mais, comme dans l'opposition logique, on a conservé en algèbre le nom de proposition *affirmative* ou positive à l'une, et le nom de proposition *négative* à l'autre. Quand l'essence des deux quantités est telle qu'elles ne peuvent exister ensemble en égale grandeur sans se détruire, si l'on appelle *positive* l'une quelconque de ces grandeurs, l'autre sera dite *négative*. Ainsi, quoique empruntées à la logique, les qualifications *positive* et *négative*, jointes au mot *quantité*, n'ont pas le sens logique, et M. Transon fait voir clairement comment les deux signes $+$ et $-$ ont un double emploi. Ils représentent des augmentations et des diminutions, et en même temps une opposition. M. Cauchy ne donne même le nom de *quantité* qu'au *nombre* précédé d'un signe ; de sorte que « le signe $+$ ou $-$ placé devant un nombre en modifie la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. » (*Cours d'analyse*, p. 2.)

Il est probable que ce sont des questions d'arithmétique qui ont donné naissance à l'algèbre ; on donnait à deviner des nombres sur lesquels on avait fait mentalement diverses opérations. Comme les nombres pensés étaient toujours positifs, on ne trouvait jamais que des solutions positives ; s'il arrivait qu'elles fussent négatives, on les déclarait *fausses ;* c'est-à-dire que l'opérateur avait fait de fausses combinaisons. De là le nom de *racines fausses ;* et quoique Descartes eût découvert le véritable emploi des *racines négatives*, il leur a pourtant conservé le nom de *racines fausses*, établi par l'usage (*voyez* t. II, p. 550). L'origine très-probable de cette dénomination est indiquée par Kæstner (*Geschichte der Mathematik*, t. I, § 48). On voit d'ailleurs que Diophante (*) dédie son ouvrage à un certain Denis (Dionysius), qui désirait beau-

(*) A vécu avant 1760.

coup connaître l'explication des questions qui concernent les nombres. « J'ai essayé, dit-il, d'établir une méthode et de chercher la nature et les propriétés des nombres, en les déduisant des premières bases fondamentales sur lesquelles s'appuie cette théorie. L'entreprise peut paraître difficile (ignorée même jusqu'ici), surtout auprès des commençants, dont l'esprit n'est pas porté à bien espérer du succès. Toutefois ton zèle et mes démonstrations feront que tu comprendras facilement. On se fait comprendre vite, quand l'enseignement s'adresse à ceux qui ont le désir de s'instruire. » Diophante connaît la règle des signes et la place, sans démonstration, parmi les premiers principes, comme chose généralement connue (IX). Il n'a pas de signe pour représenter *plus* et se sert du mot υπαρξίσ, qui veut dire *abondance;* mais pour le signe *moins,* il prend la lettre grecque ψ écourtée et renversée, de cette forme ⋔. Tm.

NOTE

SUR

LES RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS

et sur les facteurs des polynômes algébriques.

PAR M. WANTZEL,
répétiteur à l'École polytechnique.

---

1. *Toute équation algébrique à coefficients complexes entiers et dont le premier terme est x^m, ne peut avoir une racine complexe fractionnaire.* Cette proposition est énoncée dans un travail inséré à la page 41 de ce recueil; mais la démonstration donnée par l'auteur n'est pas complète. Elle suppose que $(a+b\sqrt{-1})^n$, ne peut être divisible par un nombre premier p lorsque a et b ne le sont pas tous deux;

ce qui est inexact, puisque $(1+\sqrt{-1})^2$ est divisible par 2.

La démonstration suivante n'est sujette à aucune restriction.

2. Je dis d'abord que si le nombre premier p est différent de 2, il ne peut diviser $(a+b\sqrt{-1})^n$, sans diviser $a+b\sqrt{-1}$. En effet $a+b\sqrt{-1}$, est une racine de l'équation $x^2-2ax+a^2+b^2=0$, et aussi de l'équation $x^n-2ax^{n-1}+(a^2+b^2)x^{n-2}=0$; le facteur p diviseur de x^n divise le module $(a^2+b^2)^n$, et par suite a^2+b^2; il divisera également le terme $2ax^{n-1}$, puisqu'il est diviseur des termes extrêmes de cette équation. Si p ne divisait pas $a+b\sqrt{-1}$, il ne pourrait diviser $2a$, puisqu'il est diviseur de a^2+b^2, et différent de 2, il faudrait donc qu'il divisât x^{n-1}. En remplaçant n par $n-1$, on démontrerait de même que p doit diviser x^{n-2}... et ainsi de suite jusqu'à x ou $a+b\sqrt{-1}$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc si $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{p}$ est fractionnaire, $\dfrac{(a+b\sqrt{-1})^n}{p}$ l'est pareillement, à moins que p ne soit égal à 2.

3. Lorsque $p=2$, la proposition n'est plus vraie, comme nous l'avons fait remarquer ci-dessus. Toutefois, le facteur 2 ne peut diviser $(a+b\sqrt{-1})^n$ sans diviser a^2+b^2, ou sans que les nombres a et b soient tous deux impairs. Alors a^2+b^2 est de la forme $4n+2$, c'est-à-dire une seule fois divisible par 2 : d'où il résulte que $(a+b\sqrt{-1})^{2n}$, et $(a+b\sqrt{-1})^{2n+1}$, sont tout au plus divisibles par la puissance n de 2, puisque les carrés de leurs modules $(a^2+b^2)^{2n}$ et $(a^2+b^2)^{2n+1}$, n'admettent pas le diviseur 2^{2n+2}. D'ailleurs $(a+b\sqrt{-1})^2$ ou $a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$ est divisible par 2 :

donc $(a+b\sqrt{-1})^{2n}$ et $(a+b\sqrt{-1})^{2n+1}$, sont divisibles par 2^n et ne le sont pas par une puissance supérieure. On verrait de même que généralement le produit de $2n$ ou de $2n+1$ facteurs de la forme $a+b\sqrt{-1}$, pour lesquels a et b sont impairs, ne peut admettre pour diviseur que la puissance n du facteur 2.

4. L'équation $x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0$, à coefficients complexes entiers ne peut admettre une racine fractionnaire $\frac{a+b\sqrt{-1}}{p}$. Car si l'on substitue et si l'on multiplie par p^m, il vient :

$$(a+b\sqrt{-1})^m+a_1p\,(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+\ldots+a_mp^m=0.$$

Quand p n'est pas une puissance de 2, tous les termes sont divisibles par p excepté le premier (2), et l'impossibilité est évidente : il en est de même lorsque $p=2$, ou égal à une puissance de 2, si $m=2n+1$, puisque tous les termes excepté le premier (3), sont alors divisibles par 2^{n+1}. Dans le cas où $m=2n$, le troisième terme et les suivants admettent le diviseur 2^{n+1}, tandis que la somme des deux premiers $(a+b\sqrt{-1})^{2n-1}(a+b\sqrt{-1}+pa_1)$, est un produit de $2n$ facteurs impairs qui n'est divisible que par 2^n (3).

5. La recherche des racines complexes n'est qu'un cas particulier de la décomposition d'un polynôme en facteurs rationnels. En effet, considérons d'abord une équation à coefficients réels : si $a+b\sqrt{-1}$ est une racine complexe, le premier membre est divisible par $x^2-2ax+a^2+b^2$; il suffira donc, pour avoir toutes les racines de cette espèce, de chercher les diviseurs rationnels de la forme x^2+px+q, et d'écarter ceux où $q-\frac{p^2}{4}$, ne serait pas un carré.

Le cas où l'équation proposée $M=0$, a des coefficients complexes le ramène au précédent : pour cela il suffit de changer le signe de $\sqrt{-1}$ dans tous les termes de cette équation et de multiplier l'équation $M'=0$ ainsi obtenue membre à membre par $M=0$. On aura ainsi une équation à coefficients réels dont les racines complexes de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$ appartiendront à l'équation proposée en choisissant un signe convenable pour $b\sqrt{-1}$. Ce choix pourra se faire au moyen du dernier terme de l'équation qui doit être divisible par la racine. Pour ne pas faire de calculs inutiles, on doit débarrasser les premiers membres des équations $M=0$, $M'=0$, de leur commun diviseur, s'ils en admettent, et opérer séparément sur ce commun diviseur.

6. La considération des diviseurs conduit à une autre démonstration de la proposition énoncée ci-dessus. Soit en effet l'équation $x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0$, qu'on peut supposer à coefficients réels ; d'après ce que nous venons de dire, si elle admettait une racine complexe fractionnaire $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{p}$, le facteur $x^2-\dfrac{2a}{p}x+\dfrac{a^2+b^2}{p^2}$ aurait au moins un coefficient fractionnaire ; car p ne peut diviser a et a^2+b^2 et s'il est égal à 2, a^2+b^2 n'est pas divisible par 4 ; il suffit donc de démontrer qu'un polynôme à coefficients entiers dont le premier terme est x^m ne peut admettre un diviseur à coefficients fractionnaires (*).

7. Plus généralement pour que le polynôme. . . . . $x^m+\dfrac{a_1}{a}x^{m-1}+\ldots+\dfrac{a_m}{a}$, soit divisible par $x^n+\dfrac{b_1}{b}x^{n-1}+\ldots+\dfrac{b_n}{b}$, il faut nécessairement que b divise a. On suppose naturellement que les coefficients de l'un et l'autre polynôme sont réduits au plus petit dénominateur commun. Cela posé, en multipliant le dividende par a, et par une puissance de b

(*) V. p. 47.

convenable, on pourra toujours obtenir un quotient à coefficients entiers, en sorte que l'on aura :

$$b^p(ax^m+a_1x^{m-1}\ldots+a_m)=(bx^n+b_1x^{n-1}+b_n)\,Q.$$

Or b^p est premier avec le diviseur, donc il doit diviser tous les termes de Q ; par conséquent $ax^m+a_1x^{m-1}+\ldots$, est égal à $bx^n+b_1x^{n-1}+\ldots$, multiplié par un polynôme à coefficients entiers, ce qui exige que a soit un multiple de b.

8. La décomposition d'un polynôme en facteurs rationnels a beaucoup d'autres applications. Par exemple, il est souvent important de savoir reconnaître qu'un polynôme est premier, ou que l'équation dont il est le premier membre est irréductible. Je me propose d'indiquer dans un autre article un procédé régulier et d'une application facile pour trouver les diviseurs rationnels d'un polynôme algébrique.

THÉORÈME

RELATIF AU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

PAR M. BOUVERAT,
ancien élève de l'École polytechnique.

Théorème. Soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur entre les deux polynômes

$$a_1x^m+a_2x^{m-1}+a_3x^{m-2}+a_4x^{m-3}+a_5x^{m-4},+\text{etc.}$$
$$b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+b_3x^{m-3}+b_4x^{m-4}+b_5x^{m-5}+\text{etc.}$$

Le quotient sera du premier degré et de la forme

$$\alpha x-6.$$

Le reste devant être du degré $m-2$ pourra être représenté par

$$A_1x^{m-2}+A_2x^{m-3}+A_3x^{m-4}+A_4x^{m-5}+\text{etc.}$$

On multipliera le premier polynôme par b_1^2, et on effectuera la division. On trouvera l'expression du reste qui est représentée dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|l}
a_1b_1^2 & x^m + a_2b_1^2 & x^{m-1} + a_3b_1^2 & x^{m-2} + a_4b_1^2 & x^{m-3} + a_5b_1^2 & x^{m-4} + \text{etc.} \\
-b_1\alpha & -b_2\alpha & -b_3\alpha & -b_4\alpha & -b_5\alpha & \\
 & +b_1\beta & +b_2\beta & +b_3\beta & +b_4\beta &
\end{array}$$

Les coefficients de x^m et x^{m-1} devant être nuls, on aura, pour déterminer les valeurs de α et β, les deux relations

$$\left.\begin{aligned} a_2b_1^2 - b_2\alpha + b_1\beta &= 0 \\ a_1b_1^2 - b_1\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \quad \begin{aligned} \alpha &= a_1b_1 \\ \beta &= a_1b_2 - a_2b_1. \end{aligned}$$

α et β étant connus, on obtiendra les valeurs des coefficients A_1, A_2, A_3, etc. des termes du reste de la division, au moyen des égalités

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_3b_1^2 - b_3\alpha + b_2\beta, \\
A_2 &= a_4b_1^2 - b_4\alpha + b_3\beta, \\
A_3 &= a_5b_1^2 - b_5\alpha + b_4\beta, \\
A_4 &= a_6b_1^2 - b_6\alpha + b_5\beta.
\end{aligned}$$

La loi de ces coefficients est évidente.

2. Nous allons montrer, par quelques exemples, que ce théorème s'applique à tous les cas qui peuvent se présenter, et indiquer les dispositions qu'il convient de donner aux calculs ; ensuite nous ferons connaître certains caractères au moyen desquels on peut s'assurer que deux polynômes sont ou ne sont pas divisibles l'un par l'autre sans effectuer la division ; ce qui évitera toujours de faire la dernière opération dans la recherche du plus grand commun diviseur, soit par la méthode que nous proposons, soit par la méthode connue.

Règle générale. On écrit les deux polynômes l'un au-dessous de l'autre ; on place sur une ligne horizontale les trois multiplicateurs b_1^2, α, β, en ayant soin de supprimer les facteurs communs. On multiplie par b_1^2 les coefficients des termes du dividende, à partir du troisième, et on place les résultats sur une ligne horizontale; on multiplie par α changé de signe les coefficients des termes du diviseur, en commençant par le troisième, et on écrit les produits au-dessous des premiers, dans le même ordre qu'on les a obtenus; on multiplie par 6 les coefficients des termes du diviseur, à partir du second, et on écrit les produits encore au-dessous des précédents. On additionne par colonnes verticales, et les résultats sont les coefficients des termes du reste de la division du premier polynôme par le second.

Cette règle est appliquée à l'exemple suivant que nous avons pris dans le Traité d'Algèbre de M. Choquet :

$$\begin{array}{ll}
 & x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6 \\
 & 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 \\
 & +9,-3,\ +10 \\
\hline
 & -54+36+117+54 \\
 & +18+36+\ 15 \\
 & +40-60-120-50 \\
\hline
1^{\text{er}}\ \text{reste}\ldots & x^3+3x^2+3x+1\ldots\ \text{dans lequel on a supprimé} \\
 & 1,\ -3,\ +5 \qquad\qquad \text{le facteur } 4. \\
\hline
 & -\ 6-12-5 \\
 & -\ 9-\ 3 \\
 & +15+15+5 \\
\hline
2^{\text{e}}\ \text{reste}\ldots & 0
\end{array}$$

La seconde opération est inutile; car il est facile de reconnaître que le premier reste est le diviseur cherché. En effet, toutes les fois que le produit du dernier terme du dividende par b_1^2 est égal et de signe contraire au produit du dernier terme du diviseur par 6, ou lorsque la somme de ces deux produits est nulle, on doit, d'après ce qui précède, trouver zéro pour reste, si l'on effectue la division.

Ainsi ce théorème se réduit à effectuer de simples multiplications sur les coefficients des termes des polynômes proposés, sans faire subir aucune préparation au dividende. On remarque, en outre, qu'en appliquant la méthode ordinaire à l'exemple précédent, il faudrait écrire quarante-trois termes de plus.

3. Dans l'application de ce théorème, on suppose que le dividende contienne toutes les puissances de la lettre par rapport à laquelle il est ordonné depuis m jusqu'au terme indépendant de cette lettre, et de même le diviseur à partir de $m-1$. Quand cela n'a pas lieu, il faut tenir compte des puissances qui manquent, en les considérant comme affectées du coefficient zéro.

Cette circonstance abrége le théorème.

Prenons pour exemple les deux polynômes

$$x^7-3x^5+2x^4+4x^3-3x^2+x+4,$$
$$x^6-2x^4+x^3+x^2+x+4.$$

Comme il faut avoir égard aux rangs des termes, on pourra faire l'opération ainsi qu'elle est représentée dans le tableau suivant :

$$x^7+0x^6-3x^5+2x^4+4x^3-3x^2+x+4$$
$$x^6+0x^5-2x^4+x^3+x^2+x+4$$
$$1,\ -1,\ 0$$

$$-3+2+4-3+1+4$$
$$+2-1-1-1-4$$

1er reste... $-x^5+x^4+3x^3-4x^2-3x+4$
$$1,\ +1,\ +1$$

$$-2+1+1+1+4$$
$$+3-4-3+4$$
$$+1+3-4-3+4$$

2^e reste... $x^4+0x^3-3x^2+x+4$... dans lequel on a supprimé le facteur 2.
$$1,\ +1-1$$

$$0$$

D'après la remarque ci-dessus, on est assuré que le second reste est le diviseur demandé.

4. Il est évident que ce théorème s'applique également à la recherche du plus grand commun diviseur entre des polynômes contenant un nombre quelconque de lettres.

Soient pour exemple les deux polynômes à deux lettres

$$3x^3-7yx^2+3y^2x-2y^3$$
$$2x^2-3yx-2y^2$$
$$4,\ -6+5y$$

$$+12y^2-8y^3$$
$$+12y^2$$
$$-15y^2-10y^3$$

1er reste... $x-2y$... dans lequel on a supprimé le facteur $9y^2$.
$$1-2-y$$

$$0$$

5. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici est relatif aux polynômes des degrés m et $m-1$. Quand l'un des polynômes est du degré m, et l'autre du degré $m-2$, il faut calculer un multiplicateur de plus, en suivant le procédé indiqué plus haut.

Prenons pour exemple les deux polynômes

$$20x^5 - 41yx^4 + 50y^2x^3 - 45y^3x^2 + 25y^4x - 6y^5$$
$$5x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 3y^3.$$

On trouvera les quatre multiplicateurs 1, 4, $5y$, $2y^2$, qui, étant écrits avec des signes convenables pour l'opération, seront $+1$, -4, $+5y$, $-2y^2$.

Mais au lieu de commencer la multiplication par les troisièmes termes, il faudra la commencer par les quatrièmes pour les multiplicateurs $+1$ et -4, et par le troisième et le second terme du diviseur respectivement pour les multiplicateurs $5y$, $-2y^2$.

Voici le détail de l'opération :

$$20x^5 - 41yx^4 + 50y^2x^3 - 45y^3x^2 + 25y^4x - 6y^5$$
$$5x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 3y^3$$
$$1,\ -4,\ +5y,\ -2y^2$$

$$\begin{array}{l}
-45y^3 + 25y^4 - 6y^5 \\
+12y^3 \\
+25y^3 - 15y^4 \\
+\ 8y^3 - 10y^4 + 6y^5 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

On pouvait reconnaître à l'inspection des multiplicateurs que la division se ferait exactement, et par conséquent éviter de faire l'opération.

6. Il nous reste à examiner un dernier cas; c'est celui où les polynômes sont l'un et l'autre du degré m. Si les coefficients des termes en x^m ne sont pas égaux, on multipliera

l'un d'eux par un facteur convenable, afin qu'ils le deviennent. On retranchera l'un des polynômes de l'autre ; on obtiendra un résultat du degré $m-1$, auquel on appliquera le théorème conjointement avec l'un des polynômes proposés.

Soient donc pour exemple les deux polynômes du quatrième degré

$$x^4+8x^3+12x^2-8x+3$$
$$x^4+3x^3-13x^2+7x-2$$

Résultat de la soustraction..... $\begin{cases} +5x^3+25x^2-15x+5 \\ +\ x^3+\ 5x^2-\ 3x+1 \end{cases}$

$$1,\ -1+2$$

$$0$$

7. Quand on applique la méthode que nous venons d'exposer à la recherche du plus grand commun diviseur entre un polynôme $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+$ etc. et sa fonction dérivée, on voit que les trois multiplicateurs sont m^2, $-m$, $-a$. Ainsi on peut les écrire à l'inspection de la quantité proposée.

En examinant la composition des coefficients des termes du reste, on reconnaît qu'ils suivent une loi très-simple qui donne le moyen de les obtenir sans écrire la fonction dérivée.

Prenons, pour fixer les idées, le polynôme du cinquième degré

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
$$5x^4+4ax^3+3bx^2+2cx+d$$
$$25,\ -5,\ -a$$

$$25b+25c+25d+25e$$
$$-15b-10c-5d$$
$$-4a^2-3ab-2ac-ad$$

Le reste sera $\begin{cases} \ \ 10b \\ -4a^2 \end{cases} \Big| x^3 + \begin{matrix} 15c \\ -3ab \end{matrix} \Big| x^2 + \begin{matrix} 20d \\ -2ac \end{matrix} \Big| x + \begin{matrix} 25e \\ -ad \end{matrix}$

On voit que chaque coefficient est formé de deux parties. On obtient les premières en multipliant, à partir du troisième terme, les coefficients b, c, etc. respectivement par 2, 3, 4, etc. fois le degré du polynôme ; et les secondes, en multipliant, à partir du deuxième, les coefficients a, b, c, etc., tous par a et par le degré de chaque terme.

Cherchons par cette méthode, encore plus expéditive que la précédente, le reste de la division de

$$x^4+2x^3-3x^3+5x+10 \text{ par sa fonction dérivée,}$$

$$\begin{array}{r} \hline -24+60+160 \\ -12+12-\ \ 10 \\ \hline \end{array}$$

Le reste sera.... $-36x^2+72x+150$

Si l'on a $a=0$, le reste s'obtient encore plus simplement ; car les quantités $4a^2$, $3ab$, etc., contenant toutes le facteur a, se réduisent à zéro : de plus, les autres quantités $10b$, $15c$, etc. renferment le facteur commun 5 ou le degré du polynôme D'où il suit que les coefficients du reste sont $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, etc.

Par exemple, le reste de la division de

$$x^7+7x^6-9x^5-13x^4+8x^3-5x^2-2x+20 \left\} \begin{array}{l} \text{par sa fonc-} \\ \text{tion dérivée} \end{array} \right.$$

sera $\quad +14x^6-27x^5-52x^4+40x^3-30x^2-14x+160$

Note. Nous reviendrons sur ce théorème et sur les auteurs qui s'en sont occupés, dans notre article interrompu sur l'Élimination (I, p. 125). Tm.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES

D'après Euler, Legendre, MM. Gauss et Cauchy.

(Suite, v. p. 219.)

28. $\alpha+1$ est un nombre premier ; car, s'il était le produit de deux facteurs mn, alors $2^{mn}-1$ serait divisible par 2^m-1 et par 2^n-1 ; et par conséquent $2^{\alpha+1}-1$ n'étant plus un nombre premier, N ne sera plus un nombre parfait. Faisons $2^\alpha=x$; alors $N=2x^2-x$; lorsque $x=1$, N devient égal à l'unité ; donc $N-1$ est divisible par $x-1$; et l'on a $N-1=(x-1)(2x+1)$; remplaçant x par sa valeur, on a l'identité $N=2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)=(2^\alpha-1)(2^{\alpha+1}+1)+1$, α est essentiellement pair, et $2^\alpha=(3-1)^\alpha$; donc 2^α est de la forme $\dot{3}+1$; par conséquent $2^\alpha-1$ est divisible par 3 ; il en est de même de $2^{\alpha+1}+1$; donc N est de la forme $\dot{9}+1$. Soit N_1 la somme des chiffres de N ; N_2 la somme des chiffres de N_1 ; N_3 la somme des chiffres de N_2, et ainsi de suite ; tous ces nombres, en vertu de la propriété connue du diviseur 9 dans la numération décimale, sont de la forme $\dot{9}+1$. Ces nombres vont toujours en diminuant ; le dernier de ces nombres est donc l'unité, et l'avant-dernier est dix ou une puissance de dix.

Nous devons à l'obligeance de M. le professeur Wantzel la démonstration de cette observation de Krafft (27).

Le premier chiffre à droite de 2^α étant 4 ou 6, il en résulte que le premier chiffre à droite d'un nombre parfait est 6 ou 8.

Résidus négatifs; diviseur commun maximum; multiple minimum.

29. Dans la division, si la partie entière du quotient est trop faible à moins d'une unité près, on dit que la division se fait *en dedans*, et dans ce cas le résidu est positif; si la partie entière est trop forte à moins d'une unité près, la division est dite *en dehors*, et le résidu est négatif.

L'équation $a = bq + r$ (§ 13, p. 214) peut s'écrire

$$a = b(q+1) + r - b\,;$$

$q+1$ est le quotient en dehors, et $r-b$ est le résidu négatif correspondant; exemple :

$$15 = 4.3 + 3 = 4.4 - 1\,;$$

ainsi dans la division de 15 par 4, 3 est le résidu positif et -1 le résidu négatif. Les théorèmes 5, 6, 7 ont également lieu pour les résidus négatifs.

30. La somme du résidu positif et du résidu négatif pris positivement, est égale au diviseur; car $r + (b - r) = b$; donc, lorsqu'un de ces résidus est plus grand que la moitié du diviseur, l'autre est nécessairement plus petit que cette moitié; ils ne peuvent être égaux que lorsque le diviseur est pair.

31. *Problème* 5. Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres A et B.

1^re^ *solution. Méthode d'Euclide.* Elle est fondée sur le théorème 5 (p. 216); si $A = B$, le diviseur commun maximum est A : si $A > B$, soit r_1 leur résidu; ainsi le diviseur cherché divise r_1 (théor. 5), et *vice versâ* le diviseur de r_1 et de B divise A; soit r_2 le résidu de B et de r_1. On démontre de même que le diviseur commun cherché appartient aussi à r_1 et r_2; les résidus r_1, r_2, r_3.... allant en diminuant, on parviendra nécessairement à zéro ou à l'unité. Dans le premier cas, le diviseur correspondant au résidu nul est le diviseur commun maximum cherché ; dans le second cas, les deux nombres n'ayant d'autres diviseurs que l'unité, sont premiers entre eux. (Euclide, liv. VII, prop. 2 ; liv. X, prop. 3.)

2e *solution. Méthode de décomposition.* On décompose chaque nombre en ses facteurs premiers. On prend tous les facteurs communs aux deux ; on donne à chacun de ces facteurs le plus petit exposant qu'il a dans les deux nombres ; le produit de ces puissances est le plus grand commun diviseur cherché. Exemple :

$$504 = 2^3.3^2.7 \; ; \quad 2880 = 2^6.3^2 5 \; ,$$

ainsi le diviseur commun maximum de 504 et de 2880 est $2^3.3^2 = 72$.

32. *Problème* 6. Trouver une limite pour le nombre d'opérations à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur, par la méthode d'Euclide.

Solution. Soient A et B les deux nombres ; $A > B$; et $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ les résidus ; n indique le nombres d'opérations et r_n le dernier résidu. On suppose qu'on prend toujours les résidus les plus petits, et au besoin des résidus négatifs. Ainsi on a donc

$$r_1 < \frac{B}{2}; \quad r_2 < \frac{r_1}{2}; \quad r \ldots . r_n < \frac{r_{n-1}}{2};$$

sans exclure l'égalité (30). Donc

$$r_2 < \frac{B}{2^2}; \quad r_3 < \frac{B}{2^3}; \quad \ldots . \; r_n < \frac{B}{2^n};$$

or r_n étant un nombre entier, on a nécessairement

$$2^n < B \; ; \quad \text{ou} \quad n < \frac{\log . B}{\log . 2}; \quad \text{or} \quad \frac{1}{\log . 2} < \frac{10}{3};$$

donc
$$n < \frac{10}{3} \log . B \; ;$$

si B a m chiffres, alors $m > \log . B$: donc $n < \frac{10}{3} m$.

Le plus souvent, le nombre d'opérations est bien au-dessous de cette limite; ainsi dès qu'on parvient à un résidu premier avec le diviseur correspondant, l'opération se termine là. (*Voir* t. I, p. 355.)

32 (*bis*). *Théorème de M. Gauss.* Les carrés des modules des termes de la série A, B, r_1, r_2, r_3.... r_n vont toujours en diminuant.

Démonstration. La proposition est évidente quand A et B sont des nombres réels. Si A et B sont imaginaires, soit $\frac{A}{B} = b + ci$, b et c sont réels, et $i = \sqrt{-1}$; soient b' et c' les entiers les plus rapprochés à $\frac{1}{2}$ près de b et c ; de sorte que $(b - b')^2 < \frac{1}{4}$; $(c - c')^2 < \frac{1}{4}$; on a $A = Bq_1 + r_1$. Faisons

$$q_1 = b' + c'i ; \quad B = h + ki ; \quad r_1 = f + gi ;$$

h, k, f, g sont des nombres réels. De ces diverses équations on tire

$$\frac{r_1}{B} = b - b' + i(c - c') = \frac{f + gi}{h + ki} ;$$

et passant aux modules,

$$(b - b')^2 + (c - c') = \frac{f^2 + g^2}{h^2 + k^2}.$$

Le premier membre est plus petit que $\frac{1}{2}$; donc $f^2 + g^2$, carré du module de r_1, ne surpasse pas la moitié de $h^2 + k^2$, carré du module de B. Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. M. Gauss appelle *norme* le carré d'un module : cette expression abrége beaucoup d'énoncés. Le théorème précédent sert de base à la théorie des racines complexes des équations.

Corollaire. r_n est diviseur commun de A et B, et si l'on a $r_n = \pm 1$ ou bien $r_n = \pm i$, les nombres A et B n'ont pas de diviseur commun.

33. PROBLÈME 7. Trouver le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C, D, etc.

1[re] *Solution. Méthode d'Euclide.* Soit M le plus grand commun diviseur entre A et B ; on cherche le plus grand commun diviseur entre M et C, et ainsi de suite. (Euclide, liv. VII, prop. 3 ; liv. X, prop. 2-4.)

2[e] *Solution. Méthode de décomposition.* On prend les facteurs premiers communs, avec leurs plus petits exposants ; on en forme un produit qui est le plus grand commun diviseur cherché.

Corollaire. En divisant tous ces nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotients n'ont plus de commun diviseur.

34. PROBLÈME 8. Trouver le plus petit multiple de deux nombres A et B.

1[re] *Solution. Méthode d'Euclide.* Soit D le plus grand commun diviseur, a le quotient de $\frac{A}{D}$ et b le quotient de $\frac{B}{D}$, le plus petit multiple est abD. (Euclide, liv. VII, prop. 36.)

2[e] *Solution. Méthode de décomposition.* On fait le produit de tous les facteurs premiers élevés chacun au plus haut exposant.

35. PROBLÈME 9. Trouver le plus petit multiple des nombres A, B, C, D.....

1[re] *Solution. Méthode d'Euclide.* Soit M le plus petit mul tiple de A et B ; on cherche le plus petit multiple M_1 de M et C, et ainsi de suite. Le dernier plus petit multiple satisfait à la question. (Euclide, liv. VII, prop. 38, seulement pour trois nombres.)

2[e] *Solution. Méthode de décomposition.* Comme pour le problème précédent.

Observation. Les problèmes 5, 7, 8, 9 servent à simplifier les fractions et à les ramener au moindre dénominateur commun.

Nombres congruents, modules et congruences.

36. *Définition.* Deux nombres sont dits *congruents* relativement à un troisième nombre, lorsque, étant divisés chacun par ce troisième nombre, ils laissent des résidus égaux ; et ce troisième nombre est dit le *module* des deux nombres *congruents*.

37. Si a et b sont congruents par rapport au module p, on aura $a - b = \dot{p}$ (th. 6, p. 216) ; et réciproquement, si l'on a $a - b = \dot{p}$, a et b sont congruents par rapport au module p. Une telle équation se nomme une *congruence*.

Pour exprimer que $a - b$ n'est pas divisible par p, nous écrirons $a - b > \dot{p}$; et dans ce cas, a et b ne sont pas congruents relativement à p. Ainsi $a > \dot{p}$ signifie que a n'est pas divisible par p. Si $a > \dot{x}$, x désignant un nombre quelconque supérieur à l'unité, a est un nombre premier.

Remarque. Euclide, au livre X, prop. 80, dit qu'une ligne est *congrue* (προσαρμόζει) à une autre, lorsqu'elle satisfait à certaine condition de commensurabilité. M. Gauss a transporté cette locution en arithmétique et en a fait la base d'une doctrine qui fait époque dans la théorie des nombres ; l'illustre géomètre écrit ainsi les congruences $a \equiv b$ (mod. p) ; les notations étant purement conventionnelles, lorsqu'elles n'ont pas encore acquis la sanction des siècles, on peut et on doit les changer, s'il y a avantage. Legendre a adopté cette forme $a - b = M(p)$, où M est la lettre initiale du mot multiplicateur ; quelquefois encore, il emploie cette forme $\dfrac{a-b}{p} = e$, e étant la lettre initiale du mot entier. Nous avons pensé que le point, étant déjà admis pour désigner une multiplication, pourrait par analogie encore servir dans les congruences. On fait ce signe facilement et promptement ; ce qui est un avantage pour le calculateur et aussi sous le rapport typographique.

M. Cauchy s'est servi des mots *équivalents* et *équivalence*, pour remplacer les mots *congruents* et *congruence*. Ces nouvelles dénominations ne paraissent pas avoir été adoptées.

Théorie des résidus dans les progressions arithmétiques ; congruences du 1er degré.

38. LEMME 1. Etant données n quantités quelconques, disposées dans un ordre quelconque sur une ligne horizontale, la dernière moins la première est égale à la somme des $n-1$ restes qu'on obtient en retranchant chaque quantité de celle qui la précède.

Démonstration. Soient a, a_1, a_2, a_3 .... a_{n-1}, a_n les n quantités, on a l'identité

$$a_n - a = (a_1 - a) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots (a_n - a_{n-1}).$$

Corollaire. Si ces différences sont toutes égales, on a

$$a_n - a = (n-1)(a_1 - a);$$

ce qui a lieu dans les progressions arithmétiques.

Observation. Ce lemme est la base du calcul aux différences finies.

39. LEMME 2. Lorsque les n quantités étant réelles sont écrites suivant leur ordre de grandeur, la différence des quantités extrêmes est plus grande qu'aucune différence entre des quantités intermédiaires.

Démonstration. Soient a_1, a_2, a_3.... a_p.... a_q.... a_n, n quantités écrites suivant un ordre ascendant, on aura

$$a_n - a_1 > a_q - a_p;$$

car $a_q - a_p$ est égale à la somme de toutes les différences intermédiaires, et $a_n - a_1$ est égale à cette même somme, plus les différences comprises entre a_p et a_1; et encore entre a_n et a_q. Donc, etc.

40. LEMME 3. Si n nombres inégaux se succèdent suivant un ordre ascendant, deux quelconques de ces nombres ne peuvent être congruents par rapport à un module plus grand que la différence des nombres extrêmes.

Démonstration. Le module étant plus grand que la différence des extrêmes, est plus grand *à fortiori* qu'une différence entre deux nombres intermédiaires (lemme 2); le module ne peut donc diviser cette différence; les deux nombres ne sont donc pas congruents.

Corollaire. Divisant donc tous les nombres par ce module, on obtient n restes différents.

41. THÉORÈME 11. n nombres entiers consécutifs étant divisés chacun par n, donnent les résidus $0, 1, 2, 3 \ldots\, n-1$, dans un ordre quelconque.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme précédent. (Disq. arith., sec. 1, § 3.)

42. THÉORÈME 12. Soit la progression arithmétique a, $2a$, $3a \ldots\, (n-1)a$, n étant premier avec a; si l'on divise chaque terme par n, on obtient les résidus $1, 2, 3 \ldots\, n-1$.

Démonstration. La différence de deux termes quelconques est ka, ou $k < n$; et a étant premier avec n, ka n'est donc pas divisible par n. Par conséquent, aucune différence n'est divisible par n; tous les restes sont donc différents et moindres que n, et aucun reste n'est nul. Donc, etc.

(*La suite prochainement.*)

LES DEUX PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS, DANS LES CONIQUES,

d'après Apollonius.

—

On sait que ces deux propriétés sont l'une des plus belles découvertes du grand géomètre ; il y a peut-être encore quelque intérêt, au moins historique, à connaître sa marche ; elle est même plus simple que celle qui est communément en usage. Nous allons indiquer la suite des propositions nécessaires telles qu'on les trouve dans le livre VII ; et parce qu'elles sont un moyen d'exercice, nous supprimons les démonstrations, et nous rendons les énoncés conformes au langage moderne.

Proposition II.

A sommet d'une hyperbole, A′ second sommet ; T un point sur AA′ entre A et A′, tel que l'on ait $\frac{\mathrm{A'T}}{\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\text{paramètre}}$; soit AB une corde quelconque ; BE une perpendiculaire sur l'axe A′A prolongé ; on aura $\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{\mathrm{TE.AE}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{A'T}}$.

Observation. La longueur AT est homologue au paramètre dans la proportion qui sert à déterminer le point T, et comme cette longueur revient dans presque toutes les propositions du VII[e] livre, Apollonius appelle cette longueur *l'homologue*, nom caractéristique que nous conserverons ; si nous désignons cette longueur par h, on aura $h = \frac{2ap}{2a+p}$ où a est le demi-axe transverse, et p son paramètre.

PROPOSITION III.

A sommet d'une ellipse, A' autre sommet sur le même axe; T un point sur le *prolongement* de AA', tel qu'on ait $\frac{A'T}{AT} = \frac{AA'}{A'T}$; le reste comme dans la proposition précédente.

Observation. On a $h = \frac{2ap}{2a-p}$.

PROPOSITION IV.

AA' axe d'une hyperbole ou d'une ellipse; C le centre, CB un demi-diamètre quelconque; CH le demi-diamètre conjugué; BE une perpendiculaire sur l'axe; BD une tangente rencontrant l'axe en D; on a $\frac{\overline{BD}^2}{CH^2} = \frac{DE}{CE}$.

Observation. La proposition V est relative à la parabole.

PROPOSITION VI.

A et A' deux sommets d'une hyperbole; C le centre; AT *l'homologue* par rapport au sommet A; A'T' *l'homologue* par rapport au sommet A (*voir* proposition II), de sorte qu'on a AT = A'T'; les points T et T' sont entre A et A'; B point pris sur l'hyperbole dont le sommet est A; BD une tangente en B, rencontrant l'axe AA' en D; CB un demi-diamètre; CH le demi-diamètre conjugué à CB; AL corde parallèle à CH et à BD; LM perpendiculaire abaissée sur l'axe; on aura

$$\frac{CB^2}{CH^2} = \frac{MT}{MT'}.$$

PROPOSITION VII.

Même proposition pour l'ellipse, les points T et T' sont sur le prolongement de l'axe AA'.

PROPOSITION VIII.

Mêmes constructions et notations qu'en VI et VII. Soit

Y une moyenne proportionnelle entre MT et MT', on aura

$$\frac{AA'^2}{4\,[CB^2+CH^2]}=\frac{A'T'.MT}{[MT+Y]^2}.$$

PROPOSITION IX.

Mêmes constructions et notations qu'en VI, VII et VIII; on a

$$\frac{A'T'.MT}{[MT-Y]^2}=\frac{AA'^2}{4\,[CB-CH]^2}.$$

PROPOSITION X.

Mêmes constructions et notations; on a $\frac{AA'^2}{4.CB.CH}=\frac{A'T'}{Y}$, ellipse.

PROPOSITION XI.

Même proposition pour l'hyperbole.

PROPOSITION XII.

Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des carrés des axes.

PROPOSITION XIII.

Dans l'hyperbole, la différence des carrés des axes est égale à la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques.

Observations. Apollonius déduit ces deux dernières propositions des propositions VII et VIII, qui reviennent identiquement à celle-ci : la somme (algébrique) des carrés des projections de deux diamètres conjugués quelconques sur un axe est égale au carré de cet axe; au lieu d'un axe on peut même prendre un diamètre, pourvu qu'on fasse les projections parallèlement au diamètre conjugué à celui sur lequel on projette; ainsi la méthode analytique de M. Gergonne (t. I, p. 245) est la traduction algébrique de la méthode synthétique d'Apollonius.

Proposition XXXI.

Si l'on mène deux diamètres conjugués quelconques dans l'ellipse, ou entre les hyperboles conjuguées, le parallélogramme construit avec ces diamètres, est égal au rectangle construit sur les axes; pourvu que les angles du parallélogramme soient égaux aux angles formés au centre pour les diamètres conjugués.

Apollonius n'a ici recours qu'à la proposition IV; conservons les mêmes constructions et notations; par H menons une tangente rencontrant en I la tangente BD et en D′ l'axe AA′, la figure CBIH est un parallélogramme; et on sait par la géométrie élémentaire que l'aire de ce parallélogramme est une moyenne proportionnelle entre les aires doublées des triangles semblables DBC, D′HC; or, d'après la proposition IV, Apollonius démontre facilement, empruntant le langage moderne, que l'aire doublée du triangle DBC est $\frac{ya^2}{x}$ et l'aire doublée du triangle D′HC est $\frac{xb^2}{y}$; a, b étant les demi-axes principaux; et x et y les coordonnées du point B, donc l'aire du parallélogramme est ab, etc.

La proposition IV est une transformation de celle-ci : le produit des distances des extrémités d'un diamètre D à deux diamètres conjugués quelconques est égal au produit des distances, à ces mêmes diamètres, de l'extrémité du diamètre conjugué à D; c'est l'interprétation géométrique de la troisième équation de M. Gergonne (t. I, p. 246).

III. Apollonius ne donne pas la solution du problème où il s'agit de trouver les axes au moyen de deux diamètres conjugués. Cette solution se trouvait probablement dans le livre VIII[e] qui ne nous est pas parvenu; elle est d'ailleurs une conséquence de la proposition IV, puisqu'on en déduit que le produit des deux segments d'une tangente interceptée entre les deux axes est égal au carré du demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point de contact; ce qui subsiste encore lorsqu'on remplace les axes par des diamètres conjugués quelconques.

C'est précisément, en se fondant sur cette propriété, que Pappus donne la solution du problème, dans le huitième et dernier livre de la collection (Prop. XIV). Comme il a dédié ce livre à son fils Hermodore, à l'usage duquel, dit-il, il a réuni, tout ce qui se trouve d'épars dans les écrits de divers géomètres et surtout d'Apollonius, qu'il ne fait que commenter et transcrire, il est probable que cette solution que Pappus a placée dans son huitième et dernier livre est celle qu'Apollonius avait mise aussi dans son huitième et dernier livre; on peut étendre cette construction à l'hyperbole. Euler, dans ses mémoires, donne trois constructions différentes pour résoudre ce problème. (*Novi-Comment.* VII, 1750-51); au moyen des diamètres conjugués, il trouve la direction du diamètre égal à l'un d'entre eux; dès lors la bissection d'un angle donne les directions des axes.

IV. Dans ces derniers temps, M. Chasles a indiqué pour l'ellipse, cette construction d'une élégance remarquable. Soit O le centre de la courbe; OA, OB, deux demi-diamètres conjugués; par le point A, on abaisse une perpendiculaire AI sur OB; et sur cette perpendiculaire, on prend de part et d'autre AE, AE′ égaux à OB; on tire les droites OE, OE′; les bissectrices de l'angle EOE′, et de son supplément sont les axes principaux de l'ellipse, le grand axe est égal à la somme des droites OE, OE′ et le petit axe est égal à leur différence, et le grand axe traverse l'angle aigu formé par les diamètres conjugués donnés.

L'auteur a été conduit à cette construction en résolvant le problème analogue pour les surfaces du second degré. (*Aperçu historique*, p. 45); la vérification immédiate est facile. Soit $OA = a$, $OB = AE = AE' = b$, $\sin BOA = \sin \gamma$; prenons OA pour axe des x, OB pour axe des y; il vient $AI = a \sin \gamma$, $EI = a \sin \gamma - b$, $E'I = a \sin \gamma + b$, $OE^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin \gamma$, $OE'^2 = a^2 + b^2 + 2ab \sin \gamma$; ainsi, d'après les deux propriétés fondamentales, OE+OE' est égal au grand axe, et OE—OE' ou OE'—OE égal au petit axe; les coordonnées du point E sont $b \cot \gamma$, $a - b \operatorname{cosec.} \gamma$; l'équation du diamètre OE est donc $y = \frac{b \cos \gamma}{a \sin \gamma - b} x$, et celle du diamètre OE' est $y = -\frac{b \cos \gamma}{a \sin \gamma + b}$.

Les deux coefficients angulaires vérifient l'équation 13 (T. II, p. 29), dans laquelle $A = a^2$, $B = c$, $C = b^2$; ainsi les diamètres OC, OE' sont égaux, donc, etc. Cette belle construction ne s'applique pas à l'hyperbole; en désignant par K le point où un axe principal rencontre la droite EE' il est facile de démontrer directement que l'on a $\frac{OE}{OE'} = \frac{KE}{KE'}$; donc l'axe est une bissectrice de l'angle EOE'.

Un prochain article sur les noms des coniques, les paramètres et les foyers, selon Apollonius. Tm.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE SUR APOLLONIUS.

—

Aucun renseignement ne nous est parvenu sur la vie privée d'un homme que l'antiquité a surnommé le grand géomètre; titre qu'il a conservé chez les modernes. On sait seulement qu'il est né à Perge (Pamphylie), au temps de Ptolémée Évergète, qui a commencé à régner en — 247; c'est ce que nous apprend Héraclius, auteur d'une vie d'Archimède, et cité par Eutocius. Il étudia les mathématiques à

Alexandrie, chez les disciples d'Euclide, et acquit sa plus grande célébrité sous Philopator, mort en —205; ainsi il a suivi Archimède d'environ un demi-siècle, et précédé de peu Géminus et Hipparque. Il est probable que se dévouant entièrement à la science, Apollonius a mené une vie studieuse et méditative dans l'Académie d'Alexandrie. Nous savons toutefois qu'il a fait quelques excursions à Pergame et à Éphèse.

Il a composé beaucoup d'ouvrages, dont deux seulement nous sont parvenus, et a eu quatre commentateurs : Pappus, Hypatie, Serenus et Eutocius. Le premier et le dernier existent encore. Pappus, au commencement du septième livre, qu'il dédie à son fils Hermodore, donne la liste suivante de ces ouvrages, avec quelques indications sur leur contenu.

1. *De Sectione proportionis* (περὶ λόγου ἀποτομῆς); faire des sections en vue de certains rapports. Pappus en donne l'exemple suivant : deux droites sont données, et sur chaque droite un point fixe O, O'; par un troisième point donné, mener une transversale qui coupe les deux droites en deux points P et P' tels que l'on ait $\frac{OP}{O'P'}$ = un rapport donné. Cet ouvrage contient deux livres. Il existe en arabe et une traduction latine en a été publiée par Halley, sous ce titre : *Apollonii Pergœi de sectione rationis, lib. II; ex arabico MS. latinè versi, accedunt ejusdem de sectione spatii, lib. II, restituti Oxonia*, 1706, in-8°; ouvrage rare, n'ayant été tiré qu'à quatre cents exemplaires.

2. *De Spatii sectione* (χωρίου ἀποτομῆσ), en 2 livres; mener des transversales qui retranchent des espaces donnés; perdu.

3. *Determinatâ sectione* (διεορισμένης τομῆς), en 2 livres, contenait 83 théorèmes et 51 lemmes; Pappus en cite un exemple : plusieurs droites données sont coupées par une transversale, trouver sur cette transversale un point tel que ses distances aux points d'intersections de cette transversale

avec les droites aient une relation donnée; problème déterminé; ouvrage perdu.

4. *De Tactionibus* (ἐπαφῶν), en 2 livres, contenait 20 lemmes, 60 théorèmes et 21 problèmes; renfermait la solution de tous les problèmes où il s'agit de mener un cercle tangent à des droites, à des cercles, et passant par des points donnés. Pappus donne l'énumération de ce genre de problèmes; ouvrage perdu.

5. *De Convergentibus* (νευσεων), en 2 livres, 125 théorèmes et 28 lemmes; traitait à ce qu'il paraît des droites qui se dirigent vers un même point, des faisceaux convergents; ouvrage perdu.

6. *Planis Locis* (τοπων ἐπιπέδων). Sur les lieux géométriques de la droite et du cercle. Exemple : Deux droites passant par deux points fixes, font un angle donné, le lieu du sommet est un cercle; contenait en 2 livres, 147 théorèmes et 2 lemmes; perdu. (*La suite prochainement.*)

LIEU GÉOMÉTRIQUE

d'un point du grand axe d'une ellipse qui se meut en restant tangente à deux droites fixes.

PAR M. LOUIS FERRIER,
élève du collége royal de Mâcon.

La solution générale que nous allons donner de ce problème est fondée sur cette propriété de l'ellipse, que, si on décrit sur le grand axe comme diamètre une circonférence, les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes se trouvent tous sur cette circonférence.

I. Supposons d'abord que le point pris sur l'axe soit le foyer, et que les deux tangentes soient rectangulaires. Si on considère l'ellipse dans une quelconque de ses positions, on obtiendra les coordonnées du foyer, en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les deux tangentes. Les pieds de ces perpendiculaires se trouveront, d'après le théorème que nous venons de citer, sur une circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, et le problème sera ramené au suivant :

Étant donnés une circonférence de cercle et un point F *situé à une distance* c *du centre, trouver la relation qui existe entre les deux droites rectangulaires menées du point* F *à la circonférence* (fig. 44).

Posons $FP = y$, $FQ = x$, $OP = a$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Les deux triangles OFP et OFQ nous donneront :

$$\cos OFP = \frac{c^2 + y^2 - a^2}{2cy} = \frac{y^2 - b^2}{2cy} = -\cos AFP,$$

$$\cos OFQ = \frac{c^2 + x^2 - a^2}{2cx} = \frac{x^2 - b^2}{2cx} = -\sin AFP.$$

Ajoutant ces deux équations, après les avoir élevées au carré, on trouve

$$(1) \quad \left(\frac{y^2 - b^2}{2cy}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - b^2}{2cx}\right)^2 = \cos^2 AFP + \sin^2 AFP = 1.$$

Cette équation peut se mettre aussi sous la forme :

$$\left(y - \frac{b^2}{y}\right)^2 + \left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 = 4c^2;$$

et c'est sous cette forme qu'on la trouverait immédiatement, en exprimant que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes est égal à b^2, et que la distance des deux foyers est égale à $2c$.

Il résulte de la solution que nous avons donnée et de l'énoncé même du problème, que l'on devra trouver la même équation pour la courbe décrite par le second foyer, et que pendant que le premier foyer décrira une portion de la courbe, le deuxième foyer décrira l'autre. Quant à l'équation (1), elle nous montre immédiatement, d'après sa forme, que l'origine est un centre, que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et à leurs bissectrices, et que les portions de la courbe comprises dans les angles yox', $y'ox'$ et $y'ox$ sont tout à fait semblables à la partie comprise dans l'angle yox. Nous pouvons donc, dans tout ce qui va suivre, nous contenter de considérer cette dernière portion de courbe décrite par une ellipse qui ne sort pas de l'angle yox. On remarque encore que l'équation est satisfaite par $x = 0$ et $y = 0$; mais il ne faut pas en conclure que la courbe passe à l'origine, car si l'on résout l'équation par rapport à y, et que l'on cherche les conditions de réalité des racines, on trouve que les valeurs de x, et par suite celles de y (à cause de la symétrie), sont comprises entre $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ et $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. L'origine est donc un point isolé. On conclut encore de là que la courbe n'a pas de branches infinies; ce que nous annoncent aussi les considérations géométriques du problème.

En résolvant l'équation, on trouverait facilement la forme de la courbe tracée dans la figure 45 : mais nous préférons construire la courbe par points et la discuter d'après cette construction.

Au point F élevons une perpendiculaire au diamètre OF, et prenons pour axes les lignes FA et FB. Cela fait, voici comment on construira les différents points de la courbe : par le point F on mènera deux droites rectangulaires quelconques, et on considérera les lignes FA, FD comme les abscisses, et les lignes FB, FC comme les ordonnées. Ensuite, on rabattra par des arcs de cercle ces longueurs sur les axes FX, FY, et prenant, pour chaque abscisse, les deux ordonnées correspondantes, on déterminera quatre points de la courbe. En continuant ainsi, on trouvera la forme de courbe indiquée par la figure 45.

Nous allons maintenant chercher les points remarquables. Occupons-nous des limites parallèlement à l'axe des y. On sait que si, par un point F pris dans un cercle, on mène différentes lignes, la plus petite et la plus grande sont les lignes FA et FD comptées sur le diamètre qui passe par le point F, et que de FA à FD la ligne menée du point F à la circonférence va toujours en croissant. Il résulte de là que FA et FD seront les limites des abscisses. Et comme, dans ce cas, à la même abscisse correspondent deux ordonnées égales FI et FC, on obtiendra par la considération de ces ordonnées, pour l'abscisse FA, deux points réunis en un seul au point K; et pour l'abscisse FD, deux autres points réunis en R. Comme la courbe est symétrique par rapport aux bissectrices des angles des axes, les limites prises parallèlement à l'axe des abscisses seront absolument les mêmes que pour l'axe des ordonnées. On aura ainsi deux autres points extrêmes N et L

On peut déterminer facilement les points où la courbe coupe la bissectrice; il suffit pour cela de faire au point F, de chaque côté du diamètre, un angle de 45 degrés. On aura alors quatre coordonnées égales deux à deux, qui seront celles des points cherchés.

2. On peut construire la courbe d'une autre manière aussi simple. Pour cela nous remarquons que, si nous décrivons du centre de l'ellipse une circonférence avec un rayon égal à a, nous couperons les axes en quatre points dont les distances à l'origine seront les coordonnées des foyers. Les longueurs de ces lignes ne dépendent donc que des diverses positions du centre pendant le mouvement de l'ellipse. Or il est facile de voir que le centre décrit un arc de cercle limité par deux parallèles aux axes, IG et QS menées à la distance b; car

il est toujours distant du sommet de l'angle droit formé par les deux tangentes, de la quantité constante $\sqrt{a^2+b^2}$, et sa plus courte distance à la tangente est égale à b. On peut remarquer que le centre décrit deux fois le même arc, puisqu'il ne peut pas dépasser deux lignes fixes, et qu'après la rotation entière de l'ellipse, il rèvient à sa première position.

La portion de cercle comprise entre les deux parallèles étant tracée, d'après les remarques précédentes, il suffira, pour déterminer les différents points de la courbe, de décrire de tous les points de cet arc de cercle une circonférence d'un rayon égal à a, qui coupera les deux axes chacun en deux points. On obtiendra ainsi les coordonnées de quatre points, et on déterminera, en opérant ainsi, la forme de la courbe déjà trouvée (*fig.* 45).

Il est bien évident qu'on aura les points limites en décrivant la circonférence des deux extrémités de l'arc rn, et les points situés sur la bissectrice en la décrivant du milieu de cet arc.

3. Connaissant le lieu décrit par le foyer, nous allons déterminer facilement celui d'un point quelconque pris sur l'axe.

Soit M ce point pris sur l'axe (*fig.* 44). Il est facile de voir, en menant les coordonnées du point M et les coordonnées parallèles du foyer, que si on projette M sur FP et FQ en H et E, les lignes PH et QE seront les coordonnées (x', y') du point M. Il résulte de là que si nous pouvons exprimer FP et FQ (y, x) au moyen de PH et QE (y', x'), en substituant les valeurs de y et de x dans l'équation du foyer, nous aurons une relation entre x' et y'. Soit FM $= l$. On a

$$y = y' + \text{HF}, \quad \text{HF} = l \cos \text{BFA} = l\frac{(b^2 - y^2)}{2cy},$$

d'où
$$y = y' + l\frac{(b^2 - y'^2)}{2cy};$$

ou bien en effectuant :

$$(2c+l)y^2 - 2cyy' - lb^2 = 0.$$

En posant $(2c+l)=h$ et $(2c+l)\,lb^2=k$, on tire de là la valeur

$$y = \frac{cy' \pm \sqrt{c^2y'^2+k}}{h}.$$

On voit bien que l'on aura aussi

$$x = \frac{cx' \pm \sqrt{c^2x'^2+k}}{h}.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (1), nous trouvons pour l'équation du lieu cherché :

$$\text{(2)}\qquad \left[c\,(k+b^2h^2)\,y' + (k-b^2h^2)\sqrt{c^2y'^2+k}\right]^2 + \\ + c\,(k-b^2h^2)\,x' + (c-b^2h^2)\sqrt{c^2x'^2+k} = 4c^2\ (*).$$

En élevant au carré et faisant les opérations nécessaires pour l'évanouissement des radicaux, on arrive à une équation en x' et y' du huitième degré. Mais après quelques préparations, on voit qu'elle ne contient que des termes en $x'y'$, $x'^2+y'^2$, $x'^4+y'^4$ ou bien $\left((x'^2+y'^2)^2-2x'^2y'^2\right)$; et que par conséquent en la transformant en coordonnées polaires, elle sera fonction de ρ et de $\sin 2\omega$. En élevant au carré une seconde fois, on trouve une équation bicarrée par rapport à $\sin 2\omega$, qu'on peut résoudre par rapport à cette variable.

4. Voyons maintenant si, en faisant certaines hypothèses, on ne pourrait pas faire disparaître immédiatement les radicaux.

Cela arrive évidemment lorsqu'on pose $c=0$, $k+b^2h^2=0$, ou bien encore $k-b^2h^2=0$.

En développant ces deux dernières conditions, elles nous donnent les relations $l=-c$ et $c=0$.

La première relation, $l=-c$, nous indique que le point M

(*) Cette équation n'étant pas homogène est évidemment fausse. Tm.

est le centre même de l'ellipse. En faisant dans l'équation (2) $k+b^2h^2=0$ et $l=-c$, on trouve un cercle dont le rayon est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Nous voyons, d'après la valeur $c=0$, que l'ellipse se change en une circonférence ; et en faisant cette hypothèse dans l'équation, on trouve le résultat $x'^2+y'^2=l^2$, c'est-à-dire que le point M décrit un cercle dont le rayon est l. Ce qui était évident *à priori*.

Si le point M est le sommet, l'équation n'offre rien de remarquable.

5. Maintenant nous supposerons que l'angle des deux tangentes soit quelconque, et nous aurons à chercher :

Le lieu géométrique des points du grand axe d'une ellipse qui se meut en restant tangente à deux droites fixes faisant un angle quelconque.

Si nous rapportons la courbe à ces deux tangentes fixes prises pour axes, les coordonnées de ses différents points s'obtiendront en divisant par l'angle des axes les perpendiculaires abaissées du point décrivant sur ces lignes. La question est donc ramenée à trouver une relation entre ces perpendiculaires.

En supposant d'abord que le point que l'on considère soit le foyer, nous reprendrons les calculs comme dans le problème précédent. Seulement, arrivé au point où la première solution exige que l'angle PFQ soit droit, il faudra seulement exprimer que cet angle est constant. Voici comment nous continuerons les calculs :

Posons $\quad \cos \mathrm{PFQ} = m = \cos(\mathrm{PFA} + \mathrm{AFQ})$.

Nous déduisons de là

$$(m - \cos \mathrm{PFA} \cos \mathrm{AFQ})^2 = \sin^2 \mathrm{PFA} \sin^2 \mathrm{AFQ}.$$

Il suffit maintenant, pour avoir notre relation cherchée, de remplacer $\cos \mathrm{PFA} \cos \mathrm{AFQ}$ et $\sin^2 \mathrm{PFA} \sin^2 \mathrm{AFQ}$ par leurs valeurs en fonctions de x et y, valeurs trouvées dans le premier problème.

On déduira de ce lieu celui d'un point quelconque pris sur l'axe, tout à fait de la même manière que dans la première partie.

Ainsi le problème est résolu généralement pour un point quelconque du grand axe.

6. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le point qui décrit la courbe est un point quelconque de l'axe. Si nous supposons maintenant que ce point soit pris comme on voudra sur le plan de l'ellipse, l'angle OFM, au lieu d'être égal à deux angles droits, sera égal à un angle constant quelconque ; et la seule différence entre ce cas et celui que nous avons examiné précédemment, proviendra de ce que le cosinus de l'angle HFM, au lieu d'être égal à — cos OFP, sera égal à cos (OFM — OFP). Le sinus de l'angle OFP entrera dans l'expression de cos HFM, et si on calcule sa valeur au moyen de celle de cos OFP trouvée précédemment, on introduira y' sous un radical, dans l'expression de y ; alors l'équation qui donne la valeur de y au moyen de y' ne sera plus du second degré. On aura bien encore, de cette manière, un nombre suffisant d'équations pour résoudre le problème ; mais on ne pourra pas faire l'élimination comme dans le cas précédent.

Note. 1. On parvient directement et promptement à ces solutions en faisant usage de nos formules générales. Prenons les deux tangentes pour axes des coordonnées ; on aura $l = l' = 0$; or $m = B^2 - 4AC$; remplaçant A, B, C par leurs valeurs en k, k', L, il vient

$$\frac{4L^2}{m^3} = \frac{2kk'n}{m^3} + \frac{n^2}{m^2} = \frac{r}{\sin^2\gamma};$$

où r négatif est le produit des carrés des demi-axes dans l'ellipse, et r positif le même produit dans l'hyperbole. On a

$$N = A + C - B\cos\gamma = \frac{k^2 + k'^2 + 2(kk' + mn)\cos\gamma}{4L}$$

et $$\frac{4LN}{m^2} = \frac{k^2 + k'^2 + 2(kk' + mn)\cos\gamma}{m^2} = s\,;$$

dans cette expression, s est la somme algébrique des carrés des demi-axes (t. I, p. 493, VII); ainsi r et s sont des quantités données.

2. *Centre.* Soient x et y les coordonnées du centre; donc

$$x = \frac{k}{m};\ y = \frac{k'}{m};$$

on a donc

$$\frac{n^2}{m^2} + 2xy\frac{n}{m} = \frac{r}{\sin^2\gamma}$$

et $$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma + 2\frac{n}{m}\cos\gamma = s\,;$$

éliminant $\frac{n}{m}$, il vient

$$(y^2 + x^2 - s)^2 - 4x^2y^2\cos^2\gamma = r\cot^2\gamma\,;$$

lieu du centre; courbe du 4^e degré, n'ayant point de branches infinies et du premier genre (Euler, Introd, t. II, lib. II, § 261); si $\gamma = 1^q$, elle se réduit à un cercle double.

3. *Foyer.* Soient X et Y les coordonnées du foyer, et toujours x et y celles du centre; on a $X = \alpha - x$; $Y = \beta - y$; $\alpha^2\sin^2\gamma = x^2\sin^2\gamma - b^2$; $\beta^2\sin^2\gamma = y^2\sin^2\gamma - b^2$ (t. II, p. 430);

car $$\frac{4AL}{m^2} = \frac{k^2}{m^2} = x^2; \quad \text{et} \quad \frac{4CL}{m^2} = y^2;$$

d'où $(x + X)^2\sin^2\gamma = x^2\sin^2\gamma - b^2$, et de là

$$x = -\frac{b^2 + X^2\sin^2\gamma}{2X\sin^2\gamma},$$

et de même $$y = -\frac{b^2 + Y^2\sin^2\gamma}{2Y\sin^2\gamma};$$

substituant ces valeurs dans le lieu du centre, il vient

$$[b^4(X^2+Y^2)+Y^2X^2(Y^2+X^2-4s)\sin^4\gamma+4b^2Y^2X^2\sin^2\gamma]^2-$$
$$-4X^2Y^2[b^2+X^2\sin^2\gamma][b^2+Y^2\sin^2\gamma]\cos\gamma=16rY^4X^4\cos^2\gamma\sin^6\gamma,$$

lieu des foyers ; courbe du 12^e degré. Si $\gamma = 1^q$, la courbe est du 6^e degré et la même que celle de M. Ferrier. Ceci est pour l'ellipse et l'hyperbole ; pour la parabole dont le paramètre est donné, $\frac{L}{N^3}$ est une quantité constante $=p^2$ (t. I, p. 494) ;

$4L^2 = 2kk'n$; $N = \frac{k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma}{4L}$. α et β étant les coordonnées du foyer, on a $\alpha = \frac{-k'n}{4NL}$; $\beta = -\frac{kn}{4NL}$ (t. II, p. 432); d'où l'on déduit facilement

$$p^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma) = x^2\beta^2.$$

Si $\gamma = 1^q$, on trouve l'équation (3) de la p. 299, t. I.

4. Pour un point quelconque du plan, *voir* a solution de M. Rispal, p. 226 de ce volume. Tm.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Surfaces et volumes engendrés par les polygones réguliers, lorsqu'ils tournent autour d'une perpendiculaire au diamètre du cercle circonscrit menée par le sommet auquel aboutit ce diamètre.

PAR M. HUET,
ancien professeur de mathématiques spéciales à l'École de Sorrèze,
régent de mathématiques spéciales au collége de Pamiers.

Nous adopterons dans la résolution de ces questions, les mêmes notations que celles que nous avons employées p. 353, t. II; seulement, pour varier les difficultés, nous chercherons directement les expressions des volumes et des surfaces que nous nous nous proposons de trouver en fonction du rayon R du cercle circonscrit. La marche que nous allons suivre est d'ailleurs la même.

Surfaces engendrées.

1° *Triangle* (fig. 46).

$$\text{Surf. T} = \text{surf. CB} + 2\,\text{surf. AB} = 2\pi\text{BF.CB} + 2\pi\text{BF.AB} =$$
$$= 4\pi.\text{AB.BF} = 3\text{AB}.2\pi.\frac{2\text{BF}}{3} = 3\text{AB}.2\pi\text{AO}\,; \quad (1)$$

or $\qquad \text{AB} = \text{R}\sqrt{3}\,, \quad \text{AO} = \text{R}\,;$

donc $\qquad \text{surf. T} = 3.\text{R}\sqrt{3}\,.2\pi\text{R} = 6\pi\text{R}^2\sqrt{3}.$

2° *Carré* (fig. 47).

$$\text{Surf. C} = 2(\text{surf.AB} + \text{surf.CB}) = 2\pi\{\text{BE.AB} + \text{CB(CA+BE)}\} =$$
$$= 2\pi\text{AB}\,(2\text{BE} + \text{CA}) = 4\text{AB}.2\pi\text{OA}\,; \qquad (2)$$

or $\text{AB} = \text{R}\sqrt{2}$, et $\text{OA} = \text{R}$; donc $\text{surf. C} = 8\pi\text{R}^2\sqrt{2}$.

3° *Pentagone* (fig. 48).

$$\text{Surf. P} = 2\,\text{surf. AB} + 2\,\text{surf. CB} + \text{surf. EC} = 2\pi\text{BH.AB} +$$
$$+ 2\pi\text{BC}\,(\text{CG} + \text{BH}) + 2\pi\text{CG.EC} = 4\pi\text{AB}\,(\text{BH} + \text{CG})\,;$$

or on a

$$\text{AB} = \frac{\text{R}}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\ \text{BF} = \text{D} = \frac{\text{AB}}{2}(1 + \sqrt{5}) =$$
$$= \frac{\text{R}}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{\text{R}}{4}\sqrt{40 + 8\sqrt{5}} = \frac{\text{R}}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;$$
$$\text{AH} = \frac{\text{D}}{2} = \frac{\text{R}}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;$$
$$\text{BH} = \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{AH}}^2} = \sqrt{\frac{\text{R}^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) - \frac{\text{R}^2}{16}(10 + 2\sqrt{5})} =$$
$$= \frac{\text{R}}{4}\sqrt{30 - 10\sqrt{5}} = \frac{\text{R}}{4}(5 - \sqrt{5})\,;$$

$$CG=AD=\sqrt{\overline{D}^2-\overline{DC}^2}=\sqrt{\frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5})-\frac{R^2}{16}(10-2\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{R}{4}\sqrt{30+10\sqrt{5}}=\frac{R}{4}(5+\sqrt{5}).$$

Donc

$$\text{surf. P}=4\pi.R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left\{\frac{R}{4}(5-\sqrt{5})+\frac{R}{4}(5+\sqrt{5})\right\}=$$

$$=5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

4° *Hexagone* (fig. 49).

$$\text{Surf. H}=2\,(\text{surf. AB}+\text{surf. BC}+\text{surf. CD})=$$

$$=2\pi\left\{BG.AB+\overline{CG}^2-\overline{BG}^2+DC\,(DA+CG)\right\}=$$

$$=2\pi\left\{BG.AB+(CG+BG)\,(CG-CG)+DC\,(DA+CG)\right\}=$$

$$=2\pi AB\,(BG+2DA+CG)=2\pi AB.3DA=6AB.2\pi OA\;;\quad(3)$$

or $\qquad OA=AB=R,\qquad$ donc $\qquad \text{surf. H}=12\pi R^2.$

5° *Octogone* (fig. 50).

$$\text{Surf. O}=2\,(\text{surf. AB}+\text{surf. BC}+\text{surf. CD}+\text{surf. ED})=$$

$$=2\pi\left\{AB.BF+BC(BF+CG)+DC(CG+DF)+ED(DF+AE)\right\}=$$

$$=2\pi AB(2BF+2CG+2DF+AE)=2\pi AB.4AE=8AB.2\pi AO;\quad(4)$$

or $\qquad AB=R\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad OA=R\;;$

donc $\qquad \text{surf. O}=16\pi R^2\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

6° *Décagone* (fig. 51).

$$\text{Surf. D}=2(\text{surf. AB}+\text{surf. BC}+\text{surf. CD}+\text{surf. ED}+\text{surf. EF})=$$

$$=2\pi\left\{\begin{array}{r}AB.BG+BC\,(BG+CK)+\overline{DK}^2-\overline{CK}^2+ED(DK+EG)+\\ +EF\,(EG+FA)\end{array}\right\}=$$

$$=2\pi\left\{\begin{array}{r}AB.BG+BC\,(BG+CK)+(DK+CK)\,(DK-CK)+\\ +ED\,(DK+EG)+EF\,(EG+FA)\end{array}\right\}=$$

$$=2\pi AB\,(2BG+CK+DK+2EG+2FA)=$$

$$=2\pi AB\left\{2(BG+EG)+3FA\right\}=2\pi AB.5FA=10AB.2\pi AO;\quad(5)$$

or $$AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1), \quad OA = R;$$

donc $$\text{surf. D} = 10\pi R^2(\sqrt{5}-1).$$

7° *Dodécagone* (fig. 52).

$$\text{Surf. D} = 2\left(\begin{array}{r}\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. DC} + \text{surf. DE} + \\ + \text{surf. FE} + \text{surf. GF}\end{array}\right) =$$

$$= 2\pi\left\{\begin{array}{l}AB.BH + BC(BH+CK) + CD(CK+DL) + \\ + ED(DL+EK) + FE(EK+FH) + GF(FH+AG)\end{array}\right\} =$$

$$= 2\pi AB(2BH + 2CK + 2DL + 2EK + 2FH + AG) =$$

$$= 2\pi AB\,\{2(BH+FH) + 2(CK+EK) + 2DL + GA\} =$$

$$= 2\pi . AB.6GA = 12AB.2\pi OA; \qquad (6)$$

or $$AB = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \quad OA = R;$$

donc $$\text{surf. D} = 12\pi R^2(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Les expressions (1), (2), (3), (4), (5), (6), n'étant autre chose que la traduction du théorème de Guldin, on en conclut que ce théorème conduit immédiatement aux mêmes expressions que celles que nous fournit la géométrie.

Quant à la surface engendrée par le pentagone, on a, en appliquant le théorème de Guldin: surf. P $=5AB.2\pi R$; or $AB = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; donc surf. P$=5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; résultat identique à celui que nous avons trouvé.

On pourrait chercher, d'une manière analogue, les expressions de ces surfaces en fonction du côté c, ou en fonction de l'apothème r. La géométrie et le théorème de Guldin pourraient encore servir mutuellement de vérification. En cherchant, par exemple, ces surfaces en fonction de c, on trouve :

1° Triangle $\quad$ surf. T $= 2\pi c^2\sqrt{3}$;

2° Carré $\quad$ surf. C $= 4\pi c^2\sqrt{2}$;

3° Pentagone surf. P $= \pi c^2 \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$;

4° Hexagone surf. H $= 12\pi c^2$;

5° Octogone surf. O $= 8\pi c^2 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$;

6° Décagone surf. D $= 18\pi c^2 (1 + \sqrt{5})$,

7° Dodécagone surf. D $= 12\pi c^2 (\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

(La suite prochainement.)

PROBLÈME 44 (t. I, p. 519).

PAR M. FAURE (H.),
élève en spéciales.

—

Par le foyer d'une parabole on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à ce rayon ; puis sur ces deux droites comme côtés, et avec la normale au point pris sur la parabole, comme diagonale, on construit un rectangle. Quel est le lieu du sommet opposé au foyer ?

Soit M (*fig.* 53) un point du lieu cherché, ω et ρ ses coordonnées polaires, ω' et ρ' celles du point K de la parabole. Si l'on observe que la tangente en un point d'une parabole forme des angles égaux avec le rayon vecteur qui va au point de contact et l'axe focal, on aura la relation

$$\omega' - \omega = 90° - \frac{\omega'}{2},$$

d'où

$$\omega' = 60° + \frac{2\omega}{3}.$$

Dans le triangle rectangle FMK l'on a

$$\rho' = \rho \cos(\omega' - \omega)\,;$$

et puisque

$$\cos(\omega' - \omega) = \sin\frac{\omega'}{2} = \sin\left(30° + \frac{\omega}{3}\right),$$

il vient $$\rho' = \rho \sin\left(30^\circ + \frac{\omega'}{3}\right).$$

Le point K étant sur la parabole dont l'équation au foyer est $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\omega}$, l'on a $\rho' = \dfrac{p}{1 - \cos\omega'}$.

Substituant dans cette expression la valeur trouvée pour ω' et ρ', on aura pour l'équation du lieu

$$\rho \sin\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right) = \frac{p}{1 - \cos\left(60^\circ + \frac{2\omega}{3}\right)};$$

mais

$$1 - \cos\left(60^\circ + \frac{2\omega}{3}\right) = 2\sin^2\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right);$$

donc

$$\rho = \frac{p}{2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right)}.$$

Discussion. Pour $\omega = \omega'$ on trouve la même valeur de ρ que pour $\omega = 360^\circ - \omega'$; la courbe est donc partagée en deux parties symétriques par l'axe polaire. De plus, si l'on fait $\omega = \omega'$ et $\omega = 540^\circ + \omega'$, on a pour ρ deux valeurs égales et de signes contraires. Il faudra alors porter la seconde valeur de ρ dans le prolongement du rayon vecteur formant l'angle de $540^\circ + \omega'$ avec l'axe polaire, de sorte qu'on aura le point déjà obtenu $\omega = \omega'$. Par conséquent, en faisant varier ω de 540° à 1080°, on aura les points déjà obtenus en faisant varier ω depuis 0 jusqu'à 540°.

On voit encore qu'il ne sera pas nécessaire de donner à ω des valeurs supérieures à 1080°, car l'équation déterminant alors pour ρ la même valeur que quand ω était $< 1080^\circ$, la partie de courbe déterminée par ces valeurs se trouve déjà tracée. Comme d'ailleurs les valeurs négatives de ω ne sauraient fournir de nouveaux points, la courbe sera construite en faisant passer ω par les valeurs comprises entre 0 et 540°.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Pour} & \omega = 0 & \text{on a} & \rho = 4p = \mathrm{FR}, \\
& \omega = 90^\circ & & \rho = \dfrac{4p}{3\sqrt{3}} = \mathrm{FS}, \\
& \omega = 180^\circ & & \rho = \dfrac{p}{2} = \mathrm{AF}, \\
& \omega = 270^\circ & & \rho = \dfrac{4p}{3\sqrt{3}} = \mathrm{FS'}, \\
& \omega = 360^\circ & & \rho = 4p = \mathrm{FR}, \\
& \omega = 450^\circ & & \rho = \infty, \\
& \omega = 540^\circ & & \rho = -4p.
\end{array}
$$

Ainsi la courbe cherchée coupe l'axe polaire à la distance $\mathrm{OR} = 4p$; elle s'approche de plus en plus du pôle à mesure que ω augmente ; et pour $\omega = 180^\circ$, elle vient passer par le sommet A. On obtient ensuite la branche symétrique de RMA. L'angle ω continuant sa marche, à partir de 360°, ρ va en augmentant, et ce rayon devient infini pour $\omega = 450^\circ$. Les valeurs supérieures de ω donnent la branche symétrique de celle-ci.

D'après cette discussion, il semblerait que la perpendiculaire élevée par le pôle à l'axe polaire est une asymptote de la courbe ; mais il n'en est rien, ainsi qu'on va le voir.

Soit ζ la distance d'un point quelconque de la courbe à la perpendiculaire NN', on aura

$$\zeta = \rho \cos\omega = \frac{p\cos\omega}{2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right)} ;$$

et ce qu'il s'agit de trouver c'est la véritable valeur de ζ qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $\omega = 450^\circ$.

Développant le dénominateur et remplaçant $\cos\omega$ par sa valeur en fonction du tiers de l'arc, on trouve :

$$\frac{\zeta}{p}=\frac{4\cos^3\frac{\omega}{3}-3\cos\frac{\omega}{3}}{\cos^3\frac{\omega}{3}+9\sin^2\frac{\omega}{3}\cos\frac{\omega}{3}+3\sqrt{3}\sin\frac{\omega}{3}}=$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{\omega}{3}-3}{\cos^2\frac{\omega}{3}+9\sin^2\frac{\omega}{3}\,3+\sqrt{3}\operatorname{tang}\frac{\omega}{3}}.$$

On sait que

$$\sin^2\frac{\omega}{3}=\frac{\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{3}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{3}},\qquad \cos^2\frac{\omega}{3}=\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{3}};$$

posant $\operatorname{tang}\frac{\omega}{3}=x$, et remplaçant,

$$\frac{\zeta}{p}=\frac{1-3x^2}{1+3\sqrt{3}x+9x^2+3x^3\sqrt{3}}=\frac{1-3x^2}{(1+x\sqrt{3})^3}.$$

Supprimant le facteur commun $1+x\sqrt{3}$, aux deux termes de cette fraction,

$$\frac{\zeta}{p}=\frac{1-x\sqrt{3}}{(1+x\sqrt{3})^2}.$$

Ainsi c'était le facteur $1+x\sqrt{3}$ qui, en s'annulant dans l'hypothèse de $\omega=450^\circ$, masquait la vraie valeur de la fraction qui se réduit à l'infini. Donc la perpendiculaire NN′ n'est pas une asymptote de la courbe, et même nous allons voir que cette courbe n'a aucune asymptote. Pour y parvenir, cherchons le coefficient angulaire de la tangente, qui nous servira aussi à mener des tangentes aux points remarquables de la courbe. On a, comme on sait, $\operatorname{tang} M=\rho\lim\frac{h}{k}$, et la sous-tangente polaire $S=\rho^2\lim\frac{h}{k}$.

Il s'agit de déterminer la limite de $\frac{h}{k}$.

On a

$$\rho = \frac{p}{2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right)} \quad \text{et} \quad \rho + k = \frac{p}{2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega+h}{3}\right)},$$

équation que l'on peut transformer ainsi :

$$\rho = \frac{p}{3\sin\left(\frac{90^\circ+\omega+h}{3}\right) - \cos\omega}, \quad \rho+k = \frac{p}{3\sin\left(\frac{90^\circ+\omega+h}{3}\right) - \cos(\omega+h)}$$

puis, après avoir renversé les deux membres de ces équations, je les retranche et je trouve

$$-\frac{k}{\rho(\rho+k)} = \frac{3\left[\sin\left(\frac{90^\circ+\omega+h}{3}\right) - \sin\left(\frac{90^\circ+\omega}{3}\right)\right] + \cos\omega - \cos(\omega+h)}{2p}$$

$$= \frac{3\cos\left(\frac{180^\circ + 2\omega + h}{6}\right) + \sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{p},$$

d'après les formules connues de trigonométrie; puis :

$$-\frac{k}{\rho(\rho+k)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{h}{6}\left[3\cos\left(\frac{180^\circ+2\omega+h}{3}\right) + 3h\left(\omega+\frac{h}{2}\right) + 4\sin^2\frac{h}{6}\sin\left(\omega+\frac{h}{3}\right)\right]}{p};$$

d'où

$$-\frac{6}{\rho(\rho+k)}\cdot\frac{k}{h} =$$

$$= \frac{\sin\frac{h}{6}}{\frac{p}{6}} \times \frac{3\cos\frac{180^\circ+2\omega+h}{3} + 3\cos\left(\omega+\frac{h}{3}\right) - 4\sin^2\frac{h}{6}\sin\left(\omega+\frac{h}{2}\right)}{p},$$

passant à la limite, on trouvera

$$\lim.\ \frac{h}{k} = -\frac{2p}{\rho^2\left[\cos\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right) + \sin\omega\right]},$$

par conséquent

$$\text{tang } M = -\frac{2p}{\rho\left[\cos\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right) + \sin\omega\right]},$$

et

$$S = -\frac{2p}{\cos\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right) + \sin\omega}.$$

Pour avoir les asymptotes il faut trouver ce que devient la valeur de S lorsque $\rho=\infty$. Alors $\omega=450^\circ$, partant $S=\infty$; puis donc que S n'a pas de limite, la courbe ne peut avoir d'asymptote.

La considération des tangentes va nous permettre de tracer la courbe plus exactement;

pour $\omega = 0$ on a $S = -\frac{4p}{\sqrt{3}}$,

$\omega = 360$ $S = \frac{4p}{\sqrt{3}}$.

Si donc, à partir du point F, on prend les deux distances FN, FN′ triples de FS, en joignant le point R aux points N, N′, on aura la direction des tangentes au point R. La tangente en A est perpendiculaire à l'axe, par conséquent cette tangente se confond avec celle qui est menée au même point à la parabole.

Si l'on résout l'équation

$$1 - \cos\omega = 2\sin^3\left(30^\circ + \frac{\omega}{3}\right),$$

on verra qu'elle ne donne que la seule valeur réelle $\omega=180^\circ$; ce qui prouve que la courbe ne rencontre la parabole qu'au point A seulement.

Note. Cette belle discussion peut s'abréger en adoptant la formule donnée par M. Rispal (tome II, p. 512). Tm.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU RAPPORT $\frac{a^p}{b^p}$.

PAR M. A. PEYRONNY,
Élève interne du collége Saint-Louis. (Classe de M. Vincent)

Il arrive quelquefois que dans certaines constructions géométriques, on est conduit à déterminer deux lignes dont le rapport soit égal à une puissance quelconque du rapport de deux autres lignes, et on y parvient toujours au moyen de troisièmes, et de quatrièmes proportionnelles successives. Je me propose d'exposer ici une méthode plus simple, et qui a surtout l'avantage de représenter par la figure elle-même, la suite de toutes les opérations.

Soient a et b les deux lignes données, p la puissance entière et positive, à laquelle on suppose élevé le rapport de ces deux lignes. Il s'agit de déterminer deux droites m et n, telles que l'on ait $\frac{m}{n} = \frac{a^p}{b^p}$.

1. On connaît la construction à effectuer, lorsque p est une puissance exacte de 2.

Il faut construire un triangle rectangle ayant a et b pour côtés, comprenant l'angle droit : abaisser du sommet une perpendiculaire sur l'hypoténuse, puis rabattre sur cette perpendiculaire l'un des deux segments de l'hypoténuse ; répéter sur le triangle rectangle ayant pour côtés ces deux segments, l'opération que l'on vient d'effectuer sur le premier et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on ait abaissé autant de perpendiculaires que p contient de fois la puissance de 2. Alors le rapport des deux derniers segments est le rapport cherché.

2. **Considérons maintenant le cas où p est un nombre impair.**

Je vais déterminer le rapport $\frac{m}{n} = \frac{a^p}{b^p}$, au moyen de deux lignes m'' et n'', dont je supposerai le rapport égal à $\frac{a^{p-2}}{b^{p-2}}$.

Je prends deux droites rectangulaires, *fig.* 54, et sur ces deux droites je porte à partir de leur point d'intersection, deux longueurs OA et OB respectivement égales à a et à b; puis deux autres lignes OM et ON égales, l'une à m'', et l'autre à n''. Je mène ensuite par les points M et N, les droites MM′ et NN′ parallèles à AB.

Les deux triangles OMM′ et ONN′ sont semblables et donnent

$$\mathrm{OM'} = \mathrm{OM}\frac{a}{b}, \ \mathrm{ON'} = \mathrm{ON}\ \frac{b}{a};$$

d'où
$$\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{ON'}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^{p-2}}{b^{p-2}} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^p}{b^p},$$

et $\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{ON'}}$ est le rapport cherché $\frac{m}{n}$.

On aurait pu donner aux droites OM et ON (OM par ex.), des positions différentes par rapport aux axes, telles que $\mathrm{OM_1}$, $\mathrm{OM_2}$, $\mathrm{OM_3}$, alors la droite $\mathrm{MM_1}$, aurait pris l'une des positions $\mathrm{M_1M_1'}$, $\mathrm{M_2M_2'}$, $\mathrm{M_3M_3'}$, la seconde étant parallèle à AB, et les deux autres étant perpendiculaires à cette ligne. Il est évident, qu'en supposant égales entre elles les lignes OM, $\mathrm{OM_1}$, $\mathrm{OM_2}$, $\mathrm{OM_3}$, il en serait de même des lignes OM′, $\mathrm{OM'_1}$, $\mathrm{OM'_2}$, $\mathrm{OM'_3}$; et que l'on aura

$$\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{ON'}} = \frac{\mathrm{OM'_1}}{\mathrm{ON'}} = \frac{\mathrm{OM'_2}}{\mathrm{ON'}} = \frac{\mathrm{OM'_3}}{\mathrm{ON'}} = \frac{a^p}{b^p}.$$

Supposons que l'on ait $p = 3$, alors le rapport $\frac{m''}{n''}$ n'est autre chose que le rapport $\frac{a}{b}$, et les deux lignes OM et ON peuvent être représentées par OA et OB. On voit alors, que si nous menons les droites AA_1 et BB_1, perpendiculairement à AB, nous aurons $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{a^3}{b^3}$.

De même $\frac{OA_1}{OB_1}$ représentant le rapport $\frac{m''}{n''}$, dans le cas où l'on suppose $p = 5$, on aura en menant les lignes A_1A_2, B_1B_2 parallèlement à AB, $\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{a^5}{b^5}$.

Et continuant ainsi à tracer les lignes A_2A_3, A_3A_4... B_2B_3, B_3B_4..., successivement perpendiculaires et parallèles à AB, on obtiendra les différentes valeurs de toutes les puissances impaires du rapport $\frac{a}{b}$.

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{a^3}{b^3},\ \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{a^5}{b^5},\ \frac{OA_3}{OB_3} = \frac{a^7}{b^7},\ \frac{OA_4}{OB_4} = \frac{a^9}{b^9}\ldots,\ \text{etc.}$$

3. Les deux modes de construction que je viens d'exposer nous permettent de déterminer le rapport $\frac{a^p}{b^p}$ quel que soit p. Car p pouvant contenir le facteur 2 à une certaine puissance k, on aura $p = p'.2^k$, p' étant un nombre impair, et par suite $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a^{2k}}{b^{2k}}\right)^{p'}$. La première méthode nous fait connaître le rapport $\frac{m'}{n'} = \frac{a^{2k}}{b^{2k}}$, et la seconde le rapport

$$\frac{m}{n} = \frac{m'^{p'}}{n'^{p'}} = \frac{a^{p'.2k}}{b^{p'.2k}} = \frac{a^p}{b^p}.$$

4. Au lieu de construire $\frac{a^{p'}}{b^{p'}}$, en passant par toutes les puissances impaires moindres que p', il est préférable de

décomposer p' en ses facteurs premiers α, β, γ,... et de construire successivement

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1{}^\beta}{n_1{}^\beta}=\frac{a^{\alpha\beta}}{b^{\alpha\beta}},\quad \frac{m_3}{n_3}=\frac{m_2{}^\gamma}{n_3{}^\gamma}=\frac{a^{\alpha\beta\gamma}}{b^{\alpha\beta\gamma}},$$

et ainsi de suite ; α, β, γ... sont tous des nombres premiers, mais plusieurs peuvent être égaux entre eux.

Il peut arriver que les facteurs premiers de p' soient des nombres assez grands, mais qu'il n'en soit pas de même du nombre p' diminué d'un nombre pair $2.c$. Alors il faudra construire le rapport $\frac{a^{p'-2c}}{p^{p'-2c}}$, on déterminera ensuite le rapport $\frac{a^{p'-2(c-1)}}{p^{p'-2(c-1)}}$, puis $\frac{a^{p'-2(c-1)}}{b^{p'-2(c-1)}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\frac{a^{p'}}{b^{p'}}$.

Nous remarquerons que dans le second mode d'opérations les lignes qui expriment le rapport cherché, vont l'une en augmentant, et l'autre en diminuant, et que l'avantage de la précision est ainsi uni à celui de pouvoir effectuer toutes les opérations sur une portion de surface plane peu étendue.

CONSTRUCTION DES FORMULES, $\sin(a\pm b)$, $\cos(a\pm b)$.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur des colléges royaux.

Les formules qui donnent les sinus et cosinus des sommes ou des différences de deux arcs en fonction des sinus et cosinus de ces arcs, ne sont prouvées dans la plupart des ouvrages élémentaires qu'au moyen de constructions et de démonstrations qui sont assez compliquées.

Les élèves nous sauront peut-être gré de leur faire connaître celles qui suivent, recueillies dans un des examens pour l'École polytechnique, à Paris, et qui, par leur simplicité, me paraissent pouvoir être substituées avec avantage aux solutions connues.

Soient AB, *fig.* 55, le diamètre d'un cercle, et ACBD un quadrilatère inscrit. Prenons le rayon de ce cercle pour celui des lignes trigonométriques, ou pour unité, faisons l'arc $BC = 2a$ et $BD = 2b$.

Alors les cordes BC, BD seront égales, la première à $2\sin a$, la seconde à $2\sin b$, et les cordes AC et AB à $2\cos a$ et $2\cos b$; par suite l'on aura

$$\text{corde } CD = 2\sin(a+b).$$

Donc, en s'appuyant sur le principe connu que le produit des deux diagonales du quadrilatère est égal à la somme des produits des côtés opposés, l'on aura

$$2 \times 2\sin(a+b) = 2\sin a \times 2\cos b + 2\cos a \times 2\sin b,$$

et par suite

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

En vertu du même principe, les *fig.* (56), (57) et (58), dans la dernière desquelles on suppose $CI = BD$, donneront sans peine les trois autres relations connues;

$$\sin(a-c) = \text{etc.}$$

Note. Le théorème sur le quadrilatère inscrit et la formule des cordes se trouvent pour la première fois dans l'Almegeste de Ptolémée (liv. I, ch. IX). Carnot s'est appuyé indirectement sur ce théorème pour démontrer les formules trigonométriques (*Géom. de position*, p. 155). Ce sont celles qu'on vient de lire; nous rappellerons une autre démonstration consignée dans *le Géomètre* (p. 161).

1° On a les deux identités

$$\sin(2^q - A) = \sin A, \qquad \cos(2^q - A) = -\cos A;$$

2° Soit un triangle ABC et Aa, Bb, Cc les trois hauteurs; on a l'équation évidente $AC.Bb = Aa.Ba + Aa.aC$, et de là

$$\frac{Bb}{AB} = \frac{Aa.Ba}{AC.AB} + \frac{Aa}{AB}\cdot\frac{aC}{AC},$$

ou bien $\sin A = \sin(B+C) = \sin C \cos B + \sin B \cos C$;

3° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; elle passe par les points b et c, et coupe la hauteur Aa en un point O; on a, par la propriété des sécantes,

$$Ab.AC = \overline{Aa}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{Aa}^2 - Ba.aC;$$

d'où

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Aa}{AB}\cdot\frac{Aa}{AC} - \frac{Ba}{AB}\cdot\frac{aC}{AC},$$

ou bien $\cos A = -\cos(B+C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$;

4° Soit A′ l'angle adjacent et supplémentaire à A, on a $\sin B = \sin A \cos C + \sin C \cos A$, $\sin A = \sin A'$, $\cos A = -\cos A'$, donc $\sin B = \sin(A' - C) = \sin A' \cos C - \sin C \cos A'$;

5° $\cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C$, donc

$$\cos B = \cos(A' - C) = \sin A' \sin C + \cos A' \cos C.$$

(Voir tome II, p. 309.) Tm.

QUESTIONS PROPOSÉES.

87. Si on multiplie 142857 (multiplicande), par 326451 (multiplicateur), tous les chiffres d'une même colonne verticale dans les produits partiels sont égaux; trouver d'autres nombres jouissant de la même propriété.

88. Trois circonférences étant tracées sur un même plan, on propose de trouver sur ces circonférences, *en ne faisant usage que du compas*, trois points qui soient les sommets d'un triangle équilatéral.

89. Soit $F(x)$ une fonction entière en x; a, b deux nombres *positifs* et $b > a$; si $\frac{F'(a)}{F'(b)} > 0$ et $\frac{F(b) - F(a)}{F'(a)} < 0$, il y aura *au moins* deux racines de $F'(x)$ comprises entre a et b.

Ces questions sont proposées par M. E. Prouhet, professeur au collége d'Auch (voir t. I, p. 438).

GRAND CONCOURS DE 1844 (*V*. t. II, p. 374).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés une ellipse et un point A sur la circonférence, on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point, et l'on mène au cercle et à l'ellipse, les deux tangentes communes, autres que celles qui toucheraient les deux courbes au point donné A.

On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux tangentes, quand on fait varier le rayon du cercle.

Nota. Si on représente l'ellipse par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on pourra si l'on veut exprimer les coordonnées du point A en fonction d'une seule constante φ de cette manière :

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi.$$

Mathématiques élémentaires.

Pour un point O pris sur le prolongement d'un diamètre BA d'un cercle, on mène une sécante quelconque qui rencontre le cercle en deux points m et m', et de ces points on mène au centre C, deux rayons mC, m'C.

Prouver que le produit des tang $\frac{1}{2}$MCA par tang $\frac{1}{2}$M'CA est constant, quelle que soit la direction de la sécante.

Nous donnerons incessamment la solution couronnée de la belle question *spéciale*, qui renferme une propriété importante, récemment découverte, des coniques bi-confocales. Voilà enfin un sujet de concours, digne de l'Académie de Paris.

Tm.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE,

par EUGÈNE CATALAN, répétiteur à l'École polytechnique, etc. 1843, 1-8, XLV, 310 pages; 17 planches (*).

—

Quel est le point de perfection que doit se proposer l'auteur d'un traité élémentaire de géométrie ? Son ouvrage s'annonce comme une transition entre les idées premières, dont le fonds est commun à tous les esprits, et les profondes conceptions dont les génies les plus élevés ont construit peu à peu l'admirable édifice de la science. Sa tâche est de combler l'intervalle en ménageant toutes les liaisons, d'établir les voies les plus directes, les mieux affermies qu'il est possible en répandant partout la clarté d'une évidence complète. Il accepte un cadre donné embrassant essentiellement une certaine somme de connaissances, une collection de théorèmes d'une importance reconnue. Le mérite est d'en former un ensemble logique où tout s'harmonise, où les choses se groupent naturellement, où l'esprit puisse embrasser sans effort le chemin qu'il a parcouru. L'élève dont on veut développer les idées qui seront la base de son instruction ultérieure, réclame à la fois un fonds solide et la méthode la plus propre à étendre ce fonds et à le faire valoir.

Si tout le monde est à cet égard d'accord en principe, l'application offre des difficultés. Le grand nombre de traités qui ont paru jusqu'ici témoigne des efforts nombreux qui ont été faits, et des différences qui peuvent exister sur la manière d'envisager la question. Quel doit être d'abord le

(*) Chez Bachelier, imprimeur-libraire. Les planches sont gravées par E. Wormser.

point de départ ? où doit s'arrêter l'axiome pour faire place au théorème ? les règles de la rigueur géométrique ne sont pas uniformément tranchées pour tous les esprits, et l'auteur d'un traité élémentaire, en butte aux critiques les plus opposées, se trouve entre des écueils également à craindre, et que, de l'avis général, des livres justement célèbres n'ont pas évités.

L'ouvrage que nous avons en vue d'analyser, paraît le résultat de réflexions approfondies à ces divers égards. On y remarque une rédaction nette, une grande précision dans les termes, et un enchaînement naturel entre les propositions. Une tradition respectée depuis Euclide, a consacré en quelque sorte la géométrie élémentaire à la méthode synthétique ; c'est là que cette méthode se présente sous son jour le plus favorable ; une légère induction suffisant le plus souvent pour conduire d'une vérité à la découverte d'une autre, et le principal intérêt consistant à régulariser les résultats de la manière la plus simple. En se conformant aux habitudes de l'enseignement, l'auteur n'a pas refusé le concours de l'analyse lorsque son emploi s'offrait naturellement ; on ne saurait en effet trop tôt s'initier avec cette méthode qui acquiert une si grande importance dans les parties élevées de la science, où son rôle a été si brillant depuis deux siècles. Un grand nombre de questions choisies servent aussi d'aliment à cette méthode d'invention, en même temps qu'elles forment, comme application, un complément nécessaire des théories développées dans l'ouvrage. La considération des limites remplace partout la réduction à l'absurde, aujourd'hui généralement repoussée.

L'ouvrage est partagé en huit livres qui correspondent exactement et dans le même ordre à ceux de la Géométrie de Legendre. En sacrifiant peut-être ses propres idées sur le classement général des matières, il est évident que l'auteur a voulu s'adresser plus immédiatement à la grande majorité des élèves déjà familiarisés avec le plan du traité, qui depuis longtemps sert de base à l'enseignement classique. Tout en reproduisant le cadre adopté par notre célèbre géomètre, il a cherché à y introduire les modifications, les additions nombreuses dont la nécessité est reconnue.

Il laisse avec raison de côté, les dénominations vagues des trois dimensions de l'étendue ; partant des idées acquises relativement aux corps matériels, il suffit de définir les *surfaces* comme limites des corps, les *lignes* comme limites ou intersections des surfaces, les *points* comme limites ou intersections des lignes. Les corps, les surfaces, les lignes se nomment *figures* ; la *géométrie* est la science des figures.

Après avoir posé ces définitions qui nous paraissent très-convenables, l'auteur admet la notion de la ligne droite comme une idée première acquise par l'expérience, et qui se refuse à être définie. C'est en effet le terme le plus simple que notre esprit aperçoive dans le cercle des idées relatives aux grandeurs, et à ce titre il sert lui-même d'élément à la plupart de ces idées. Les notions primitives sur la ligne droite sont traduites en demandes qu'il est essentiel d'admettre, et sur lesquelles en effet il ne peut s'élever aucun doute.

La définition du *plan* telle qu'on la trouve ici, et dans tous les traités élémentaires, reproduit assez bien l'idée que nous avons de cette surface la plus simple de toutes. Cependant, comme il importe de restreindre autant que possible le nombre nécessaire des notions primitives, il conviendrait sans doute en posant cette définition de la présenter d'abord comme anticipée, et d'établir plus tard qu'elle appartient réellement à une surface engendrée suivant une certaine loi. Cette remarque a déjà été faite depuis longtemps par M. Duhamel (*Problèmes et développements sur diverses* *parties des mathématiques*, par MM. Reynaud et Duhamel).

Il paraît très-difficile de trouver une définition convenable de *l'angle*. Ce mot ou ceux d'écartement, d'inclinaison, réveillent une idée simple et précise résultant immédiatement de l'inspection de deux droites qui se coupent; ils fixent pour notre esprit la position actuelle de ces deux lignes, l'une par rapport à l'autre. Les mots *espace infini compris entre deux droites* ne peuvent rendre cette idée qui est indépendante de la considération insaisissable de l'infini. Si l'auteur adopte cette définition à l'exemple de beaucoup d'autres ouvrages, il avertit que c'est faute d'une meilleure; mais, ainsi que le dit Lacroix dans l'Essai sur l'enseignement, est-il indispensable de définir l'angle? ne suffit-il pas de le montrer?

Le premier livre, comparé à celui de Legendre, offre d'abord comme addition, divers théorèmes sur les longueurs relatives des lignes droites et brisées, sur les bissectrices des angles, etc., propositions d'une importance reconnue. Mais la principale différence ne pouvait manquer d'avoir rapport à la théorie des parallèles qu'il fallait refaire entièrement. Cette théorie, comme l'on sait, est le désespoir de la géométrie élémentaire; de quelque manière qu'on l'ait retournée, il reste toujours une lacune entre les propositions qui s'y rattachent, et celles qu'une logique sévère a fondées sur les premiers axiomes. L'auteur a cru devoir franchir l'intervalle, en faisant intervenir littéralement sa définition de l'angle, c'est-à-dire qu'il a employé la considération d'espaces infinis de différentes grandeurs. Toutes les démonstrations proposées jusqu'ici roulent en général sur ce même fonds; elles commencent, je crois, à être peu goûtées aujourd'hui, et l'infini est regardé comme d'autant moins abordable à la géométrie élémentaire, que l'esprit de précision de notre époque le bannit même des hautes parties de la science, où son intervention fut signalée par de si belles découvertes. Le mieux n'est-il pas d'accepter sans détour l'imperfection de la théorie des parallèles, et de la baser sur quelque demande aussi facile à accorder, que celles qui sont relatives aux notions de la ligne droite, et qui soit elle-même comme une suite nécessaire de ces notions. Au reste rien n'empêcherait, dans l'ouvrage que nous analysons, d'ériger en postulatum la première proposition de cette théorie, ce qui reviendrait à passer par-dessus une démonstration de quelques lignes, sans autres modifications.

Tous les théorèmes relatifs aux triangles, aux parallélogrammes, aux trapèzes, aux polygones quelconques dont les énoncés appartiennent au premier livre, ont été réunis sans interruption à la fin de celui-ci. L'ensemble ne peut qu'y gagner.

Si nous comparons encore le second livre à celui de Legendre, les principales différences portent d'abord sur les contacts et les intersections des cercles, qui en effet avaient besoin d'être présentés d'une manière plus satisfaisante. La mesure des angles est complétée; le cas des angles incommensurables, est traité par la méthode des limites, qui se présentent ici pour la première fois, et sert à définir nettement ce qu'on doit entendre par le rapport de quantités incommensurables. Ce livre est terminé par les théorèmes sur les polygones inscriptibles et circonscriptibles.

Viennent ensuite les problèmes qui se rapportent aux deux premiers livres, et qui offrent un ensemble très-complet.

Le troisième livre commence par la théorie des lignes proportionnelles présentée ainsi indépendamment des théorèmes sur la mesure des surfaces : cette séparation se commandait d'elle-même. De là découlent toutes les propositions sur la similitude des polygones, sur la proportionnalité des lignes homologues. Le théorème sur les bissectrices d'un angle d'un triangle et de l'angle supplémentaire, donne lieu à la division harmonique dont il serait sans doute à désirer que les propriétés les plus simples fussent du domaine de l'enseignement élémentaire. Le théorème sur le concours des médianes conduit à la considération si importante du centre des moyennes distances de trois points.

La mesure des aires des polygones et les théorèmes qui s'y rattachent forment la dernière moitié du troisième livre. Outre les propositions données dans Legendre, on y trouve le théorème sur la somme des carrés des côtés d'un quadrilatère, l'expression en fonctions des côtés de l'aire du triangle et du quadrilatère inscrit.

Parmi les problèmes placés à la fin de ce livre, citons le partage d'un trapèze par des parallèles à la base en parties proportionnelles à des nombres donnés; la construction d'un quadrilatère inscriptible de côtés donnés; quelques problèmes sur la construction d'un cercle tangent à des droites ou à des cercles donnés.

Dans le quatrième livre, relatif aux polygones réguliers et à la mesure du cercle, on remarque les expressions du côté et de l'aire en fonction du rayon pour chacun des polygones inscrits dont la construction peut s'exécuter géométriquement, et un ensemble assez complet de toutes les autres formules auxquelles peuvent donner lieu les polygones réguliers.

La transition des polygones aux figures terminées par des courbes donne lieu à une observation importante. D'accord avec l'esprit actuel de l'enseignement, avec la marche naturelle des idées, l'auteur effectue cette transition simplement en considérant ces dernières figures comme les limites vers lesquelles tendent les polygones à mesure que le nombre de leurs côtés augmente; mais peut-être trouvera-t-on qu'il a été trop loin en introduisant l'idée de limite dans les définitions mêmes. Ainsi, en se conformant aux définitions présentées jusqu'ici dans tous les ouvrages élémentaires, l'aire d'une figure curviligne ne peut-elle pas être conçue comme une portion limitée de plan sans que cette idée exige nécessairement celle de polygones dont les côtés deviennent de plus en plus nombreux? Cette observation se présente de même dans le sixième livre à l'égard des corps terminés par des surfaces courbes. Dans tous les cas l'esprit isole de l'idée de forme, celle d'espace qui en est essentiellement distincte. Toutefois, relativement aux longueurs des lignes, aux aires des surfaces, on ne peut s'empêcher de reconnaître que l'idée de limites se présente plus nécessairement pour la transition des lignes droites aux lignes courbes, des surfaces planes aux surfaces courbes; aussi l'expression de longueur ne semble-t-elle pas offrir le même sens pour des lignes non superposables, de même que celle de superficie pour les surfaces qui ne peuvent s'appliquer exactement les unes sur les autres.

Le rapport de la circonférence au diamètre est obtenue par la méthode la plus simple, savoir, la méthode des isopérimètres; mais des formules données précédemment sur les polygones réguliers, on déduit de même immédiatement les autres méthodes élémentaires.

D ns un appendice au quatrième livre, on trouve une démonstration très-simple de ce théorème, que le cercle est plus grand que toute autre figure plane de même périmètre (*); il contient aussi plusieurs questions d'exercices sur les polygones réguliers.

(*) Cette démonstration est extraite d'un beau mémoire de M. Steiner, inséré dans le Journal de Mathématiques de M. Liouville, 1841. On peut en voir d'autres d'une grande simplicité qui s'étendent également aux surfaces sphériques, dans le tome 2e des Nouvelles annales de Mathématiques, page 480.

Le cinquième livre sur les plans et les angles polyèdres, nous paraît parfaitement remplir le cadre qu'il embrasse. Il forme une introduction aussi complète qu'on peut le désirer pour la Géométrie descriptive. On y trouve les théorèmes sur le quadrilatère gauche, sur la plus courte distance de deux droites, sur les angles trièdres supplémentaires et sur tous les cas de l'égalité des angles trièdres.

Dans le sixième livre, relatif aux polyèdres, on remarque le théorème d'Euler sur le nombre des côtés des faces et des sommets d'un polyèdre quelconque, ceux qui sont relatifs au nombre des faces d'un nombre impair de côtés, etc., à la somme des angles plans. L'égalité de volume des tétraèdres, de même hauteur et de bases équivalentes est démontrée en considérant ces tétraèdres comme les limites des prismes intérieurs formées sur des sections parallèles aux bases. On pourrait regretter de ne pas trouver aussi la belle démonstration de ce théorème, telle qu'elle est dans Legendre, indépendamment de la considération des limites. L'égalité des polyèdres de faces égales, démontrée par M. Cauchy, forme un des plus beaux théorèmes de la géométrie; son absence laisse dans cet ouvrage, comme dans tous ceux qu'on a publiés jusqu'ici, une lacune qu'il serait à désirer de voir combler.

Plusieurs problèmes importants sont traités à la fin de ce livre, particulièrement la recherche de la hauteur d'un tétraèdre de côtés donnés, le partage d'un tronc de pyramide en parties proportionnelles à des nombres donnés par des plans parallèles aux bases, l'expression du volume du rhomboèdre, du dodécaèdre rhomboïdal en fonction du côté.

Dans le septième livre, nous remarquerons les théorèmes sur la sphère inscrite ou circonscrite à un tétraèdre, à un polyèdre régulier; la construction des cinq polyèdres réguliers.

Un appendice à ce livre traite des figures symétriques, par rapport à un point, à une droite ou à un plan. Il contient aussi diverses questions sur la sphère et les polyèdres réguliers; nous indiquerons les suivantes : Trouver le rayon d'une sphère solide, construction d'un quadrilatère sphérique inscriptible de côtés donnés, lieu des sommets des triangles sphériques de même base et de même surface, expressions des rayons de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite à chacun des cinq polyèdres réguliers, expressions des aires et des volumes de chacun de ces polyèdres en fonction du rayon de la sphère circonscrite.

Relativement au huitième livre nous parlerons seulement de l'appendice qui le termine. Entre plusieurs problèmes d'exercice sur les corps ronds, on y trouve cette proposition importante, que parmi tous les corps de même surface, la sphère est celui du plus grand volume. La démonstration de cette proposition paraît pour la première fois dans un traité de géométrie.

On ne peut qu'applaudir aux efforts du jeune auteur pour compléter les éléments d'une science qu'il expose avec tant de clarté et de rigueur ; il aurait été à désirer que l'on eût joint le théorème de Cauchy sur les polyèdres, qui remplit enfin une si ancienne lacune.

La table des matières placée en tête du volume, renferme les énoncés de tous les théorèmes, de tous les problèmes ; ce qui facilite non-seulement les recherches mais encore les moyens d'étude ; les élèves peuvent repasser à vue, et ce tableau synoptique fait voir le développement de l'arbre de la science, depuis le germe initial jusqu'aux rameaux, les plus élevés de la tige.

En résumé, malgré quelques moyens de démonstration que nous nous sommes permis de critiquer, sauf quelques définitions entachées de puritanisme, nous croyons que l'ouvrage élémentaire de M. Catalan, déjà avantageusement connu par des travaux plus relevés, occupera une place honorable dans la littérature géométrique.

THIBAULT.

Licencié ès sciences, professeur de mathématiques.

NOTE

sur les conditions de réalité des racines de l'équation générale du quatrième degré.

PAR M. DESBOVES,
professeur à Mâcon.

—

Quand on cherche les conditions de réalité des racines de l'équation générale du 4^e degré, en se servant de l'équation aux carrés des différences, ou du théorème de M. Sturm, on est conduit à des calculs assez longs. Mais nous allons faire voir dans cette note qu'on peut, sans recourir à ces deux méthodes, déterminer les conditions de réalité d'une manière très-simple. L'équation générale du 4^e degré peut toujours être mise sous la forme

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0\,;$$

et si l'on désigne par $x^2 + px + q$ un facteur quelconque du second degré du premier membre, on trouve très-facilement pour l'équation qui détermine p,

$$p^6 + 2Qp^4 + (Q^2 - 4S)p^2 - R^2 = 0.$$

En posant $z = p^2$, on a

$$z^3 + 2Qz^2 + (Q^2 - 4S)z - R^2 = 0,$$

et les racines de l'équation en z sont les carrés des sommes des racines de l'équation proposée prises deux à deux.

Il est évident, d'abord, que si les racines de l'équation proposée sont réelles, l'équation en z a toutes ses racines réelles et positives, et par conséquent qu'elle est complète et n'a que des variations. Nous allons faire voir maintenant que réciproquement, si les conditions de réalité des racines de l'équation en z sont remplies, et que cette équation ne présente que des variations, l'équation proposée aura toutes ses racines réelles. En effet, lorsque les conditions précédentes sont remplies, toutes les racines de l'équation en z sont positives, et nous allons voir que cela ne peut arriver qu'autant que toutes les racines de l'équation du 4[e] degré sont réelles.

Si les racines de l'équation du 4[e] degré ne sont pas toutes réelles, il pourra se présenter deux cas : ou bien les quatre racines seront imaginaires, ou bien il y en aura deux réelles et deux imaginaires.

Si les quatre racines sont imaginaires, on voit, en se rappelant que leur somme est égale à zéro, qu'elles seront $a \pm b\sqrt{-1}$, $-a \pm b'\sqrt{-1}$, et que par suite les racines de l'équation en z seront $4a^2$, $-(b+b')^2$, $-(b-b')^2$. Il y aura donc des racines négatives dans l'équation en z, les quantités $b+b'$, $b-b'$ ne pouvant être nulles en même temps, puisqu'on en concluerait $b=0$, $b'=0$, ce qui est contre l'hypothèse (*).

Si deux racines sont imaginaires et les deux autre réelles; en ajoutant une racine réelle à une racine imaginaire, on aura toujours une quantité imaginaire, et en l'élevant au carré, on aura une quantité imaginaire ou une quantité négative. Ce dernier cas arrivant seulement lorsque la racine

(*) On peut même dire qu'aucune racine n'est nulle dans l'équation en z, si on suppose R différent de zéro. Or c'est ce qu'on peut toujours supposer ici, le cas de $R=0$ pouvant être traité directement.

réelle est égale et de signe contraire à la partie réelle de la racine imaginaire (*).

On peut donc conclure de ce qui précède, que c'est seulement dans le cas où l'équation du 4e degré a toutes ses racines réelles, que l'équation en z a toutes ses racines *réelles* et *positives*.

Remarquons que nous n'avons pas dû ici, comme on le fait pour l'équation aux carrés des différences, nous borner à la seule condition que l'équation en z n'eût que des variations. De ce que l'équation en z est complète et n'a que des variations, on en conclut bien, il est vrai, que cette équation n'a pas de racine négative; mais il ne résulte pas de là, comme dans le cas de l'équation aux carrés des différences, qu'il n'y a pas de racines imaginaires dans l'équation proposée. Ainsi, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, il est évident que dans le cas où il y a dans la proposée deux racines réelles et deux imaginaires, il arrivera généralement que l'équation en z aura une racine positive et deux racines imaginaires.

La condition que l'équation en z n'ait que des variations donne immédiatement

$$Q < 0, \quad Q^2 - 4S > 0.$$

On exprimera ensuite que l'équation en z a ses racines réelles, en la trausformant en $z'^3 + Az' + B = 0$ et appliquant à cette équation la condition connue $4A^3 + 27B^2 < 0$.

B et A sont, comme on sait, les résultats de la substitution de $-\frac{2}{3}Q$ dans le premier membre de l'équation en z et dans sa dérivée. En faisant ces substitutions, on trouve

(*) La somme des racines étant égale à zéro, il faut pour qu'une racine réelle puisse satisfaire à la condition précédente, qu'il y ait deux racines réelles égales dans l'équation du 4e degré.

$$4\left(\frac{1}{3}Q^2+4S\right)^3-27\left(\frac{-2}{27}Q^3+\frac{8}{3}QS-R^2\right)^2>0\,;$$

et en développant,

$$4^4S^3+4^2SQ^4-2^3.4^2S^2Q^2-3^3R^4-4R^2Q^3+3^2\times4^2QSR^2>0.$$

Cette inégalité et les deux précédentes sont aussi celles que Lagrange a déduites du calcul de l'équation aux carrés des différences. (Rés. des éq. num., p. 48, 1808.)

Note. Nous croyons utile de consigner ici les fonctions *sturmiennes* (*) pour l'équation complète du quatrième degré, telles qu'elles ont été calculées par M. Midy (Du théorème de M. Sturm, p. 27, 1836).

$$X=x^4+px^3+qx^2+rx+s\,,\quad X_1=4x^3+3px^2+2qx+r.$$

Faisons

$$3p^2-8q=A\,;\ pq-6r=B\,;\ pr-16s=C\,;\ 9p^3-32pq+48r=D,$$

on aura

$$X_2=Ax^2+2Bx+C\,;\ X_3=[4AC+2BD-2qA^2]x+CD-A^2r,$$

ou $\quad X_3=Mx+N\,;\ X_4=N[2MB-3AN]-CM^2.$

Lorsque $p=0$, on a

$$A=-8q\,;\quad B=-6r\,;\quad C=-16s\,;\quad D=48r\,;$$

$$M=64[8qs-9r^2-2q^3]\,;\ N=-64r(48s+q^2)\,;$$

$$X_4=2^7.3r^2(8qs-9r^2-2q^3)(48s+q^2)+3.2^9.qr^2(48s+q^2)^2+$$
$$+2^{10}.s(8qs-9r^2-2q^3)^2.$$

D'après la théorie connue, A doit être positif, M négatif, et X_4 positif. Ainsi $q<0$.

Faisons $-q=q'$, alors on aura

$$2q'^3<8q's+9r^2\,;\ \text{ou}\ q'^2<4s+\frac{9r^2}{2q'}\ \text{et}\ X_4>0.$$

Ces inégalités de condition ne sont pas les mêmes que celles que donne l'équation aux carrés des différences. Cette diversité n'est-elle qu'apparente? Tm.

(*) Nous hasardons cette expression ; on dit bien, les nombres Bernoulliens.

SOLUTION DU PROBLÈME 40 (T. I, p. 395).

PAR M. GEORGES RITT.

L'énoncé de ce problème qui n'est applicable qu'aux courbes du deuxième ordre douées d'un centre peut être modifié et généralisé de la manière suivante.

Soit ABC un triangle inscrit dans une conique, soit menée une droite quelconque parallèlement à la tangente qui passe par A; ce point, le milieu de la portion de la parallèle interceptée entre les côtés AB et AC, et le pôle P du côté BC sont sur une même droite.

La démonstration de ce théorème s'obtient facilement par l'analyse.

Si l'on prend pour axes coordonnés les côtés AB, AC, l'équation de la courbe sera

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0.$$

On déterminera facilement les longueurs

$$AB = -\frac{E}{C}, \quad AC = -\frac{D}{A},$$

et l'on aura l'équation du troisième côté, BC,

$$\frac{A}{D}y + \frac{C}{E}x + 1 = 0. \tag{1}$$

Pour obtenir les coordonnées du pôle P de cette droite, on prendra l'équation générale de la polaire

$$(2A\beta + B\alpha + D)y + (2C\alpha + B\beta + E)x + D\beta + E\alpha = 0. \tag{2}$$

Et égalant les coefficients des variables, on aura les relations

$$\frac{2A\beta + B\alpha + D}{D\beta + E\alpha} = \frac{D}{A},$$

$$\frac{2C\alpha + B\beta + E}{D\beta + E\alpha} = \frac{C}{E};$$

d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{D}{B}, \quad \beta = -\frac{E}{B} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{E}{D}. \qquad (3)$$

D'ailleurs l'équation de la tangente à l'origine A, est

$$Dy + Ex = 0, \qquad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = -\frac{E}{D}; \qquad (4)$$

d'où il suit que les côtés AB et AC, la droite AP et la tangente en A, forment un faisceau harmonique.

Si donc on mène entre les côtés AB et AC, une transversale quelconque parallèle à la tangente au point A, cette transversale sera divisée en deux parties égales par la droite AP, ce qui démontre le théorème.

Si l'on cherche les coordonnées du pôle P′ du côté AB, on trouvera

$$\alpha' = \frac{D^2}{2AE - BD},$$

$$\beta' = -\frac{DE}{2AE - BD}.$$

Pareillement les coordonnées du pôle P″ du côté AC sont

$$\alpha'' = -\frac{DE}{2CD - BE},$$

$$\beta'' = \frac{E^2}{2CD - BE};$$

d'où l'on conclut les équations des droites BP′, CP″,

$$BP'\ldots\ldots \; Y + \frac{CDE}{CD^2 + 2AE^2 - BDE}\left(X + \frac{E}{C}\right) = 0,$$

$$CP''\ldots\ldots \; Y + \frac{D}{A} + \frac{AE^2 + 2CD^2 - BDE}{ADE}X = 0.$$

Et les coordonnées de leur point d'intersection

$$X = -\frac{D^2E}{2AE^2+2CD^2-BDE},$$

$$Y = -\frac{DE^2}{2AE^2+2CD^2-BDE};$$

d'où l'on tire

$$\frac{Y}{X} = \frac{E}{D}.$$

Donc les droites AP, BP′, CP″, se coupent en un seul et même point ; ce qui vérifie une propriété connue.

Si l'on cherche la polaire du point de concours de ces droites, on trouve

$$\frac{Y}{\left(\frac{E^2}{CD-BE}\right)} + \frac{X}{\left(\frac{D^2}{AE-BD}\right)} = 1.$$

Note. La même proposition peut se démontrer par la synthèse. Soit I l'intersection de BC avec la tangente en A, et O l'intersection de AP et de BC ; I est le pôle de AP ; donc les *quatre points I, C, O, B, sont placés harmoniquement* sur la sécante ICB ; les quatre droites AB, AO, AC, AI, forment donc un faisceau harmonique, etc.

Tm.

VOLUMES ENGENDRÉS.

(Mêmes figures que pour les surfaces). — Fin (voir p. 361).

PAR M. HUET,

ancien professeur de mathématiques spéciales à l'École de Sorrèze, régent de mathématiques spéciales au collége de Pamiers.

1° *Triangle.*

$$\mathrm{Vol\,T} = \mathrm{vol\,CBEF} - 2\,\mathrm{vol\,ABF} = \pi\overline{BF}^2.CB - \frac{2}{3}\pi\overline{BF}^2.AF =$$

$$= \pi\overline{BF}^2\left(CB - \frac{2}{3}AF\right) = \frac{2}{3}CB.\overline{BF}^2;$$

or $$AB = R\sqrt{3},\ BF = \frac{3}{2}R\,;$$

donc $$\mathrm{vol}\,T = \frac{3}{2}\pi R^3\sqrt{3}.$$

2° *Carré.*

$$\mathrm{Vol}\,C = 2\,\mathrm{vol}\,CAB = 2\,(\mathrm{vol}\,CAEB - \mathrm{vol}\,ABE) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi AE(\overline{CA}^2 + \overline{BE}^2 + CA.BE - \overline{BE}^2) = \frac{2}{3}\pi AE.CA(CA + BE) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi AE.\frac{3}{2}CA^2 = \frac{1}{2}\pi\overline{CA}^3\,;$$

or $$CA = 2R\,;$$

donc $$\mathrm{vol}\,C = 4\pi R^3.$$

3° *Pentagone.*

$$\mathrm{Vol}\,P = 2\,\mathrm{vol}\,ABCD = 2\,\mathrm{vol}\,DCAG + 2(\mathrm{vol}\,CBHG - \mathrm{vol}\,ABH) =$$
$$= 2\mathrm{vol}\,T + \mathrm{vol}\,T').$$

$$\mathrm{Vol}\,T = \pi AG.\overline{CG}^2\,;\quad \mathrm{vol}\,T' = \mathrm{vol}\,t - \mathrm{vol}\,t'\,;$$

or $\mathrm{vol}\,t = \frac{1}{3}\pi GH(\overline{CG}^2 + \overline{BH}^2 + CG.BH)$, et $\mathrm{vol}\,t' = \frac{1}{3}\pi AH.\overline{BH}^2$.

Cela posé, $AC = D = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;\ AB = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,;$

$AG = \frac{AB}{2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,;\ CG = \frac{R}{4}(5 + \sqrt{5})\,;\ AH = \frac{D}{2} =$
$\frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;\ GH = \frac{D}{2} - AG = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{20 - 8\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,;$$

donc $$\mathrm{vol}\,T = \pi\frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.\frac{R^2}{16}(30 + 10\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times (3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{4}.\frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{80 + 32\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

$$\mathrm{Vol}\,t=\frac{1}{3}\pi\frac{R}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\left\{\frac{R^2}{16}(30+10\sqrt{5})+\frac{R^2}{16}(30-10\sqrt{5})+\right.$$
$$\left.+\frac{20R^2}{16}\right\}=\frac{5}{6}\pi R^3\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

$$\mathrm{Vol}\,t'=\frac{1}{3}\pi\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,\frac{R^2}{16}(30-10\sqrt{5})=$$
$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\pi R^3\sqrt{80-32\sqrt{5}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi R^3\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Par suite, $\mathrm{vol}\,T'=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi R^3\left\{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right\}=$

$$=\frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

et partant,

$$\mathrm{vol}\,P=2(\mathrm{vol}T+\mathrm{vol}T')=\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5-2\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{5}{4}\pi R^3\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)=\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

4° *Hexagone.*

$$\mathrm{Vol}\,H=2\,\mathrm{vol}\,ABCD=2\,(\mathrm{vol}\,ADCG-\mathrm{vol}\,ABG)=$$
$$=\frac{2}{3}\pi AG\left(\overline{DA}^2+\overline{CG}^2+DA.CG-\overline{BG}^2\right)=$$
$$=\frac{2}{3}\pi AG\left\{\overline{DA}^2+(CG+BG)(CG-BG)+DA\,.\,CG\right\}=$$
$$=\frac{2}{3}\pi AG.DA(DA+CB+CG)=\frac{2}{3}\pi AG.2R(4R+BG)=6\pi R^2.AG;$$

or $\qquad AG=\frac{R}{2}\sqrt{3}, \qquad$ donc $\mathrm{vol}\,H=3\pi R^3\sqrt{3}.$

5° *Octogone.*

$$\mathrm{Vol}\,O=2\,\mathrm{vol}\,ABCDE=2\,(\mathrm{vol}\,ABDE+\mathrm{vol}\,BCD)=$$
$$=2\,(\mathrm{vol}\,T+\mathrm{vol}\,T').$$

$$\mathrm{Vol}T=\mathrm{vol}AFDE-\mathrm{vol}ABF=\frac{1}{3}\pi AF\left(\overline{AE}^2+\overline{DF}^2+AE.DF-\overline{BF}^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi AF \left\{ \overline{AE}^2 + (DF + BF)(DF - BF) + AE \cdot DF \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi FG.DB(AE + DB + DF) = \frac{2}{3}\pi AF.CG\left(3CG + \frac{3}{2}DB\right) =$$

$$= \pi AF \cdot CG\,(2CG + DB).$$

$$\mathrm{Vol}\,T' = \mathrm{vol}\,DCGF - \mathrm{vol}\,BFGC =$$

$$= \frac{1}{3}\pi FG\left(\overline{DF}^2 + \overline{CG}^2 + DF \cdot CG - \overline{BF}^2 - \overline{CG}^2 - BF \cdot CG\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi FG \left\{ (DF + BF)(DF - BF) + CG\,(DF - BF) \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi FG \cdot DB\,(AE + CG) = \pi FG \cdot DB \cdot CG.$$

Or, $\quad CG = R\,;\ DB = R\sqrt{2}\,;\quad AF = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\,;$

$$FG = R - AF = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2})\,;$$

donc

$$\mathrm{vol}T = \pi.\frac{R\sqrt{2}}{2}.R(2R + R\sqrt{2}) = \frac{\pi R^3}{2}(2 + 2\sqrt{2}) = \pi R^3(1 + \sqrt{2}).$$

$$\mathrm{Vol}\,T' = \pi \cdot \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2}) \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{\pi R^3}{2}\left(2\sqrt{2} - 2\right) =$$

$$= \pi R^3\left(\sqrt{2} - 1\right)\,;$$

par suite $\qquad \mathrm{vol}\,T + \mathrm{vol}\,T' = 2\pi R^3\sqrt{2}\,,$

et partant $\qquad \mathrm{vol}\,O = 4\pi R^3\sqrt{2}.$

6° *Décagone.*

$$\mathrm{Vol}\,D = 2\,\mathrm{vol}\,ABCDEF = 2\,(\mathrm{vol}\,ABEF + \mathrm{vol}\,BCDE) =$$
$$= 2\,(\mathrm{vol}\,T + \mathrm{vol}\,T').$$

$$\mathrm{Vol}\,T = \mathrm{vol}\,AGEF - \mathrm{vol}\,ABG =$$

$$= \frac{1}{3}\pi AG\left(\overline{AF}^2 + \overline{EG}^2 + AF.\,EG - \overline{BG}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi AG \left\{ \overline{AF}^2 + (EG + BG)(EG - BG) + AF.\,EG \right\} =$$

$$=\frac{1}{3}\pi AG.AF(AF+EB+EG)=\frac{2}{3}\pi AG.AO\left(3AO+\frac{3}{2}EB\right)=$$
$$=\pi AG\,(2AO+EB).$$

$$\mathrm{Vol}T'=\frac{1}{3}\pi GK(\overline{EG}^2+\overline{DK}^2+EG.DK-\overline{BG}^2-\overline{CK}^2-BG.CK)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi GK\Big\{(EG+BG)(EG-BG)+(DK+CK)(DK-CK)+EG.DK-$$
$$-BG.CK\Big\}=\frac{1}{3}\pi GK\,(AE.EB+AE.DC+EG.DK-BG.CK).$$

Cela posé, on a $OA=R$; $AE=2R$;

$$PB=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}};\quad AG=\frac{PB}{2}=\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$EY=\sqrt{R^2-\overline{AG}^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{16}(10-2\sqrt{5})}=\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$
$$=\frac{R}{4}(1+\sqrt{5})\,;\ EB=2EY=\frac{R}{2}(1+\sqrt{5});\ DC=C=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1);$$

$$AK=r=\sqrt{R^2-\frac{C^2}{4}}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{16}(6-2\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};\ GK=AK-AG=\frac{R}{4}\Big(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-$$
$$-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\Big)=\frac{R}{4}\sqrt{20-8\sqrt{5}}=\frac{R}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$BG=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AG}^2}=\frac{R}{4}\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\frac{R}{4}(3-\sqrt{5});$$

$$CK=R-\frac{C}{2}=\frac{R}{4}(5-\sqrt{5});\ EG=EB+BG=\frac{R}{4}(5+\sqrt{5})\,;$$
$$DK=C+CK=\frac{R}{4}(3+\sqrt{5}).$$

On a donc $\quad \mathrm{vol}T=\pi.\frac{R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\Big\{2R+\frac{R}{2}(1+\sqrt{5})\Big\}=$

$$=\frac{\pi R^3}{8}(5+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{\pi R^3}{8}\sqrt{200+40\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{\pi R^3}{4}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$$

$$\mathrm{Vol}\,T'=\frac{1}{3}\pi.\frac{R}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\left\{R^2(1+\sqrt{5})+R^2(\sqrt{5}-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{16}(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})-\frac{R^2}{16}(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{16}\pi R^3\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.\,48\sqrt{5}=\frac{1}{2}\pi R^3\sqrt{25-10\sqrt{5}}\,;$$

partant,

$$\mathrm{vol}\,T+\mathrm{vol}\,T'=\frac{1}{4}\pi R^3\left\{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+2\sqrt{25-10\sqrt{5}}\right\}.$$

En élevant la parenthèse au carré et en extrayant la racine carrée, on obtient :

$$\mathrm{vol}\,T+\mathrm{vol}\,T'=\frac{1}{4}\pi R^3\sqrt{250-50\sqrt{5}}=\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,;$$

et par suite, $\mathrm{vol}\,D=\frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

expression égale à la surface engendrée par le pentagone, multipliée par la moitié du rayon R; résultat remarquable.

7° Dodécagone.

$$\mathrm{Vol}\,D=2\,\mathrm{vol}\,ABCDEFG=2\,(\mathrm{vol}\,T+\mathrm{vol}\,T'+\mathrm{vol}\,T'').$$

$$\mathrm{Vol}\,T=\mathrm{vol}\,ABFG=\mathrm{vol}\,AHFC-\mathrm{vol}\,ABH=$$

$$=\frac{1}{3}\pi AH\left(\overline{AC}^2+\overline{HF}^2+AG\,.\,HF-\overline{BH}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi AH\left\{\overline{AG}^2+(HF+BH)(HF-BH)+AG\,.\,HF\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi AH\,.\,AG(AG+BF+HF)=\frac{2}{3}\pi AH\,.\,AO\left(3AO+\frac{3}{2}BF\right)=$$

$$=\pi AH\,.\,AO(2AO+BF).$$

$$\mathrm{Vol}\,T'=\mathrm{vol}\,HFEK-\mathrm{vol}\,HBCK=$$

$$=\frac{1}{3}\pi KH\left(\overline{HF}^2+\overline{KE}^2+HF.\,KE-\overline{BH}^2-\overline{CK}^2-BH\,.\,CK\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi KH\left\{(HF+BH)(HF-BH)+(KE+CK)(KE-KC)\right.+$$

$$\left.+HF\,.\,KE-BH\,.\,CK\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi KH\left\{AG\,.\,BF+AG\,.\,CE+HF\,.\,KE-BH\,.\,CK\right\}.$$

$$\text{Vol}\,T''=\text{vol}\,KEDL-\text{vol}\,KCDL=$$

$$\frac{1}{3}\pi KL\left(\overline{KE}^2+\overline{DL}^2+EK\,.\,DL-\overline{DL}^2-\overline{CK}^2-DL\,.\,CK\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi KL\left\{KE(KE+DL)-(DL+CK)\,CK\right\}.$$

Or, on trouve facilement $OA=RB=CE=DL=R$; $AG=2R$; $AH=OV=\frac{1}{2}R$; $FB=R\sqrt{3}$; $AB=C=$ $=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $BH=\sqrt{C^2-\overline{AH}^2}=\frac{R}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$ $=\frac{R}{2}(2-\sqrt{3})$; $FH=FB+BH=R\sqrt{3}+\frac{R}{2}(2-\sqrt{3})=$ $\frac{R}{2}(2+\sqrt{3})$; $KE=\frac{3}{2}R$; $CK=EK-EC=\frac{1}{2}R$; $DY=\frac{1}{2}R$;

$KL=CY=\sqrt{C^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R}{2}(2-\sqrt{3})$; $HK=AL-AH-$ $KL=\frac{R}{2}-\frac{1}{2}R\,(2-\sqrt{3})=\frac{1}{2}R\,(\sqrt{3}-1)$.

Donc $\text{vol}\,T=\pi\,.\,\frac{R^2}{2}(2R+R\sqrt{3})=\frac{1}{2}\pi R^3(2+\sqrt{2})$;

$$\text{Vol}\,T'=\frac{1}{3}\pi\,.\,\frac{R}{2}\,(\sqrt{3}-1)\left\{2R^2\sqrt{3}+2R^2+\frac{3}{4}R^2(2+\sqrt{2})-\right.$$

$$\left.-\frac{R^2}{4}(2-\sqrt{2})\right\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi R^3(\sqrt{3}-1)\,(12+12\sqrt{3})=$$

$$=\frac{1}{2}\pi R^3(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)=\pi R^3.$$

$$\text{Vol}\,T''=\frac{1}{3}\pi\,.\,\frac{R}{2}(2-\sqrt{2})\left\{\frac{3}{2}R\left(\frac{3}{2}R+R\right)-\frac{1}{2}R\left(\frac{1}{2}R+R\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi R^3(2-\sqrt{2})\,.\,12=\frac{1}{2}\pi R^3(2-\sqrt{2}).$$

Partant, $\quad\text{vol}\,T+\text{vol}\,T'+\text{vol}\,T''=\frac{1}{2}\pi R^3\,.\,6=3\pi R^3$,

et par suite, $\qquad\text{vol}\,D=6\pi R^3$,

résultat d'une simplicité remarquable.

Nous allons maintenant vérifier ces résultats par la méthode de Guldin. D'abord on trouve facilement pour expressions des surfaces des polygones réguliers en fonction de R :

$$\text{surf}\,T = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}\,;\ \ \text{surf}\,C = 2R^2\,;$$

$$\text{surf}\,P = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,;\ \ \text{surf}\,H = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}\,;$$

$$\text{surf}\,O = 2R^2\sqrt{2}\,;\ \ \text{surf}\,DC'C = \frac{5}{4}R^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,;$$

$$\text{surf}\,Dod = 3R^2.$$

On a donc, en appliquant la formule $\text{vol}\,Pol = S\,.\,2\pi R$:

$$\text{vol}T = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}\,.\,2\pi R = \frac{3}{2}\pi R^3\sqrt{3}\,;\ \text{vol}\,C = 2R^2\,.\,2\pi R = 4\pi R^3;$$

$$\text{vol}\,P = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,2\pi R = \frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,;$$

$$\text{vol}\,H = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}\,.\,2\pi R = 3\pi R^3\sqrt{3}\,;$$

$$\text{vol}\,O = 2R^2\sqrt{2}\,.\,2\pi R = 4\pi R^3\sqrt{2}\,;$$

$$\text{vol}\,D = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,2\pi R = \frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,;$$

$$\text{vol}\,Dod = 3R^2\,.\,2\pi R = 6\pi R^3\,;$$

résultats identiques avec ceux que nous venons de trouver par la géométrie.

On pourrait encore, en suivant l'une des deux marches que nous venons d'employer, trouver les expressions des mêmes volumes, soit en fonction du côté c, soit en fonction de l'apothème r.

Par exemple, en fonction du côté, on trouverait :

$$\text{vol}\,T = \frac{1}{2}\pi c^3\,;\ \ \text{vol}\,C = \pi c^3\sqrt{2}\,;\ \ \text{vol}\,P = \frac{1}{4}\pi c^3(5+3\sqrt{5})\,;$$

$$\text{vol}\,H = 3\pi c^3\sqrt{3}\,;\ \text{vol}\,O = 2\pi c^3\sqrt{20+14\sqrt{5}}\,;$$

$$\text{vol}\,Dc'c = \frac{5}{2}\pi c^3\sqrt{50+22\sqrt{5}}\,;\ \text{vol}\,Dod = 3\pi c^3(3\sqrt{6}+5\sqrt{2}).$$

RÉPONSE AUX NOTES DES PAGES 148, 149.

PAR M. FINCK,
docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collège de Strasbourg,

—

1° L'équation du second degré à deux variables peut être représentée d'une infinité de manières par $pq + a^2 = 0$, qui renferme six *constantes*. p, q, a sont de la forme $Ay + Bx + C$, ou $y + kx + l$; dans ce dernier cas, a^2 serait multiplié par une constante. Admettons cela : notre équation devient

$$(y + kx + l)(y + k'x + l') + \lambda(y + k''x + l'')^2 = 0. \quad (1)$$

Je ne reprendrai pas les raisonnements de *M. Plücker*; il faudrait entrer dans des détails qu'on peut éviter. Je me rapprocherai des méthodes enseignées dans nos écoles. Soit donnée une courbe du second degré; j'y prends deux tangentes et la sécante de contact : soient $y + kx + l = 0$, $y' + kx' + l' = 0$ les tangentes; $y'' + kx'' + l = 0$ la sécante. L'équation représente une infinité de lignes du second degré, ayant les deux premières droites pour tangentes, la dernière pour sécante de contact. Il y a plus : l'équation (1) les représente toutes, car elle renferme sous ce rapport une arbitraire λ, et c'est tout ce qu'elle peut renfermer d'arbitraire. Donc (1) représente aussi notre courbe.

Voici une seconde démonstration moins simple : soit

$$y^2 + mx^2 + 2kx = 0, \quad (2)$$

l'équation de la courbe rapportée au diamètre mené par le point de concours des tangentes, et à la tangente au sommet de ce diamètre. Les équations des tangentes seront de la forme

$$yy' + mxx' + h(x + x') = 0,$$
$$yy' - mxx' - h(x + x') = 0.$$

La sécante de contact $x - x' = 0$.

Je dis que l'équation (2) peut se transformer en

$$[yy'+mxx'+h(x+x')]\,[yy'-mxx'-h(x+x')]+\lambda(x-x')^2=0,$$

ou

$$y^2y'^2 - [mxx'+h(x+x')]^2 + \lambda(x-x')^2 = 0,$$

ou

$$y^2+x^2\frac{\lambda-(mx'+k)^2}{y'^2}+2x\frac{-kx'(mx'+k)-\lambda x'}{y'^2}+\frac{(\lambda-k^2)x'^2}{y'^2}=0.$$

Annulons d'abord le dernier terme, en prenant $\lambda = k^2$. Le coefficient de x^2 devient

$$\frac{-m^2x'^2-2kmx'}{y'^2}=m, \quad \text{vu que} \quad y'^2+mx'^2+2kx'=0.$$

Celui de $2x$, se transforme en

$$k\frac{(-2kx'-mx'^2)}{y'^2}=k, \quad \text{par la même raison. Donc, etc.}$$

Rien n'empêche de généraliser ce résultat par une transformation de coordonnées, ce qui d'ailleurs est inutile.

2° Prenez sur une ligne du second degré quatre points : par ces quatre points vous pourrez faire passer une infinité de ces lignes, dont l'équation aura une seule constante arbitraire ; soient $p=0$, $q=0$, deux côtés opposés du quadrilatère déterminé par ces points ; $r=0$, $s=0$ les deux autres. L'équation

$$pq = \lambda rs$$

représente une ligne du second degré quelconque menée par ces quatre points. En effet, elle est satisfaite par les quatre points dont le premier est ($p=0$, $r=0$), le second ($p=0$, $s=0$), etc. ; et elle renferme une arbitraire λ. Donc elle représente aussi notre courbe. Autrement : prenez $r=0$ pour axe des x ; $s=0$ pour axe des y ; soient x', x'' les abscisses des points situés sur le premier axe ; y', y'' les ordonnées des deux autres, les équations de nos quatre droites seront

$$\begin{array}{lll} r=0 & \text{ou} & y=0 \\ s=0 & & x=0 \\ p=0 & & \dfrac{y}{y'}+\dfrac{x}{x'}-1=0 \\ q=0 & & \dfrac{y}{y''}+\dfrac{x}{x''}-1=0. \end{array}$$

Donc

$$pq-\lambda rs=\left(\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}-1\right)\left(\frac{y}{y''}+\frac{x}{x''}-1\right)-\lambda xy=0,$$

ou

$$\frac{y^2}{y'y''}+xy\left(\frac{1}{y'x''}+\frac{1}{x'y''}-\lambda\right)+\frac{x^2}{x'x''}+$$
$$+y\left(\frac{-1}{y'}-\frac{1}{y''}\right)+x\left(\frac{-1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)+1=0.$$

Or, l'équation d'une conique, menée par ces quatre points, est

$$\frac{y^2}{y'y''}+mxy+\frac{x^2}{x'x''}+y\left(-\frac{1}{y'}-\frac{1}{y''}\right)+$$
$$+x\left(-\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)+1=0.$$

En faut-il davantage pour convaincre ?

Note. Oui, il faut davantage. La méthode dont M. Plucker, à l'instar de MM. Bobillier, Lamé etc., fait usage, consiste à identifier une équation donnée avec une équation de même degré, mais d'une autre forme, à l'aide d'un certain nombre de constantes arbitraires ; pourvu qu'on ait autant d'équations que de constantes arbitraires, cette identification est possible. *analytiquement parlant.* Mais la possibilité géométrique exige que l'on prouve que ces constantes ne deviennent jamais ni infinies, ni imaginaires ; et ici il s'agit d'une application à une portion déterminée de l'espace, à la géométrie; c'est donc ce dernier genre de possibilité qu'il faut établir. Dès lors, on est entraîné dans une discussion assez épineuse qui fait disparaître l'avantage de la simplicité. On devra aussi dire pourquoi le même genre de raisonnement cesse d'être applicable quand il s'agit de lignes supérieures au second degré; à quoi cela tient-il? d'ailleurs, la méthode est si rapide, si féconde, qu'il ne faut rien négliger pour la mettre à l'abri de toute objection. Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION 85 (p. 256).

PAR M. ÉMILE COUPY,
bachelier ès sciences mathématiques.

Problème. — Quel est le nombre des permutations de n lettres a, b, c, d... où une lettre au moins est à sa place?

Solution. Nous rappellerons d'abord que dans le triangle arithmétique de Pascal, la somme des p premiers nombres figurés de l'ordre n, qui forment la $(n+1)^{ème}$ ligne du triangle, est égale au $p^{ème}$ nombre figuré de la ligne suivante, c'est-à-dire de l'ordre $n+1$, ce qui donne pour cette somme l'expression

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

(Voir pour la démonstration, algèbre de Mayer et Choquet, 2^e^ édition, p. 342 et suivante). Cela posé, revenons au problème. Représentons par $P_{(n)}$ le nombre des permutations de n lettres. D'abord le nombre de permutations où l'une des lettres, la première, je suppose, est à son rang, égale évidemment le nombre de permutations que l'on peut faire avec les $n-1$ autres, c'est-à-dire $= P_{(n-1)}$; le nombre de permutations où la seconde, b, est à son rang égale aussi P_{n-1}, diminué du nombre de permutations où b était à son rang dans le nombre P_{n-1} obtenu en premier lieu. Or ce nombre est évidemment P_{n-2}, c'est-à-dire le nombre de permutations que l'on peut faire avec les $n-2$ autres lettres obtenues en négligeant a et b. On a donc en définitive $P_{(n-1)} - P_{(n-2)}$. Maintenant le nombre de permutations où c est à son rang $= P_{n-1}$, diminué du nombre de permutations où déjà cette lettre était à son rang dans les deux nombres déjà obtenus pour b et a. Or ce nombre est facile à obtenir, car il suffit de diminuer les indices de 1 dans les nombres précédents, c'est-à-dire que ce nombre est $[P_{(n-2)}] + [P_{(n-2)} - P_{(n-3)}]$. En effet, les permutations où a et c sont à leurs rangs respectifs $= P_{n-2}$, et les permutations où b et c sont à leurs rangs respectifs $= P_{(n-2)}$, diminué du nombre de permutations où ils étaient déjà à leurs rangs dans le nombre précédent $P_{(n-2)}$ obtenu pour a et c, c'est-à-dire, en d'autres termes, diminué du nombre de permutations où les trois lettres a, b, c sont à leurs rangs, nombre évidemment $= P_{(n-3)}$. Ainsi les permutations où b et c sont à leurs rangs $= P_{(n-2)} - P_{(n-3)}$, donc enfin :

$$P_{(n-1)} - [P_{(n-2)} + P_{(n-2)} - P_{(n-3)}] = P_{(n-1)} - 2P_{(n-2)} + P_{(n-3)},$$

est ce nombre de permutations où c est à son rang. Et en général pour avoir le nombre de permutations où une lettre est à son rang, quand on a celui où chacune des lettres précédentes est à son rang, il suffit de retrancher de $P_{(n-1)}$, la somme des nombres de permutations obtenues pour toutes les lettres précédentes, mais prises avec une lettre de moins, c'est-à-dire en ayant soin de diminuer de 1 chaque indice; et en effet le nombre de permutations où une lettre quelconque k est à son rang $= P_{(n-1)}$ diminué de la somme des nombres de permutations où déjà elle était à son rang sous toutes les permutations obtenues pour les lettres précédentes. Or supprimez cette lettre k dans toutes les permutations précédentes où elle est à son rang, il nous restera pour le nombre de permutations où elle est à son rang, le nombre de permutations déjà écrites, mais faites avec une lettre de moins, c'est-à-dire, que les indices seront diminués de 1. On a donc ainsi les nombres suivants :

Nombre de permutations où est à son rang :	n° des lettres.
$a = P_{n-1} \ldots\ldots$	1
$b = P_{n-1} - P_{n-2} \ldots\ldots$	2
$c = P_{n-1} - 2P_{n-2} + P_{n-3} \ldots\ldots$	3
$d = P_{n-1} - 3P_{n-2} + 3P_{n-3} - P_{n-4} \ldots\ldots$	4
$e = P_{n-1} - 4P_{n-2} + 6P_{n-3} - 4P_{n-4} + P_{n-5} \ldots$	5
$f = P_{n-1} - 5P_{n-2} + 10P_{n-3} - 10P_{n-4} + 5P_{n-5} - P_{n-6} \ldots$	6

. . . .

$$k = P_{n-1} - (n-2)P_{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}P_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}P_{n-4} + \ldots \pm P_1 \ldots \quad n-1$$

$$l = P_{n-1} - (n-1)P_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}P_{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}P_{n-4} + \ldots \mp P_0 \ldots \quad n.$$

La somme S de tous ces nombres de permutations, sera le nombre cherché. On a le double signe $\pm$. $+$ est pour n impair, et $-$ pour n pair. On voit que les coefficients de P_{n-1}, $P_{n-2} \ldots$ dans la ligne générale, celle pour la $n^{ème}$ lettre, sont ceux du binôme : l'exposant étant $(n-1)$.

Enfin on se rappellera que $P_0 = 1$ (*voir* les cours d'algèbre).

Calculons maintenant la somme S. Or on remarque que dans cette somme les coefficients de P_{n-2}, $P_{n-3} \ldots$ ne sont autre chose que la somme des nombres figurés des divers ordres, formant le triangle de Pascal, somme dont nous avons donné l'expression au commencement de cet article.

Remarquons d'abord que $n = 1+1+1+1\ldots =$ la somme de n unités, c'est donc la somme de la première ligne horizontale du triangle de Pascal, continuée jusqu'à ce qu'elle renferme n termes, et c'est le coefficient de P_{n-1} dans la somme S. Les coefficients suivants sont successivement la somme de la 2me, 3me, 4m ,... $n^{ème}$ ligne horizontale du triangle de Pascal, par conséquent le nombre des termes de chaque coefficient va toujours en diminuant de 1, et enfin la $n^{ème}$ ligne du triangle étant 1, le dernier terme P_1 de S a en effet le coefficient 1; on a donc dans cette somme S :

Coef. de	ou somme de la ligne horiz. du triangle de Pascal		nombre des termes.
P_{n-1}	1re	$= n\ldots$	n
P_{n-2}	2me	$= \dfrac{(n-1)n}{1.2.}\ldots$	$n-1$
P_{n-3}	3me	$= \dfrac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$	$n-2$
P_{n-4}	4me	$= \dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}\ldots$	$n-3$
P_{n-5}	5e	$= \dfrac{(n-4)\ldots(n-1)n}{1.2.3.4.5}\ldots$	$n-4$
. . .	. . .	. . .	. . .
P_3	$(n-1)^{ème}$	$= \dfrac{4.5.6\ldots n}{1.2.3\ldots(n-3)}\ldots$	4
P_2	$(n-2)^{ème}$	$= \dfrac{3.4.5\ldots n}{1.2\ldots(n-2)}$	3
P_1	$(n-1)^{ème}$	$= \dfrac{2.3.4\ldots n}{1.2\ldots(n-1)}$	2
P_0	$n^{ème}$	$= \dfrac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n} = 1\ldots$	1.

Donc la formule cherchée est

$$S = nP_{n-1} - \frac{(n-1)\,n}{1.2} P_{n-2} + \frac{(n-2)(n-1)\,n}{1.2.3} P_{n-3} -$$
$$- \frac{(n-3)\ldots n}{1.2.3.4} P_{(n-4)} \ldots\ldots \mp P_0 ;$$

formule qu'on peut écrire sous une forme différente en remarquant que

$nP_{n-1}=P_n$, $n(n-1)P_{n-2}=P_n$, $n(n-1)(n-2)P_{n-3}=P_n$, etc.

Alors en écrivant $P_0 = 1$ sous la forme $\frac{P_n}{P_n}$, on peut mettre P_n en facteur commun, et écrire

$$S = P_n \left(1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} \ldots\ldots \pm \frac{1}{P_n}\right).$$

Or $P_n = 1.2.3.4\ldots n$, donc

$$S = (1.2.3\ldots n) - (3.4\ldots n) + (4.5\ldots n) - (5.6\ldots n) \ldots \mp n \pm 1,$$

et il est bon de remarquer que dans les applications numériques de cette formule, pour former le premier terme, $1.2.3\ldots n$, on devra le commencer à rebours, c'est-à-dire de la sorte : $n.(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$, parce que les produits partiels n, $(n-1)\,n$, $(n-2)(n-1)n\ldots$ sont précisément les autres termes de la formule.

II. Au moyen de la formule précédente on pourra trouver le nombre de permutations où aucune lettre n'est à sa place. Car ce nombre est évidemment $P_n - S = S'$, et

$$S' = (3.4\ldots n) - (4.5\ldots n) + (5.6\ldots n) \ldots \pm n \mp 1.$$

III. Comme application numérique, nous résoudrons le problème suivant de probabilité, résolu pour la première fois par Montmort (*), et proposé dans la Correspondance mathématique de Quételet, t. III, p. 315. On a 13 cartes dont aucune n'est répétée, on les bat, puis on les tire succes-

(*) Essai d'analyse sur les jeux de hasard, p. 54 ; Montmort ne résout qu'un cas particulier de la question ; son ouvrage a paru en 1708. Tm.

sivement en nommant suivant l'ordre des cartes : as. 2,3,4,.. jusqu'au roi qui est la dernière, et on parie qu'il arrivera au moins une fois qu'une carte sera à son rang, quel doit être le rapport des paris?

Il faut faire $n=13$, S est le nombre de cas favorables, S' le nombre de cas défavorables, or ici :

$$P_n = 1.2.3\ldots 13 = 6227020800,$$

et on trouve pour

$$S = 7318002277 - 3381774409 = 3936227868.$$

C'est là le nombre de chances favorables · le nombre de chances défavorables est donc

$$6227020800 - 3936227868 = 2290792932.$$

Il faut donc parier 393.... contre 229.... ou (en divisant par 36), 109339663 contre 63633137, qu'il arrivera au moins une fois, qu'en tirant une carte, on la nommera; les deux derniers nombres, sont premiers entre eux, mais étant fort grands on se fait difficilement idée du rapport des paris. Mais si le second nombre se terminait par un 8 au lieu d'un 7, il serait divisible par 6; le quotient sera 10605523, et divisant 109339663 par ce quotient, on trouve 10 et environ $\frac{1}{3}$. On peut donc dire qu'il faut parier un peu moins de 11 contre 6.

Enfin, pour terminer, disons que si on fait successivement dans S et S',

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,$$

on aura

$$S = 1,\ 1,\ 4,\ 15\ 76\ 455\ 3186\ 25487\ 229384\ 2293839\ 25232230\ 302786759\ 3936227868,$$

$$S' = 0,\ 1,\ 2,\ 9,\ 44\ 265\ 1854\ 14833\ 133496\ 1334961\ 14684570\ 176214841\ 2290792937.$$

On peut voir : Développement sur la partie élémentaire des mathématiques par Bertrand de Genève, t. I, p. 410, la solution du problème de Montmort, mais non par la formule générale que nous avons donnée ici. Voir aussi *Annales de Gergonne*, t. XII, p. 120.

Note. Le problème du jeu de rencontre a été résolu par Euler (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751); Laplace s'en est aussi occupé (Calcul des probabilités, p. 217), sa marche est analogue à celle que M. Coupy a suivie. Enfin M. Catalan a généralisé l'énoncé, on trouve la solution au journal de M. Liouville, tome II, p. 475. On voit que ce problème mène à une série, développement de e^{-1}; Daniel Bernoulli est le premier qui ait indiqué l'équation limite $\left(1-\frac{m}{\infty}\right)^{\infty}=e^{-m}$. (Mémoires de P., t. XIV, p. 6, 1769); M. Cauchy en a donné une démonstration rigoureuse, et en a fait la base du calcul différentiel, méthode aussi ingénieuse que peu naturelle (Moigno, t. I, p. 3). Tm.

NOTE

sur l'équation aux carrés des différences.

PAR M. TARNIER,
professeur.

1° Trouver la relation entre les coefficients d'une équation, pour qu'elle soit l'équation aux carrés des différences d'une équation du 3^me^ degré de la forme $x^3+qx+r=0$.

D'après la relation $n=\frac{m(m-1)}{1.2}$, on voit que $n=3$; l'équation cherchée étant du 3^me^ degré, est de la forme

$$\zeta^3+F\zeta^2+G\zeta+H=0.$$

Or le calcul donne pour équation aux carrés des différences de $x^3 + qx + r^2 = 0$,

$$\zeta^3 + 6q\zeta^2 + 9q^2\zeta + (4q^3 + 27r^2) = 0,$$

et l'on voit en identifiant que

$$\frac{F}{2} = 3q, \qquad G = 9q^2 = \frac{F^2}{4}.$$

Cette condition $G = \frac{F^2}{4}$ est nécessaire et suffisante. En effet, pour retrouver l'équation primitive, on prendra $q = \frac{F}{6}$, et on pourra choisir r, de façon qu'on ait $4q^3 + 27r^2 = H$; r pourra être imaginaire.

Cette condition ne peut pas s'énoncer ainsi : « la somme des trois premiers coefficients est un carré » ; mais bien « les trois premiers termes doivent être les trois termes du carré d'un binôme, en supposant le coefficient du premier terme égal à 1 » ; et encore mieux : « le carré de la moitié du coefficient du deuxième terme est égal au produit des coefficients du premier et du troisième terme. »

2° Nous allons exposer une deuxième méthode qui, ne nécessitant pas l'équation aux carrés des différences, s'applique à toute équation du troisième degré, et indique la méthode à suivre pour un degré supérieur au troisième.

Soient $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$ les racines de l'équation ; celles de

$$\zeta^3 + F\zeta^2 + G\zeta + H = 0,$$

sont $\begin{matrix} (a-b)^2 \\ (b-c)^2 \\ (a-c)^2 \end{matrix}$; et l'on voit que les trois quantités $\begin{matrix} a-b \\ b-c \\ a-c \end{matrix}$ sont telles, que la somme des deux premières donne la troisième ; donc, les trois racines sont $\begin{matrix} p^2 \\ q^2 \\ (p+q)^2 \end{matrix}$ et l'on a

$$(1) \qquad -\mathrm{F} = p^2 + q^2 + (p+q)^2$$
$$(2) \qquad \mathrm{G} = p^2q^2 + (p^2+q^2)(p+q)^2,$$
$$(3) \qquad -\mathrm{H} = p^2q^2(p+q)^2;$$

il suffit d'éliminer $\frac{p}{q}$, pour avoir la relation entre $\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{G}.\\ \mathrm{H}\end{matrix}$ Or, on a :

$$-\mathrm{F} = 2(p^2+q^2+pq), \quad \mathrm{G} = (p^2+q^2)^2 + 2pq\,(p^2+q^2) +$$
$$+ p^2q^2 = (p^2+q^2+pq)^2 = \frac{\mathrm{F}^2}{4}.$$

Cette condition $\mathrm{G} = \frac{\mathrm{F}^2}{4}$ est suffisante, car en prenant $\frac{p}{q}$, de manière à satisfaire à $\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}$, G sera toujours égal à $\frac{\mathrm{F}^2}{4}$.

THÉORIE DES FOYERS,

d'après Apollonius.

—

1. Il est nécessaire, pour comprendre le langage d'Apollonius, d'expliquer certaines dénominations en usage chez les anciens.

Appliquer un rectangle à une droite, c'est partager cette droite en deux segments, tels que le rectangle construit sur ces segments, soit égal au rectangle donné.

Nous disons *égal au rectangle*, car les anciens ne se servaient pas du mot *équivalent* introduit, je crois, par Legendre.

Le mot *appliquer* (παραβάλλω), vient de ce que le rectangle était joint, appliqué à la droite donnée; soit AB cette droite BC le prolongement de AB; et BCDE le rectangle donné, il s'agit de partager AB en deux segments, tels que le rectangle construit avec ces segments, soit égal au rectangle BCDE; on voit que BCDE est joint à la droite AB;

une droite ordonnée à un diamètre; c'est une droite parallèle au diamètre conjugué.

Figure d'un diamètre, (ειδόσ του διαμετρου): c'est le rectangle construit sur ce diamètre et son paramètre.

On voit que la *figure d'un diamètre*, est équivalente au carré du diamètre conjugué.

Les théorèmes sur les foyers sont dans le livre III ; nous en extrayons les propositions relatives à notre objet.

Proposition XLII.

Si dans l'hyperbole, ou dans l'ellipse, ou dans la circonférence du cercle, ou dans les *sections opposées*, on mène par les extrémités d'un diamètre deux droites ordonnées à ce diamètre; et encore une autre droite tangente; celle-ci retranche des deux premières, des longueurs renfermant un rectangle égal au quart de la figure faite sur le diamètre; en d'autres termes, dans le trapèze formé par un diamètre, les deux tangentes parallèles menées par ses extrémités, et une troisième tangente quelconque, le produit des deux bases est équivalent au carré du demi-diamètre conjugué. Lorsque la troisième tangente est parallèle au diamètre, le trapèze se change en parallélogramme, et la proposition devient intuitive. Cette observation est d'Apollonius. Par *section opposée*, on entend les deux branches opposées de l'hyperbole, qu'Apollonius considère toujours à part.

Proposition XLV.

Si dans l'hyperbole, ou dans l'ellipse, ou dans la circonférence du cercle, ou dans la *section opposée*, on mène des perpendiculaires aux extrémités de l'axe, et qu'on applique à l'axe de part et d'autre un rectangle égal au quart de la figure; qu'on mène une droite touchant la section et coupant les *perpendiculaires*, les droites menées par les points d'intersections, aux points *faits par application*, forment des angles droits, en ces points.

Observation : le quart de la figure sur l'axe transverse, c'est le carré du demi-axe conjugué ; si on applique à l'axe transverse un rectangle équivalent au carré du demi-axe conjugué, c'est-à-dire si on divise cet axe en deux segments additifs pour l'ellipse, soustractifs pour l'hyperbole, dont le produit soit égal au carré du demi-axe conjugué, on obtient sur cet axe et pour chaque extrémité, *un point fait par application; ce sont là les foyers, mots* qu'Apollonius *ne connaît* pas. Ils désignent toujours ces points par cette phrase, *points faits par application* (τὰ εκ τῆσ παραβολῆσ γενεθέντα σημὲιᾶ). — Ainsi, la proposition XLV peut se traduire ainsi en langage moderne : toute tangente interceptée entre deux tangentes menées par les extrémités de l'axe transverse, est vue du foyer sous un angle droit.

On voit que cette détermination du foyer n'est pa praticable dans la parabole; mais Apollonius ne parle nullement du foyer de cette courbe.

Proposition XLVI.

Même construction que dans la précédente; soient A et B, les extrémités de l'axe transverse; AG, BD, les perpendiculaires élevées sur cet axe; DFG une tangente quelconque, et E le point de contact; F et F′ les deux foyers; on aura angle FDF′ = angle FGF′.

Proposition XLVII.

Même construction que dans la précédente; soit T l'intersection de DF′ et de GF; la droite TE est perpendiculaire sur la tangente DFG.

Cette belle propriété est peu connue.

Apollonius démontre que si on abaisse du point T, une perpendiculaire sur la tangente, elle se confond avec TE.

Proposition XLVIII.

Même construction, les rayons vecteurs font des angles égaux avec la tangente.

Proposition XLIX.

Même construction; si d'un foyer on abaisse une perpendiculaire sur une tangente, et qu'on joigne le pied de la perpendiculaire avec les extrémités de l'axe transverse, ces deux droites sont perpendiculaires, l'une sur l'autre.

Proposition L.

Même construction ; si l'on mène par le centre une parallèle au rayon vecteur qui passe par le point de contact, la portion de cette parallèle comprise entre le centre et la tangente est égale à la moitié de l'axe transverse.

Proposition LI.

Si dans l'hyperbole ou dans les sections opposées, on mène des deux foyers, deux droites au même point de la section, la plus grande surpasse la plus petite, d'une longueur égale à l'axe transverse.

Proposition LII.

Si dans l'ellipse, on mène des deux foyers, deux droites à un même point de la section, la somme de ces droites est égale à l'axe transverse.

Apollonius passe toujours d'une proposition à la suivante; les propositions LI et LII sont les dernières relatives aux foyers; il n'y en a point d'autres de cet auteur; il ne fait aucune mention de directrices.

Observation. Il existe *des points faits par application* sur tous les diamètres de l'hyperbole, et sur les diamètres de l'ellipse plus grands que leurs diamètres conjugués. M. le capitaine Jacob en a donné le lieu géométrique (t. II, p. 138).

Claude Mydorge dans *ses coniques* (*), donne aux *points d'application* faits sur l'axe, le nom d'Ombilics (Umbilicus). — Descartes, dans sa Dioptrique, dit : « à cause de certaines propriétés de ces points, que vous entendrez ci-après, nous les nommerons les points brûlants » (*OEuvres*, V. p. 94. Cousin); il est probable que cette expression a été changée en celle de *foyer*. Tm.

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes de second degré.

(Voir t. II, page 532.)

—

XLVIII. *Transformation des courbes.*

Lemme. Si dans une équation algébrique à deux inconnues x, y du degré m, on remplace respectivement les deux variables par les expressions ayant même dénominateur,

$$\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}, \quad \frac{a'x+b'y+c'}{dx+ey+f},$$

les neuf coefficients donnant huit rapports, l'équation résultante est encore du degré m.

Démonstration. Soit l'équation $F(x, y) = P_m + \ldots P_n + \ldots$

(*) Claudii Mydorgii Patricii Parisini prodromi catopticorum et diopticorum, sive, conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria prævii et facem præferentis, libri quatuor priores. D. A. L. G. Parisiis. 1[illegible] premier traité méthodique des sections coniques en F[illegible] *d'abord en deux livres en* 1631. Les énoncés des qu[illegible] le synopsis du P. Mersenne.

$P_0 = 0$ où P_m, P_n sont les fonctions *homogènes* des degrés m et n, etc.; en opérant la substitution indiquée, P_m devient une fonction de degré m divisée par $(dy + ex + f)^m$, et P_n une fonction de degré n divisée par $(dy + ex + f)^n$ et $m > n$; multipliant donc toute l'équation par $(dy + ex + f)^m$, on aura une nouvelle équation, fonction entière et du degré m.

Observation. Ce résultat n'aurait pas lieu, si les expressions fractionnaires étaient de dénominations différentes.

XLIX. La première équation représentant une ligne plane de degré m, la seconde équation représentera une ligne de même degré, une ligne *transformée*, rapportée aux anciens ou à de nouveaux axes. Nous verrons plus loin que cette méthode de transformation, due originairement à Newton, et généralisée par Waring (*Proprietates curvarum algebraicarum*, p. 240), est d'une extrême fécondité; à son aide, on transporte les propriétés connues d'une courbe, dans une autre courbe de même espèce. En disposant des huits rapports indéterminés, on peut mettre en relation des courbes à branches infinies avec des courbes fermées, des hyperboles avec des cercles, etc.; et sachant mener des tangentes à l'une de ces courbes, on fait de suite construire la tangente à la courbe transformée, etc., etc. C'est aussi la théorie analytique des méthodes graphiques, dites projectives, perspectives, etc. Dans ces derniers temps, M. Lamé (*) a donné la plus grande extension possible à ce système, en remplaçant les trois variables dans les équations des surfaces, par des fonctions quelconques et déduisant les relations entre la surface primitive et les surfaces transformées.

(*) Auteur de l'Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie, in-8°, en 124 pages, 1818. Opuscule précieux, auquel se rattachent les principaux progrès de la géométrie analytique, et qu'on devrait toujours citer; aussi n'en parle-t-on jamais.

L. *Changement des coordonnées.*

Problème. Quelles valeurs doit-on donner aux neufs coefficients, pour que la courbe transformée se confonde avec la courbe donnée.

Solution. 1° Si les axes doivent rester les mêmes, il suffit évidemment de faire $a=b'=f=1$, et de rendre nul les six autres coefficients : 2° si les axes changent il faut faire

$$d=e=0, \ f=1,$$

$$\left.\begin{array}{ll} a=\dfrac{\sin(Y-X')}{\sin Y}, & b=\dfrac{\sin(Y-Y')}{\sin Y} \\ a'=\dfrac{\sin X'}{\sin Y}, & b'=\dfrac{\sin Y'}{\sin Y} \end{array}\right\} \qquad (33)$$

c et c' sont les coordonnées de la nouvelle origine, relativement aux anciens axes; les grandes lettres désignent les angles formés par les axes correspondants et l'ancien axe des X.

Observation I. Cette solution est indiquée dans tous les ouvrages élémentaires. On peut supposer d'abord que l'origine ne se déplace pas. Alors le problème devient cette question de tétragonométrie : dans un quadrilatère connaissant tous les angles et deux côtés adjacents, déterminer les deux autres côtés. On peut ramener la question à la trigonométrie, et c'est ce qu'on fait ordinairement; mais il vaut mieux avoir recours au principe général qui sert de base à la polygonométrie, plane ou gauche; savoir, que la somme *algébrique* des projections des côtés d'un polygone, plane ou gauche, sur une droite fixe, est nulle. Parce que cette même méthode sert aussi au changement de coordonnés dans l'espace où il s'agit d'un hexagone gauche.

Observation II. Carnot est, je crois, le premier qui ait désigné les angles des axes par les deux lettres qui servent à désigner ces axes. D'après cette notation commode, il faudrait écrire Y', X; X', X, etc., pour marquer les angles que forment les axes des Y' et des X' avec l'axe des X, etc.; dans le cas actuel, on peut sans inconvénients supprimer la lettre X et la sous-entendre (Comte, *Géométrie analytique*, page 96).

Corollaire I. Si on déplace l'origine sans changer les axes de direction; alors $X'=0$, $Y'=Y$, donc $a=1$, $b=0$, $a'=0$, $b'=1$; ce qui est d'ailleurs d'une évidence intuitive. Ainsi on remplace x par $x+c$, et y par $y+c'$, donc dans l'équation transformée P_m reste le même, et le terme tout connu est égal à $F(c, c')$.

Corollaire II. Si l'on conserve de position l'axe des X, alors $X'=0$, $a=1$;

$$b=\frac{\sin(Y-Y')}{\sin Y}, \quad a'=0, \quad b'=\frac{\sin Y'}{\sin Y}, \quad c'=0,$$

et si l'on conserve de position l'axe des Y, on a $Y=Y'$, donc

$$a=\frac{\sin(Y-X')}{\sin Y}, \quad b=0, \quad a'=\frac{\sin X'}{\sin Y}, \quad b'=1, \quad c=0.$$

LI. *Définitions relatives au point.*

Un point d'une courbe est dit *réel*, lorsque ses deux coordonnées sont réelles.

Le point est *imaginaire*, lorsqu'une de ses coordonnées ou toutes les deux sont imaginaires.

Le point est *ordinaire*, lorsqu'aucune fonction dérivée, d'une ordonnée par rapport à l'autre, à partir de la seconde dérivée, ne devient en ce point ni nulle, ni infinie, ni imaginaire.

Le point est *singulier*, lorsqu'une de ces conditions existe.

Le point est *simple*, lorsque la fonction prime d'une ordonnée prise par rapport à l'autre n'a en ce point qu'une valeur.

Le point est *multiple*, lorsque cette fonction prime a plus d'une valeur.

Le point est à distance *finie*, lorsque les deux coordonnées ont des valeurs finies.

Le point est à distance *infinie*, lorsqu'une de ses coordonnés ou toutes les deux ont des valeurs infinies.

Observation. Ces diverses circonstances peuvent se trouver réunies; ainsi le même point peut être à la fois singulier, multiple et à distance infinie.

Observation. Nous ne mentionnons pas le cas de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, puisqu'on a des méthodes pour découvrir les valeurs de ces expressions.

LII. Théorème. Une droite coupe toujours une ligne de l'ordre m en m points et pas davantage; ces points sont réels ou imaginaires, ordinaires ou singuliers, simples ou multiples; à distances finies ou infinies; et réciproquement, lorsqu'une droite quelconque ne coupe une ligne qu'en m points, l'équation de la ligne est de degré m.

Démonstration. Une ligne de l'ordre m est représentée par une équation de degré m; la droite est donnée par une équation du premier degré; en éliminant une quelconque des deux coordonnées, on obtient une équation du degré m dont les racines sont les secondes coordonnées des points d'intersections. Or ces racines sont au nombre m et pas davantage; réelles ou imaginaires, simples ou multiples, finies ou infinies. Ayant les valeurs des coordonnées, on peut obtenir celles des fonctions dérivées, et par conséquent savoir si les points d'intersections sont ordinaires ou singuliers, etc.; la réciproque est évidente.

Corollaire I. Une fonction symétrique des coordonnées, des points d'intersections, même des *points imaginaires*, a toujours une valeur réelle. C'est une conséquence de la théorie des équations.

Corollaire II. Les m points d'intersections donnent lieu à $\frac{m(m-1)}{1.2}$, cordes réelles ou imaginaires, simples ou multiples, finies ou infinies; dans un point multiple de l'ordre n, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ cordes qui deviennent nulles.

Observation. Une ligne de *l'ordre* m est une courbe du *genre* $m-1$; voici à ce sujet les idées de Descartes, point de départ de tout ce qu'on a fait là-dessus. « Je pourrais » mettre ici plusieurs autres moyens pour tracer et conce- » voir des lignes courbes qui soient de plus en plus composées » par degrés à l'infini; mais pour comprendre ensemble » toutes celles qui sont dans la nature, et les distinguer par » ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que » de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer » géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque me- » sure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport » à tous les points d'une ligne droite, qui peut être expri- » mée par quelque équation, en tous par une même, et que » lorsque cette équation ne monte que jusqu'au rectangle » de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une » même, la ligne courbe est du premier et plus simple » genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hy- » perbole et l'ellipse qui soient comprises; mais que lorsque » l'équation monte jusqu'à la troisième ou quatrième di- » mension des deux, ou de l'une des deux quantités indéter- » minées (car il en faut deux pour expliquer ici le rapport » d'un point à un autre), elle est du second; et que lorsque » l'équation monte jusqu'à la cinquième ou sixième dimen- » sion, elle est du troisième; et ainsi des autres à l'infini. » (*La Géométrie*, livre second, *voir* p. 337, édition Cousin.)

Ainsi, selon Descartes, les courbes des degrés $2n+1$ et $2n+2$ sont du même genre; il choisit pour exemple le lieu géométrique suivant, le premier qu'on ait trouvé par la méthode cartésienne. Soit GAL un triangle rectangle en A, G et A sont des sommets fixes sur AL prolongée, on prend LK d'une longueur constante; par K on mène une droite de direction donnée, cette droite rencontre l'hypoténuse variable GL en un point C dont Descartes détermine le lieu, qu'il trouve être une hyperbole, courbe du premier genre. Il énonce cette proposition générale; si la ligne qui passe par le point K, au lieu d'être une droite est une ligne donnée du genre m, et se mouvant parallèlement à elle-même, le lieu du point C est une ligne du genre $m+1$; les élèves en trouveront facilement la démonstration. Telle est selon Descartes la génération organique des courbes géométriques de tous les genres, et d'une exécution mécanique très-facile; GL est une règle mobile autour de G, et KL une autre règle se mouvant dans une rainure ALK, et poussant devant elle, la règle GL et la courbe donnée; si cette courbe donnée est un cercle, ligne du premier genre, ayant L pour centre et KL pour rayon, le lieu du point C est évidemment une conchoïde, courbe du second genre; il place les courbes qui vont au carré de carré, au même genre que celles qui montent au cube, et celles dont l'équation remonte au carré de cube (sixième degré), au même genre que le *sur-solide* (cinquième degré), parce que, dit-il, *il y a règle générale pour réduire au cube toutes les difficultés qui vont au carré de carré et au sur-solide toutes celles qui vont au carré de cube, de façon qu'on ne doit point les estimer plus composées.* (Même édition, p. 341.)

La Géométrie parut en 1638, année de la naissance de Louis XIV, et quatre années avant la mort de Galilée et la naissance de Newton; ce n'est qu'en 1704, que cet illustre géomètre publia en latin à la suite de l'optique en anglais, la classification des lignes du troisième ordre; en 1706 l'op-

tique fut traduite en latin, par le célèbre philosophe déiste Samuel Clarke, in-4° de 348 pages. Car à cette époque, les philosophes ne croyaient pas encore déroger en s'occupant de physique et de géométrie. Newton fut si satisfait qu'il gratifia le traducteur, de cinq cents livres sterling. A cette traduction est joint l'opuscule de 24 pages : *Enumeratio linearum tertii ordinis*. On voit ici la première théorie exacte des lignes, fondée sur les idées cartésiennes; cet ouvrage très-rare n'a jamais été traduit en français; voici le début : « *Lineæ geo-*
» *metricæ secundum numerum dimensionum æquationis qua*
» *relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quid perinde*
» *est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta*
» *secari possunt optime distinguuntur in ordines. Qua ratione*
» *linea primi ordinis erit recta sola, eæ secundi sive quadratici*
» *ordinis erunt sectiones conicæ et circulus, et eæ tertii sive cu-*
» *bici ordinis parabola cubica, parabola neiliana, cissois vete-*
» *rum et reliquæ quas hic enumerare suscepimus. Curva autem*
» *primi generis (siquidem recta inter curvas non est nume-*
» *randa), eadem est cum linea secundi ordinis, et curva*
» *secundi generis eadem cum linea ordinis tertii. Et linea*
» *ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis*
» *secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix et linea*
» *omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas gene-*
» *ratur.* » La parabole cubique, dite aussi cartésienne, est de la forme $y = ax^3$, et la parabole neilienne a pour équation $y^3 = ax^2$, elle est célèbre parce que c'est la première courbe qu'on ait su rectifier ; voici l'origine du nom : Wallis avait indiqué des relations différentielles qui pouvaient amener à découvrir des courbes rectifiables. Un jeune géomètre, Guillaume Neil, indiqua une courbe géométrique, satisfaisant aux relations de Wallis; et derechef celui-ci trouva que c'était la courbe où le cube de l'ordonnée était proportionnel au carré de l'abscisse; on a appris depuis que

cette courbe n'est autre que la développée de la parabole ordinaire; et toutes les développées sont rectifiables essentiellement.

LIII. *Définitions relatives aux segments.*

Si l'on prend un point fixe O sur une droite, coupant une ligne de l'ordre m, les distances du point O aux points d'intersections se nomment *segments* de la droite, relatifs au point de l'origine O, et selon que ces segments aboutissent à des points réels ou imaginaires, simples ou multiples, etc. Les segments prennent la même dénomination.

Observation. Ainsi lorsque la droite n'a aucun point de commun avec la ligne de l'ordre m, tous les segments sont imaginaires, ont une existence purement analytique, mais une fonction symétrique de ces segments a une valeur réelle.

(*La suite prochainement.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

90. Dans la figure 59 qui sert à la démonstration du carré de l'hypoténuse, démontrer que, 1° les trois points G, A, D sont sur une droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A; 2° AL est perpendiculaira à GC comme AM à BD; 3° $\frac{AL}{AM} = \frac{AB}{AC}$; 4° $AO = AR$; 5° $\frac{AK}{AM} = \frac{AC}{AB}$; 6° les droites AIH, BD, GC se coupent en un même point I; la même propriété a lieu si les carrés sont construits dans le sens inverse.

(*Georges Ritt.*)

Cette propriété a été remarquée par un Anglais nommé Hammet. Tm.

NOTE

Sur la question proposée au concours général de 1844.
(*Mathématiques spéciales*). (V. p. 377.)

PAR J. A. SERRET.

La belle proposition que l'Académie de Paris a choisie cette année pour le sujet de concours, est due à M. Chasles. Elle se trouve énoncée dans un mémoire présenté, par ce savant géomètre, à l'Académie des sciences (*) et intitulé : *Propriétés géométriques des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable.*

L'étude *géométrique* des transcendantes elliptiques de seconde espèce, a naturellement conduit M. Chasles à des théorèmes nouveaux, dont la démonstration directe et synthétique offrirait sans doute de grandes difficultés : parmi ces théorèmes dont l'auteur n'a pas encore publié la démonstration, se trouvent les suivants.

Quand deux arcs semblables (**) *ont une extrémité commune, leur différence est égale à la différence entre les tangentes menées par les deux autres extrémités, et terminées à leur point de concours.*

Par ce point et l'extrémité commune des deux arcs, on peut faire passer une conique homofocale à la proposée.

Quand deux arcs semblables ont une extrémité commune,

(*) Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. XVII, p. 838.

(**) M. Chasles appelle arcs semblables d'une section conique, ceux dont la différence est rectifiable.

dans l'angle formé par les tangentes menées par leurs deux autres extrémités, on peut inscrire un cercle qui touche la conique au point commun des deux arcs.

Des théorèmes qui précèdent, on conclut aisément le suivant qui fournit la solution de la question qui nous occupe.

Si l'on considère tous les cercles qui touchent une section conique en un même point, et qu'on mène à chacun de ces cercles deux tangentes qui touchent en même temps la conique, le lieu géométrique du point de rencontre de ces deux tangentes sera la trajectoire orthogonale et conjuguée de la conique donnée qui passe par le point donné.

M. Chasles ne tardera pas sans doute à publier ses élégantes recherches. Quant à nous, nous n'avons d'autre but que de montrer comment on pouvait arriver simplement, et à l'aide de l'analyse à la solution de la question proposée; seulement nous donnerons un peu plus de généralité à l'énoncé en ne spécifiant pas l'espèce de la conique donnée.

PROBLÈME. *Étant donnés une conique quelconque et un point fixe sur cette courbe, on lui mène un cercle tangent en ce point, et l'on demande le lieu décrit par le point de rencontre des deux tangentes extérieures communes à la conique et au cercle, lorsque le rayon de ce dernier varie.*

SOLUTION. Soient pris pour axe des y la tangente commune au point donné au cercle et à la courbe, et pour axe des x la normale.

L'équation de la conique sera

$$y^2 + Axy + Bx^2 + Cx = 0, \tag{1}$$

et celle du cercle

$$y^2 + x^2 + 2rx = 0. \tag{2}$$

Substituant $mx+n$ à y, dans ces deux équations, on trouve

$$(m^2 + Am + B)x^2 + (2mn + An + C)x + n^2 = 0,$$
$$(m^2 + 1)x^2 + 2(mn + r)x + n^2 = 0;$$

lesquelles équations auront pour premiers membres des carrés parfaits, si l'équation

$$(3) \qquad y = mx + n,$$

est celle d'une tangente commune au cercle et à la conique. Dans cette hypothèse on aura les deux conditions suivantes :

$$(4) \qquad (A^2 - 4B)\,n^2 + 4Cmn + 2ACn + C^2 = 0,$$

$$(5) \qquad n^2 - 2mnr - r^2 = 0.$$

Si dans les équations (4) et (3) on met au lieu de m sa valeur tirée de (5), on aura

$$(6) \qquad \left\{ r(A^2 - 4B) + 2C \right\} n^2 + 2ACrn + Cr(C - 2r) = 0,$$

$$(7) \qquad (2r + x)\,n^2 - 2ryn - r^2x = 0.$$

Et l'équation (7), dans laquelle on mettra successivement au lieu de n, les deux racines de l'équation (6) fournira les équations des deux tangentes extérieures communes au cercle et à la conique; mais si x et y représentent *spécialement* les coordonnées du point où ces deux tangentes se coupent, on voit que l'équation (7) *se changera en une identité*, quand on mettra au lieu de n l'une quelconque des racines de l'équation (6). Sous ce point de vue on peut donc dire que les équations (6) et (7) ont les mêmes racines, et par suite sont identiques.

L'identification des équations (6) et (7), fournit les relations

$$\frac{2r + x}{r(A^2 - 4B) + 2C} = \frac{-y}{AC} = \frac{-rx}{C(C - 2r)},$$

ou

$$(8) \qquad \left\{ (A^2 - 4B)\,y + 2AC \right\} r + C(Ax + 2y) = 0,$$

$$(9) \qquad (Ax + 2y)\,r - Cy = 0.$$

Ces équations ne renferment r qu'au premier degré : elles représentent deux droites qui se coupent au même point que les tangentes communes. On trouve en éliminant r,

$$(10) \qquad (A^2 - 4B + 4)y^2 + 4Axy + A^2x^2 + 2ACy = 0\,,$$

équation qui est celle du lieu géométrique demandé, lequel n'est autre qu'une section conique tangente à l'origine, à l'axe des x, et qui par conséquent coupe orthogonalement la conique donnée au point donné; cette dernière remarque nous sera tout à l'heure très-utile pour reconnaître la position relative des deux courbes.

Si H et H' représentent les quantités que l'on désigne habituellement par B^2-4AC, et qui sont relatives aux courbes (1) et (10), on trouve

$$H = A^2 - 4B, \qquad H' = -4A^2(A^2 - 4B),$$

la courbe cherchée sera donc une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la courbe donnée sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Ces deux courbes ont même centre; on trouve en effet pour les coordonnées du centre de la première,

$$(11) \qquad 2y + Ax = 0, \qquad Ay + 2Bx + C = 0,$$

et pour celui de la seconde

$$(12) \quad (A^2 - 4B + 4)y + 2Ax + AC = 0, \quad 2y + Ax = 0,$$

et les équations (12) sont évidemment des conséquences, des équations (11). Ces deux systèmes s'accordent à donner

$$y = \frac{-AC}{A^2 - 4B}, \qquad x = \frac{2C}{A^2 - 4B}.$$

Si de l'équation (10) on retranche l'équation (1) après l'avoir préalablement multipliée par 4, on trouvera

$$(13) \qquad (A^2 - 4B)(y^2 + x^2) + 2ACy - 4Cx = 0.$$

Si $(A^2 - 4B)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si les courbes (1) et (10) ne sont pas des paraboles, l'équation (13) représente un cercle qui passe par les quatre points communs aux courbes (1) et (10) et qui du reste a évidemment même centre que ces deux courbes (*) ; on conclut de là que les deux courbes (1) et (10) ont mêmes axes, et comme elles se coupent orthogonalement, il en résulte qu'elles sont homofocales.

Si $A^2 - 4B$ est nul, l'équation (13) devient

$$(14) \qquad Ay - 2Cx = 0.$$

Elle représente une droite perpendiculaire aux diamètres des paraboles (1) et (10) ; il résulte encore de là que ces deux courbes ont même axe et même foyer, puisqu'elles se coupent orthogonalement.

En résumé on voit que le lieu demandé est la trajectoire conjuguée et orthogonale qui passe par le point donné de la conique donnée.

On peut au surplus rendre plus explicite cette dernière conséquence.

Supposons d'abord que la conique donnée soit une ellipse comme dans l'énoncé du problème proposé au concours.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de la courbe rapportée à son centre et à ses axes, et $x'y'$ les coordonnées du point donné M, le lieu demandé sera une hyperbole, et si du point M comme centre avec OM, comme rayon, on décrit un cercle qui coupe l'ellipse aux quatre points M, M', M'', M''', ces quatre points, ainsi que nous l'avons montré précédemment, appartiendront

(*) C'est un principe général que si $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont les équations de deux coniques concentriques, l'équation $\varphi + \lambda\psi = 0$ où λ est une constante quelconque, appartient à une troisième conique concentrique aux premières.

aussi à l'hyperbole qui aura par conséquent les mêmes axes que l'ellipse ; son équation sera donc de la forme

$$Py^2 + Qx^2 = 1.$$

Pour déterminer les coefficients P et Q, nous aurons d'abord

$$Py'^2 + Qx'^2 = 1,$$

et comme les tangentes en M à l'ellipse et à l'hyperbole, se coupent à angles droits, on aura aussi

$$\frac{Qx'}{Py'} \cdot \frac{b^2x'}{a^2y'} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{Qx'^2}{Py'^2} = \frac{a^2}{-b^2},$$

de cette équation et de la précédente, on tire en posant

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

$$Q = \frac{a^2}{c^2x'^2}, \quad P = \frac{-b^2}{c^2y'^2};$$

d'où l'on déduit pour l'équation du lieu demandé

$$\frac{x^2}{\left(\frac{cx'}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{cy'}{b}\right)^2} = 1.$$

Ce qui est bien l'équation de l'hyperbole homofocale, qui passe par le point M, puisque

$$\left(\frac{cx'}{a}\right)^2 + \left(\frac{cy'}{b}\right)^2 = c^2.$$

Un calcul analogue conduit aux mêmes conséquences, dans le cas où la conique donnée est une hyperbole.

Supposons en dernier lieu que la courbe donnée soit une parabole ; cette courbe rapportée à son sommet et à son axe, aura pour équation

$$y^2 = 2px.$$

Soient x', y' les coordonnées du point donné M, la courbe cherchée sera une parabole, passant par le point M et son symétrique M', elle aura donc même axe que la proposée, puisque la direction de leurs diamètres est la même, et son équation sera de la forme

$$y^2 = \mathrm{P}x + \mathrm{Q}.$$

Comme les deux courbes se coupent à angles droits, on aura pour déterminer P et Q,

$$y'^2 = \mathrm{P}x' + \mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{P}p}{2y'^2} = -1,$$

ce qui conduit à l'équation suivante du lieu demandée :

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2} - x'\right)^2.$$

NOTE SUR LE MÊME SUJET.

I. La solution qu'on vient de lire ne laisse rien à désirer pour la simplicité et l'élégance. Mais nous croyons qu'il n'est pas sans utilité de traiter la même question sous un point de vue plus général.

Soient deux coniques situées dans le même plan et données chacune par une équation générale à six termes et rapportées à des axes quelconques. Concevons une droite tangente aux deux coniques, et soit $y - ax - y' + ax' = 0$ l'équation de cette droite, passant par le point (x', y') ; on aura pour la première conique l'équation de condition (t. II, p. 111),

$$a^2(mx'^2 - 2kx' + l') - 2a(ky' + k'x' + n - mx'y') +$$
$$+ my'^2 - 2k'y' + l' = 0.$$

On a une équation analogue pour la seconde conique ; ces équations devant donner les mêmes valeurs pour le coefficient angulaire a, il vient :

$$\frac{mxy - ky - k'x - n}{mx^2 - 2kx + l} = \frac{\mu xy - \varkappa y - \varkappa' x - \nu}{\mu x^2 - 2\varkappa x + \lambda},$$

$$\frac{my^2 - 2k'y + l'}{mx^2 - 2kx + l} = \frac{\mu y^2 - 2\varkappa' y + \lambda'}{\mu x^2 - 2\varkappa' x + \lambda};$$

x, y sont les coordonnées du point d'intersection de deux tangentes communes, et les lettres grecques représentent pour la seconde conique des fonctions analogues aux mêmes fonctions, désignées par des lettres romaines dans la première conique; ces équations prennent cette forme

$$\begin{gathered}\mu x\,[ly - kxy + k'x^2 + nx] + \varkappa\,[myx^2 - ly - 2k'x^2 - 2nx\,] - \\ - \varkappa' x\,(mx^2 - 2kx + l) - \nu\,[mx^2 - 2kx + l) - \\ - \lambda\,(mxy - ky - k'x - n) = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mu\,[ly^2 - 2kxy^2 + 2k'yx^2 - l'x^2] + 2\varkappa x\,(my^2 - 2k'y + l') - \\ 2\varkappa' y\,(mx^2 - 2kx + l) - \lambda\,(my^2 - 2k'y + l') + \lambda'\,(mx^2 - 2kx + l) = 0,\end{gathered}$$

prenant la valeur de y dans la première équation, et la substituant dans la seconde, on a une équation du sixième degré en x; il y a donc six points d'intersection entre les tangentes communes; par conséquent, il ne saurait exister que quatre tangentes communes; ce qu'on pouvait prévoir à priori. D'ailleurs on démontre aisément, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, que deux lignes algébriques, placées sur le même plan, l'une du degré m, et l'autre du degré n, ne peuvent avoir en commun que $mn\,(m-1)\ (n-1)$ tangentes; et dans le cas actuel $m=n=2$; on voit aussi qu'on peut simplifier les deux équations, en prenant $k = k' = 0$, $\varkappa = 0$, ce qui est toujours possible si les deux courbes ont un centre; si l'une, la première par exemple, est une parabole, alors $m = 0$, on peut faire $\varkappa = \varkappa' = 0$ et $k = 0$; si les deux sont des paraboles, alors $m = \mu = 0$, on peut encore prendre $k = \varkappa = 0$. Ce qui simplifie les deux équations.

II. Représentant les binômes de cette forme $m\varkappa - k\mu$ par $[m\varkappa]$, alors les deux équations peuvent s'écrire ainsi

$$\left.\begin{array}{l} yx^2[m\varkappa]+x^3[k'\mu]+yx[l\mu]+x^2[n\mu]+y[k\lambda]+ \\ \quad +x\left(2[k\nu]+[k'\lambda]\right)+[n\lambda]=0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y^2x[m\varkappa]+2yx^2[k'\mu]+y^2[l\mu]+2yx[k\varkappa']+x^2[m\lambda']+ \\ \quad +2y[k'\lambda]+2x[l'\varkappa]+[l\lambda']=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si les coniques sont concentriques, prenant le centre pour origine, les termes du troisième degré s'annulent ainsi que le terme en xy de la seconde équation, de sorte qu'on n'a plus que deux équations du second degré.

Si les deux coniques ont un foyer en commun, fixant l'origine à ce foyer, et prenant les axes rectangulaires, on a $l=l'$, $\lambda=\lambda'$, $n=\nu=0$. (Voir t. II, p. 427); ainsi les deux derniers termes des deux équations, ainsi que le terme en x^2 et le coefficient $[k\nu]$, disparaissent; ce qui simplifie l'équation finale. Du reste, nous reviendrons dans une autre occasion sur cette discussion importante.

III. Supposons que la seconde conique représentée par des lettres grecques, soit entièrement donnée et que la première ne soit assujettie qu'à quatre conditions; les six binômes k, k', l, l', m, n fournissent cinq rapports; supposons que l'on ait quatre équations entre ces cinq rapports, au moyen de ces quatre équations et des équations (1) et (2), on pourra éliminer les cinq rapports, et on obtiendra le lieu géométrique des intersections des tangentes communes à la conique fixe et à la conique variable. Donnons quelques exemples.

1. *La conique variable est assujettie à rester semblable à elle-même et semblablement placée.*

Fixons l'origine au centre d'homologie, alors A, B, C devient p^2A, p^2B, p^2C, D et E se changent en pD, pE et F ne changent pas, donc m, k, k', l, l', n deviennent p^4m, p^3k, p^3k', p^2l, p^2l', p^2n; substituant dans les équations (1) et (2), elles deviennent divisibles par p^2 ; et chacune ne renferme plus que p^2 et p ; éliminant cette constante arbitraire, on obtient le lieu géométrique du point de concours des tangentes communes à une conique fixe et à une conique toujours semblable à une autre conique et semblablement située, et selon les diverses suppositions que l'on fera sur la position du centre d'homologie, le lieu géométrique se simplifiera.

2. La conique variable est assujettie à n'avoir qu'un élément arbitraire.

Supposons qu'on connaisse les quatre binômes μ, ν, λ, $\varkappa$; et qu'on ait une relation entre λ' et $\varkappa'$; on tire de la première équation la valeur de $\varkappa'$, pour la substituer dans la seconde équation, où l'on prend la valeur de λ', et l'on voit que $\varkappa'$ est une fonction en x, y du troisième degré divisée par une autre fonction du même degré, et λ' une fonction du sixième degré divisée par une fonction du cinquième degré; d'après le degré de la relation entre λ' et $\varkappa'$, il sera facile de connaître la limite supérieure du degré du lieu géométrique; p. ex. si l'on a $\lambda'=a\varkappa'^2+b$, a et b sont des quantités données, le lieu géométrique ne dépassera jamais le douzième degré.

Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$; équation de la conique donnée, et $y^2+x^2-2ay-2rx+a^2=0$, l'équation de la conique ayant un paramètre r variable; on a $l=0$, $n=0$, $\mu=-4$, $\varkappa=-4r$, $\varkappa'=-4a$, $\lambda=0$, $\lambda'=4(r^2-a^2)$, $\nu=4ar$.

Faisant le calcul, on arrive à une équation du sixième degré; la conique variable est ici une ellipse dont les diamètres conjugués égaux sont constamment parallèles aux axes, et qui touche constamment l'axe des y en un point ($x=0$, $y=0$).

Supposons de plus $a=0$, l'équation finale est du troisième degré, et se décompose ainsi

$$(mx-2k)\left[(ky-k'x)^2+l'y(my-2k)\right]=0;$$

$mx - 2k = 0$, est l'équation d'une tangente parallèle à l'axe des y, et touchant la conique donnée au point diamétralement opposé à l'origine ; l'équation du lieu géométrique peut se mettre sous la forme $A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y = 0$, donc $B'^2 - 4A'C' = -4ml'k'^2$; mais $l' = E^2$; donc si la conique donnée est une ellipse, le lieu cherché est une hyperbole et *vice versâ* ; les deux courbes sont concentriques, et si la conique fixe est une parabole, le lieu cherché est aussi une parabole.

L'équation aux axes principaux est (V. t. I, p. 496), pour la conique fixe

$$ky^2(k\cos\gamma + k') + xy(k^2 + ml' - k'^2) + x^2[-2kk' + \cos\gamma(ml' - k'^2)] = 0,$$

pour le lieu cherché

$$y^2\,[\,(k^2 + ml')\cos\gamma + kk'] + xy\,(k^2 + ml' - k'^2) + \\ + x^2\,[-2kk' - k'^2\cos\gamma] = 0.$$

Ainsi les deux courbes n'ont pas les mêmes axes principaux.

Si $\gamma = 1^q$, alors on revient au problème du concours ; les axes principaux sont les mêmes, et les deux courbes se coupant orthogonalement deviennent bi-confocales, il est à remarquer que la bissectrice des deux tangentes à l'ellipse, est une tangente à l'hyperbole bi-confocale, de sorte que l'enveloppe de cette bissectrice est une hyperbole. C'est une conséquence du théorème XXIV. (Tome II, p. 538.)

Nous nous appuierons sur cette conséquence pour démontrer dans le prochain numéro, par des considérations géométriques infinitésimales le beau Théorème d'un éminent géomètre sur les *arcs semblables* dans l'ellipse (V. p. 425) ; dans le même numéro, M. Gerono donnera une solution purement synthétique du problème du concours.

Tm.

REMARQUE SUR LES LIGNES INCOMMENSURABLES.

PAR M. LEBESGUE,

Je crois qu'il est bon de démontrer en géométrie l'existence des lignes incommensurables, avant d'entamer la partie qui traite des rapports et des proportions, et d'avoir exposé la mesure des surfaces. Voici une démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, qui me semble convenir aux éléments.

Sur la diagonale AC (*fig.* 63) du carré, portez son côté $BC = AD$, tirez BD, puis DE perpendiculaire à BD; de même EF perpendiculaire à DE, de même encore FG perpendiculaire à EF, et ainsi de suite, vous aurez

$$\begin{array}{ll} AC = 1.BC + DC, & DC < BC, \\ BC = 2.DC + EC, & EC < DC, \\ DC = 2.EC + FC, & FC < EC, \\ \text{etc.}; & \end{array}$$

et ainsi de suite à l'infini. Pour la démonstration, il suffit de joindre D avec le milieu O de BE.

On voit donc que les équations se prolongent à l'infini et que par conséquent il n'y a point de commune mesure.

Mon ami M. Lionnet m'ayant demandé quelques conseils relativement à sa géométrie, dont les Annales rendent avec justice un compte avantageux, je l'ai lue avec attention. Il m'a semblé que la recherche de la plus grande commune mesure pouvait être le problème 3 du livre 3, et qu'il convenait de démontrer immédiatement sur l'exemple précédent que l'incommensurabilité existe entre certaines lignes.

Si l'auteur tient absolument à ne point séparer deux problèmes par un théorème, il peut poser ainsi la question : Trouver la commune mesure de la diagonale et du côté du carré ; cet exemple vient naturellement après l'exposé de la méthode de la commune mesure.

Note. C'est dans le dixième livre qu'Euclide commence à s'occuper des grandeurs incommensurables. La première définition de ce livre est que deux *grandeurs* sont *commensurables*, lorsqu'elles ont une commune mesure. Il démontre ensuite (Prop. V), que les grandeurs commensurables sont entre elles comme nombre à nombre, et par ce mot *nombre,* il faut toujours entendre, selon la deuxième définition du septième livre, un assemblage d'unités ; la proposition suivante (VI) démontre que les grandeurs qui sont entre elles comme nombre à nombre sont commensurables ; et par conséquent (VIII) les grandeurs qui ne sont pas comme nombre à nombre sont *incommensurables* ; une droite étant de longueur donnée, on peut trouver une infinité d'autres droites, les unes commensurables avec la droite donnée et les autres incommensurables, la droite donnée se nomme *rationnelle*, et de même les droites commensurables avec elle ; mais les droites incommensurables se nomment *irrationnelles* (définition 6). On voit donc que selon Euclide, l'incommensurabilité qualifie le rapport et *l'irrationalité* s'applique aux quantités mises en rapport. Mais jamais il ne parle de *nombre irrationnel*, cela impliquerait chez lui une locution contradictoire, et reviendrait à dire un nombre qui n'est pas un nombre. La proposition finale (CXVII) du dixième livre établit, que la diagonale du carré est incommensurable en longueur au côté du carré. Euclide en donne deux démonstrations ; voici la première d'une extrême simplicité.

Soit AC la diagonale et AB le côté du carré, si l'on avait

$\frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \frac{m}{n}$; m et n étant deux nombres premiers entre eux, l'on aurait aussi $\frac{\text{AC}^2}{\text{AB}^2} = \frac{m^2}{n^2} = 2$, donc m^2 est un nombre pair, par conséquent m est pair et n premier avec m est impair, faisons $m = 2p$, on aura $\frac{2p^2}{n^2} = 1$, donc n^2 est pair, et aussi n, ce nombre serait donc à la fois impair et pair; ce qui est absurde, donc etc. Le mot irrationnel répond à ἀλὸγοσ des Grecs; mais ce mot devrait plutôt se traduire par inexprimable, *ineffable*; les Grecs désignaient ainsi des nombres qu'on ne peut prononcer; le λογὸς signifiant en même temps *parole* et *rapport*, les traducteurs latins ont adopté cette dernière acception; quelquefois les grecs se servaient encore du mot κωφὸς, muet, pour désigner un nombre qu'on ne peut prononcer, de même que nous disons un *e* muet; mais comme le même mot grec le plus souvent veut dire *sourd*, les traducteurs ont encore adopté cette signification; de là le nom de *nombres sourds*, donné aux irrationnels.

RECTIFICATION DE L'ÉQUATION (2). (V. p. 357.)

PAR M. LOUIS FERRIER,
élève du collége royal de Mâcon.

Soient y_1 et y_2 les deux valeurs de y, on a $y_1 y_2 = -\frac{k}{h^2}$, donc

$$y_1 - \frac{b^2}{y_1} = y_1 + \frac{h^2 y_2}{k} = \frac{ky_1 + h^2 y_2}{k} = \frac{c(k^2+b^2h^2)y' + (k-b^2h^2)\sqrt{c^2y'^2+k^2}}{kh};$$

on trouve une expression analogue pour $x_1 - \frac{b^2}{x_1}$; donc on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} [c(k+b^2h^2)y' + (k-b^2h^2)\sqrt{c^2y'^2+k}]^2 + \\ + [c(k+b^2h^2)x' + (k-b^2h^2)\sqrt{c^2x'^2+k}]^2 = 4c^2h^2k^2. \end{array} \right.$$

OBSERVATION

sur la résolution numérique des équations du quatrième degré.

PAR M. CH. CHOQUET.

Pour résoudre une équation numérique du quatrième degré dont toutes les racines réelles sont incommensurables, il suffit de faire évanouir le second terme et de changer ensuite x en $\frac{1}{y}$; car la dérivée de l'équation ainsi transformée a une racine nulle, et en déterminant les deux autres racines, on peut séparer celles de la proposée par le théorème de Rolle (*).

PROBLÈME PROPOSÉ A L'EXAMEN DE 1844

POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. CH. CHOQUET.

Une corde, dans une conique, étant vue d'un foyer sous un angle constant, trouver le lieu géométrique des points d'intersection des tangentes menées par les extrémités de la corde.

On mène par le foyer d'une section conique, deux rayons vecteurs qui forment entre eux un angle donné 2α ; trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées à la courbe par les extrémités de ces deux rayons vecteurs.

Ce problème se résout très-simplement, en employant des coordonnées polaires.

(*) V. t. II, pag. 256.

L'équation de la courbe donnée est $\rho=\dfrac{p}{1-e\cos\omega}$.

L'équation de la droite qui joint les deux points (ρ', ω'), (ρ'', ω'') est

$$\rho=\frac{\rho'\rho''\sin(\omega'-\omega'')}{\rho''\sin(\omega-\omega'')-\rho'\sin(\omega-\omega')};$$

en exprimant que les deux points sont sur la courbe, on change cette équation dans la suivante

$$\rho=\frac{p}{\dfrac{\cos[\omega-\frac{1}{2}(\omega'+\omega'')]}{\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')}-e\cos\omega},$$

et en supposant que les deux points se confondent, on a pour l'équation de la tangente au point $[\rho', \omega']$

$$\rho=\frac{p}{\cos(\omega-\omega')-e\cos\omega}\ (^*).$$

L'équation de la seconde tangente est

$$\rho=\frac{p}{\cos(\omega-\omega'-2\alpha)-e\cos\omega}.$$

Pour le point de rencontre de ces deux tangentes, on doit avoir

$$\cos(\omega-\omega')=\cos(\omega-\omega'-2\alpha),$$

d'où $\quad \omega-\omega'+\omega-\omega'-2\alpha=2k\pi,\ \omega=\omega'+k\pi+\alpha,$

et en éliminant ω' entre la dernière équation et celle de la première tangente, on obtient l'équation du lieu cherché, qui est

$$\rho=\frac{p}{\pm\cos\alpha-e\cos\omega},\ \text{ou simplement}\ \rho=\frac{\dfrac{p}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{e}{\cos\alpha}\cos\omega};$$

(*) Voir t. II, p. 512.

Quand la courbe donnée est une ellipse, le lieu demandé peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole ayant le foyer et la directrice correspondante en commun avec l'ellipse.

Quand la courbe donnée est une parabole ou une hyperbole, le lieu demandé est une hyperbole.

Quand $2\alpha = 180°$, le lieu est la directrice; c'est, en effet, ce qu'on devait trouver, puisque la directrice est la polaire du foyer.

L'équation $\omega = \omega' + \alpha + k\pi$ démontre ce théorème. La droite qui joint le foyer au point de concours de deux tangentes divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs qui aboutissent aux points de contact (*).

En remplaçant l'angle 2α par son supplément, ce qui revient à remplacer α par $90° - \alpha$, on obtient un lieu différent du précédent et dont l'équation est

$$\rho = \frac{\frac{p}{\sin\alpha}}{1 - \frac{e}{\sin\alpha}\cos\omega}.$$

Lorsqu'on emploie, pour résoudre le problème, les coordonnées rectangles, on obtient à la fois les deux lieux représentés par les deux équations ci-dessus, en sorte que l'équation à laquelle on parvient est du quatrième degré et décomposable en deux facteurs du second degré.

On peut obtenir aisément, par des considérations toutes semblables à celles qui viennent d'être exposées, l'équation de la courbe tangente aux cordes qui joignent les extrémités des deux rayons vecteurs.

L'équation d'une de ces cordes est

$$\rho = \frac{p}{\frac{\cos(\omega - \omega' - \alpha)}{\cos\alpha} - e\cos\omega};$$

(*) Voir t. II, p. 553. La bissectrice coupe la corde au point où elle touche son enveloppe. Tm.

changeant ω' en $\omega'+h$, afin d'obtenir l'équation d'une seconde corde, il vient

$$\rho=\frac{p}{\frac{\cos(\omega-\omega'-h-\alpha)}{\cos\alpha}-e\cos\omega}.$$

Pour le point d'intersection des deux cordes, on doit avoir

$$\omega-\omega'-\alpha+\omega-\omega'-h-\alpha=2k\pi,$$

d'où
$$\omega=\omega'+\alpha+\frac{h}{2}+k\pi,$$

et quand les deux cordes se confondent, $\omega=\omega'+\alpha+k\pi$.

En éliminant ω' entre cette dernière équation et celle de la première corde, on obtient l'équation de la courbe demandée, qui est

$$\rho=\frac{p\cos\alpha}{1-e\cos\alpha\cos\omega}.$$

Cette courbe a encore le foyer et la directrice en commun avec l'ellipse.

Note. M. Poncelet démontre ces divers théorèmes géométriquement. (Prop. proj., p. 279). Tm.

SUR LES COURBES PARALLÈLES A L'ELLIPSE (*),

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

Parmi les formes courbes que les arts empruntent à la géométrie, on distingue particulièrement l'*ovale*, forme qui, sans être entièrement arbitraire, n'est cependant pas définie d'une manière précise. La détermination d'un type des figures ovales étant, au fond, une affaire presque tout entière de goût, il n'est nullement étonnant que rien ne soit

(*) *Voir* De lineis et superficiebus æquidistantibus. Dissertatio inauguralis Michaelis Reiss. Gottingue 1826, in-4°. — Kaestner, Comm. soc. Gottin., t. XI. — Crelle, 1822, t. II, p. 203. Tm.

arrêté sur ce point. Monge semble néanmoins avoir voulu résoudre la question, en désignant l'ellipse comme la courbe la plus gracieuse et la plus élégante, sentiment que l'autorité de ce grand maître, appuyée de la beauté réelle de l'ovale elliptique, n'a pu faire prévaloir dans la pratique. D'une part, il est douteux que les jeunes générations initiées à la géométrie des sections coniques le partagent exclusivement; nous sommes moins attachés que les anciens à certaines idées de perfection qu'ils se faisaient de quelques courbes, et que la généralité des conceptions modernes affaiblit de jour en jour. Cette espèce de culte qu'ils professaient surtout pour le cercle a dû s'étendre naturellement à l'ellipse, qui s'y rattache si étroitement, qui est après lui, en un mot, la plus connue et la plus populaire de toutes les courbes; mais s'il se retrouve aujourd'hui quelque part, c'est assurément moins que jamais chez ceux qu'éclaire la saine théorie. D'un autre côté, il est certain que la pratique du tracé de l'ellipse, notamment dans les arts de construction, n'a point encore été franchement adoptée, même par les élèves de l'école polytechnique, disciples directement ou par la tradition du célèbre Monge.

Cette déchéance s'explique, au moins en partie, par les difficultés de tracé que l'on imagine être inhérentes aux courbes continues autres que le cercle. Des constructeurs géomètres, à la tête desquels je dois citer Prony, ont cherché à les vaincre; d'autres ont, au contraire, essayé de perfectionner les méthodes, nombreuses aujourd'hui, du tracé des *anses de panier*, courbes composées d'une suite d'arcs de cercle tangents entre eux; tentatives inspirées généralement moins par le désir de trouver des procédés usuels plus faciles que par le besoin d'offrir aux yeux d'un public plus familiarisé avec l'aspect des monuments, des formes irréprochables.

Mais ces difficultés, qu'une opinion généralement accréditée persiste à vouloir éviter, ne sont pas l'objet réel de la question; fussent-elles levées, je ne crois pas que l'ellipse serait davantage adoptée comme type de la forme ovale. En effet, les deux axes de cette courbe suffisent pour la déterminer entièrement, tandis que dans les arts, il convient presque toujours, après avoir fixé la position des sommets, de disposer de la courbure en ces points, chose impossible avec une ligne du second ordre. Le tracé de l'ovale manque donc, tant que l'on s'en tient à l'ellipse, de certaines conditions essentielles, ce qui a été remarqué déjà par M. Picot, ingénieur des ponts et chaussées (*); il a exprimé le défaut de cette courbe en disant que « les cordes parallèles au » grand axe décroissent trop rapidement de cet axe au som- » met. » A son exemple, je vais tâcher d'indiquer, en remplacement de l'ovale elliptique, une autre courbe d'un degré plus élevé, mais en m'imposant comme condition de la rattacher par sa construction à l'ellipse même d'une manière assez simple pour que la notion nouvelle complète l'ancienne sans effort. La solution ainsi obtenue laissera peut-être quelque chose à désirer, n'ayant point à ma disposition de courbe d'un degré supérieur dont les propriétés soient assez saillantes pour que leur étude, en vue des applications dont il s'agit ici, pût être utile à l'enseignement sans le surcharger; persuadé d'ailleurs qu'à moins de combler une grande lacune ou de se présenter avec un attirail de propositions capables soit d'exciter un légitime intérêt, soit de piquer

(*) Annales des ponts et chaussées, 1832, 2e trimestre, p. 151. — La courbe qu'il indique s'obtient en donnant pour ordonnée à l'abscisse du point de la circonférence de rayon a, l'ordonnée de l'ellipse concentrique (b,c), au point qui se trouve sur le rayon mené de l'origine à la circonférence. L'équation est $a^2c^2y^2+b^2c^2x^2-(c^2-b^2)x^2y^2=a^2b^2c^2$. Le rapport des rayons de courbure principaux est le même que dans l'ellipse (a,b), il se réduit à $\frac{a^3}{b^3}$.

vivement la curiosité, une théorie quelque peu compliquée s'oublie bien vite, je préfère me servir de théories déjà établies, que leur application à un grand nombre d'objets a fait regarder comme indispensables.

Ce qui vient d'être dit était nécessaire pour préciser les termes du problème ; on voit maintenant à quel point de vue nous considérons les courbes *parallèles* à l'ellipse : il s'agit de faire connaître un type des figures ovales qui puisse remplacer l'ellipse dans les arts.

1. — Portons sur chaque normale de l'ellipse une même longueur, le lieu géométrique des points ainsi obtenus formera une courbe jouissant de cette propriété que : *la normale en chacun de ses points est normale à l'ellipse.*

Soient, en effet, deux normales ni, $n'i$ menées par les points n, n' de l'ellipse et se rencontrant en i ; m, m' les deux points correspondants de la courbe *parallèle;* menons les sécantes mm', nn' et prolongeons-les jusqu'à leur point de rencontre j ; on a, au moyen du théorème connu qui sert de fondement à la théorie des transversales,

$$\frac{jm}{jn} = \frac{m'm}{n'n} : \frac{m'i}{n'i}.$$

Supposons maintenant que le point n' s'approche de n, les sécantes nj, mj tendront à devenir tangentes aux deux courbes ; en même temps, le second membre de l'égalité ci-dessus converge vers l'unité, car, à cause de l'hypothèse $mn = m'n$, on a

$$\frac{in}{in'} = 1 : \frac{jn}{jn'},$$

d'où il suit que les triangles inn', imm' peuvent être, à la limite, regardés comme semblables, ce qui donne

$$\frac{m'm}{n'n} : \frac{m'i}{n'i} = 1.$$

Or, par construction, lorsque jn est devenu une tangente à l'ellipse, il se trouve perpendiculaire à ni ; donc aussi jm doit être alors perpendiculaire sur mi, c'est-à-dire parallèle à jn, sans quoi l'on ne pourrait avoir à la limite, ainsi qu'il vient d'être démontré, $jm = jn$.

Chaque normale à l'ellipse est donc aussi normale à la courbe parallèle, et réciproquement ; car à chaque normale de la première courbe correspond un point de la seconde, et en menant de ce point les normales à l'ellipse que comporte sa position, on doit en trouver une égale à la longueur constante qui sert à construire la courbe. Or, on vient de démontrer que cette normale de l'ellipse est aussi une normale de la courbe parallèle, donc, etc., C. Q. F. D.

Remarque. J'ai admis tacitement que le point i à la limite ne coïncide pas avec le point n, c'est-à-dire que le rayon de courbure de la courbe primitive n'est pas nul ; moyennant cette restriction, qui convient à l'ellipse, la démonstration précédente est applicable à une courbe quelconque, même non algébrique (*).

2. — La courbe parallèle à l'ellipse peut être regardée, en raison de la propriété qui forme l'objet de ce théorème, comme l'enveloppe d'une circonférence de rayon constant dont le centre est assujetti à demeurer sur l'ellipse ; or, à cette dernière, comme on sait, répond toujours dans l'espace une circonférence dont elle est la projection. Le cercle mobile *enveloppé* peut être considéré comme la projection d'une sphère de même rayon, dont le centre se meut sur la circonférence dont l'ellipse est la projection. L'enveloppe de cette sphère n'est autre chose que le tore ou surface annulaire, d'où il suit que la courbe parallèle à l'ellipse forme le *contour apparent* de la projection d'un tore. Sans avoir la prétention de créer un nom nouveau, je nommerai, seulement pour abréger, la courbe dont il s'agit *toroïde*, dési-

---

(*) C'est un cas particulier de la construction générale indiquée, t. II, p. 289.

gnation tirée, comme on voit, de l'une de ses propriétés les plus saillantes.

3. — De ce que la normale de la toroïde est nécessairement normale à l'ellipse, il résulte que les centres des cercles osculateurs aux points correspondants situés sur cette ligne coïncident, ou, en d'autres termes, que les rayons de courbure des deux courbes présentent une différence constante; il est évident qu'elles ont la même développée. Nous pouvons, en conséquence, regarder la toroïde comme décrite par le point d'une ligne droite qui se meut de manière à toucher la développée sans glisser dans le sens de sa longueur. On remarquera que, d'après ce qui a été dit plus haut, la toroïde se compose de deux branches décrites simultanément par les deux points de la droite mobile, également distants du point de l'ellipse, l'un du côté convexe, l'autre du côté concave. La première de ces branches est toujours de forme ovale, la seconde présente une figure variable suivant les cas : elle est ovale lorsque la distance à l'ellipse est inférieure au plus petit de ses rayons de courbure; vient-elle à le surpasser, la branche de toroïde offre quatre points de rebroussement situés sur la développée; mais si l'on fait croître la même distance au delà de la longueur du rayon de courbure maximum de l'ellipse, la branche redevient ovale. Il est très-facile de se rendre compte de toutes ces particularités.

4. — La connaissance du rayon de courbure d'une courbe étant l'un des meilleurs moyens d'en connaître les diverses affections, je rassemble ici quelques formules dont on pourra se servir utilement pour calculer la longueur de ce rayon, et, au besoin, pour le construire graphiquement.

Le rayon de courbure de la toroïde n'étant autre chose que celui de l'ellipse augmenté ou diminué d'une certaine longueur, les formules suivantes sont relatives à l'ellipse. Je suppose cette ligne rapportée à ses axes principaux a, b, c, x, y désignant les mêmes lignes que dans les traités classiques, nommons de plus N la portion de normale comprise entre la courbe et le grand axe, i l'angle qu'elle fait avec les rayons vecteurs ν, ν' menés aux deux foyers, et ρ le rayon de courbure.

On a

$$\tang i = \frac{cy}{b^2}, \qquad N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$$

et

$$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Cette dernière expression se déduit aisément de celle qui a été donnée par M. Gérono, tome II, p. 78.

Cela posé, on arrive sans peine aux formules suivantes.

1° Expression du rayon de courbure en fonction de la normale

$$\rho = \frac{N^3a^2}{b^4};$$

2° Expression du même rayon en fonction de l'angle i.

ρ peut être mis sous la forme

$$\rho = \frac{(b^4 + c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4},$$

et comme l'on a

$$\cos i = \frac{b^2}{(b^4 + c^2y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

il vient

$$\rho = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{\cos^3 i}.$$

Cette formule a été indiquée par M. Transon (*Journal de Liouville*, t. I, p. 191); elle se prête à une construction graphique élégante et facile à retrouver.

Comme moyen de vérification, il est utile de remarquer que l'on a la relation

$$\mathrm{N}\cos i = \frac{b^2}{a} \ (*).$$

3° Expression du rayon de courbure en fonction des rayons vecteurs aux foyers. On a

$$4c^2 = \nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos 2i,$$

d'où
$$\cos^2 i = \frac{\nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu' - 4c^2}{4\nu\nu'} = \frac{b^2}{\nu\nu'},$$

et enfin
$$\rho = \frac{(\nu\nu')^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

5. — Considérons à présent la courbure des sommets de la toroïde. Ce que je vais dire se rapportera uniquement à la branche extérieure de la courbe, la seule dont il y ait lieu de s'occuper en vue du tracé des figures ovales. Soit λ la distance à l'ellipse, je pose

$$\mathrm{A} = a + \lambda, \quad \mathrm{B} = b + \lambda, \quad \mathrm{R} = \frac{a^2}{b} + \lambda, \quad r = \frac{b^2}{x} + \lambda,$$

A, B, R, r étant les axes et les rayons de courbure principaux de la toroïde; l'élimination des quantités a, b donne

$$\lambda = \frac{\mathrm{RB} - \mathrm{A}^2}{\mathrm{R} + \mathrm{B} - 2\mathrm{A}},$$

et, par suite,

$$a = \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B})(\mathrm{R} - \mathrm{A})}{\mathrm{R} + \mathrm{B} - 2\mathrm{A}},$$

$$b = \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B})^2}{\mathrm{R} + \mathrm{B} - 2\mathrm{A}},$$

$$r = \mathrm{B} - \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B})^2}{\mathrm{R} - \mathrm{A}}.$$

Ces diverses formules contenant trois quantités, A, B, R, on voit que les axes principaux de la toroïde étant déter-

(*) V. t. II, p. 537. Théor. XIX. Tm.

minés, il est possible de disposer encore de R, ce qui n'a point lieu pour l'ellipse.

La dernière fait voir que r augmente avec R et converge vers la limite B. Lorsque R devient infini, on a

$$\lambda = B, \quad a = A - B, \quad b = 0, \quad r = B.$$

L'ellipse se réduit, dans ce cas, à une ligne droite de longueur $2a$, et la toroïde à deux demi-circonférences raccordées entre elles par des lignes droites; en d'autres termes, la figure représente, ainsi que l'on pouvait s'y attendre, la projection d'un tore sur un plan parallèle à son axe.

6.— La longueur de l'arc de toroïde n'est pas exprimable sous forme finie, non plus que celle de l'arc d'ellipse; le premier est égal au second, augmenté de l'arc circulaire compris, sur la circonférence de rayon λ, entre deux rayons parallèles aux normales extrêmes, de sorte que S et S_0 étant les longueurs totales de la toroïde et de l'ellipse, on a

$$S = S_0 + 2\pi\lambda.$$

La surface en dehors de celle de l'ellipse, s'obtient par l'application de la règle de Guldin, elle est égale à l'arc parcouru par le milieu de λ multiplié par cette longueur. Or l'arc parcouru est lui-même égal à la demi-somme de l'arc de toroïde, et de l'arc d'ellipse, nommons Ω l'aire totale de la courbe, nous aurons

$$\Omega = \pi . ab + \left(\frac{S + S_0}{2}\right)\lambda = \pi . ab + S_0\lambda + \pi\lambda^2.$$

Cette surface est plus grande que celle de l'ellipse, qui aurait les mêmes axes que la toroïde, pour savoir quelle est la différence, il suffit de retrancher de Ω l'aire $\pi(a+\lambda)(b+\lambda)$, on trouve qu'elle est exprimée par la formule

$$\lambda \left[S_0 - \pi(a + b)\right],$$

or on a démontré, tome III, p. 232, que S_0 est plus grand que $\pi(a+b)$, donc, etc. C.Q.F.D.

L'évaluation numérique de ces différences ne pouvant être obtenue que difficilement par les méthodes ordinaires, j'inscris ici quelques nombres propres à donner une idée de leur marche. Les longueurs d'ellipses sont extraites de la table (*) publiée dans le 3e volume du Cours de constructions de Sganzin, 4e édition. La longueur $2a$ est prise pour unité, et b varie de vingtième en vingtième :

$\frac{b}{2a}$	S_0	$\pi(a+b)$	$S_0-\pi(a+b)$	$\frac{S_0-\pi(a+b)}{S_0}$,
0,10	2,08324	1,88496	0,19828	0,09518
0,15	2,18660	2,04204	0,14456	0,06611
0,20	2,30028	2,19911	0,10117	0,04422
0,25	2,42272	2,35619	0,06653	0,02746
0,30	2,55338	2,51337	0,04011	0,01571
0,35	2,69078	2,67035	0,02043	0,00761
0,40	2,83596	2,82743	0,00853	0,00301
0,45	2,98622	2,98451	0,00171	0,00057
0,50	3,14159	3,14159	0,00000	0,00000

Les deux dernières colonnes expriment les différences rapportées au diamètre principal et au périmètre de l'ellipse. Les unes et les autres vont en décroissant à mesure que l'ellipse approche davantage de la figure circulaire, et deviennent nulles à cette limite.

7. — *Tracé en grand de la toroïde.* La facilité de tracer une courbe a bien plus d'importance pour les arts que pour la théorie. Il entre donc naturellement dans mes vues, de re-

(*) Cette table ne mérite, sous le rapport de l'exactitude, qu'une médiocre confiance. Les rapports qu'elle donne, rapprochés de ceux obtenus par M. de Saint-Guilhem, en diffèrent quelquefois dans les trois dernières décimales.

chercher pour la toroïde des moyens de description commodes et peu compliqués.

1° La construction peut s'effectuer par points, au moyen des normales de l'ellipse sur lesquelles on porte la longueur constante λ. Ce procédé a contre lui sa longueur.

2° Dans certains cas on se servira avec avantage d'un procédé indiqué par M. de Prony, lequel consiste à regarder la courbe comme l'enveloppe de ses tangentes. Il détermine les points où celles-ci rencontrent les côtés du rectangle construit sur les demi-axes a, b. Soit α la longueur interceptée par la tangente à l'ellipse sur le côté du rectangle parallèle aux x, à partir du sommet opposé à l'origine; β la portion de l'autre côté interceptée entre la même tangente et le grand axe; on divisera ce dernier côté, parallèle aux y, en n parties égales; pour une valeur de β comprenant p divisions, on aura (je supprime la démonstration),

$$\beta = p\frac{b}{n}, \qquad \alpha = \frac{2a}{1+\frac{n}{p}},$$

$$a - x = \frac{2a}{1+\frac{n^2}{p^2}}, \qquad y = \frac{2b\frac{n}{p}}{1+\frac{n^2}{p^2}}.$$

On doit remarquer l'identité

$$(2a-\alpha)(b+\beta) = 2ab.$$

A chaque tangente ainsi obtenue on mènera une parallèle qui en soit distante de la longueur λ; ce sera la tangente de la toroïde. Le point de contact sera la projection du point (x, y) sur cette tangente.

L'espace nécessaire pour ce mode de description n'excédent pas les limites du rectangle circonscrit à chaque quart de courbe, ce seul motif pourrait le faire préférer par les constructeurs, lorsque l'ovale devra présenter de grandes dimensions.

On pourrait construire des tables pour l'application de cette méthode. En les dressant pour le tracé d'une circonférence de cercle dont le rayon serait égal à l'unité, les longueurs α, $a - x$, parallèles à l'axe a, s'obtiendraient en multipliant par a les nombres donnés par les tables; de même, on calculerait les longueurs parallèles à l'axe b en multipliant les nombres correspondants par b.

3° La toroïde est susceptible d'être tracée d'une manière assez nette par les intersections successives d'une suite de circonférences de rayon λ ayant leurs centres sur l'ellipse.

4° Tracé de la toroïde d'un mouvement continu. Il serait peut-être possible d'établir un instrument qui tracerait la toroïde par un trait continu.

Soit OCO' (le lecteur est prié de faire la figure) un triangle isocèle variable, dont le côté OC ayant pour longueur $\frac{1}{2}(a+b)$ passe constamment par le centre O de la courbe, et dont la base OO' coïncide en direction avec le grand axe; on sait que le point n, pris sur le côté CO', de manière que Cn ait pour longueur $\frac{1}{2}(a-b)$, décrit l'ellipse, et que si l'on prend, sur le prolongement de OC, CI = OC, la droite In est normale à l'ellipse menée par le point n. Il suit de là que tout point m de cette droite décrit une branche de toroïde.

L'instrument se composerait de trois règles ou tiges. La première, CI, tournant autour du centre O; la seconde articulée sur la première en C et ayant son extrémité O' constamment sur le grand axe; la dernière enfin articulée en n sur CO' et assujettie à passer toujours par le point I sur le prolongement de OC, au moyen d'un anneau ou d'une *prison* qui lui permettrait de glisser dans le sens de sa longueur.

Un crayon, ou même un tire-ligne attaché en m tracerait la toroïde ; il arriverait même *que les lames du tire-ligne, une fois fixées dans le sens du trait, seront toujours dirigées convenablement par ce système.*

8. Les notions qui précèdent établissent que la branche extérieure des toroïdes, ou courbes parallèles à l'ellipse, jouit, comme type de formes *ovales*, de toutes les propriétés reconnues à cette dernière, et qu'elle permet de plus de choisir l'une des deux courbures principales ou leur rapport. De là résulte la variation possible de la forme ovale entre les limites les plus étendues qu'il soit nécessaire de considérer dans les arts, c'est-à-dire depuis une portion de ligne droite jusqu'au système de deux demi-circonférences raccordées par des portions de lignes droites.

Nous avons vu que les propriétés essentielles descriptives et métriques de cette courbe sont intimement liées à celles de l'ellipse, et que sa construction, même en grand, n'offre pas de difficultés. Ce sera peut-être pour les praticiens une raison d'en faire des applications ; mais je suis surtout convaincu que son étude, approfondie davantage, doit conduire tôt ou tard à d'intéressantes découvertes qui en feront un objet d'attention et comme un complément naturel de la théorie de l'ellipse.

Note. M. Cauchy a donné la théorie analytique des toroïdes (*Comptes Rendus*, 2e série, 1841, t. XIII, p. 1062). Soit $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$ (1) l'équation de l'ellipse,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2 \qquad (2)$$

l'équation du cercle générateur ; prenant la fonction prime de β dans les deux équations et les égalant, on obtient

$$a^2\frac{x-\alpha}{\alpha}=b^2\frac{y-\beta}{\beta}=\theta,$$

d'où
$$\alpha=\frac{a^2x}{\theta+a^2},\quad \beta=\frac{b^2y}{\theta+b^2};$$

substituant dans les équations (1) et (2), il vient

$$\frac{a^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=1,\quad \frac{\theta^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=k^2.$$

En éliminant θ, on obtiendrait l'équation des toroïdes. Passant aux coordonnées polaires, en faisant $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, il vient $r^2=\left[\frac{a^2}{(\theta+a^2)^2}\cos^2\varphi+\frac{b^2}{(\theta+b^2)^2}\sin^2\varphi\right]^{-1}$,

$$(\theta^2-a^2k^2)(\theta+b^2)^2\cos^2\varphi+(\theta^2-b^2k^2)(\theta+a^2)^2\sin^2\varphi=0.$$

Le tore est une surface du quatrième degré, les sections planes sont donc des lignes du même ordre ; le plan touchant le tore intérieurement et mené parallèlement à l'axe donne pour section une cassinoïde. Mais on n'obtient pas cette courbe par d'autres plans coupants parallèles à l'axe, ce qui est d'ailleurs évident, en faisant passer le plan par l'axe : on obtient deux cercles dont le système ne peut jamais représenter une cassinoïde. Nous donnerons incessamment une théorie de cette courbe et de la lemniscate, à laquelle, dans certains cas, elle devient identique.

Dans la dissertation de M. Reiss, citée ci-dessus, on trouve toutes les formules différentielles relatives aux lignes équidistantes, planes et à double courbure, et aussi pour les surfaces équidistantes. Tm.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

De la formule de trigonométrie $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)}$.

PAR M. VIGNAL,
professeur de mathématiques.

—

Pour résoudre un triangle rectiligne quelconque, dans lequel deux côtés b et c et l'angle compris A sont donnés, on a recours à la proportion

$$b+c : b-c :: \operatorname{tang}.\frac{1}{2}(B+C) : \operatorname{tang}.\frac{1}{2}(B-C).$$

Pour arriver à cette formule, on fait usage de proportions dont on a, il est vrai, une démonstration géométrique, mais qui n'apparaissent qu'à titre d'auxiliaires. On pourrait en éviter l'emploi de la manière suivante à l'aide de la géométrie.

Soit le triangle ABC (*fig*. 61), dont nous représenterons les côtés par a, b, c et les angles par A, B, C. Prenons, après avoir prolongé b, à droite et à gauche de A, une longueur AD et AD′ égale au côté c. Joignons BD et menons la bissectrice AE de l'angle BAD. Enfin joignons D′ et B, et élevons D′F perpendiculaire à BD′.

Les droites AE et D′B partageant DD′ et DB en deux parties égales sont parallèles, donc D′B est perpendiculaire à DB. Mais de ce que D′F est perpendiculaire à D′B, D′F et DB sont aussi parallèles.

Les deux triangles semblables CD′F, CDB donnent la proportion

$$CD : CD' :: DB : D'F,$$

ou bien

$$b+c : b-c :: \mathrm{DB} : \mathrm{D'F},$$

et en divisant les deux derniers termes par BD',

$$b+c : b-c :: \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DB'}} : \frac{\mathrm{D'F}}{\mathrm{BD'}}.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BD'}} = \operatorname{tang}\mathrm{DD'B} = \operatorname{tang}\mathrm{DAE} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}),$$

$$\frac{\mathrm{D'F}}{\mathrm{BD'}} = (\operatorname{tang}\mathrm{FBD'}) = \operatorname{tang}(\mathrm{B}-\mathrm{D'BA}) = \operatorname{tang}\left\{\mathrm{B}-\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})\right\} =$$

$$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C}),$$

donc enfin

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}.$$

THÉORÈME SUR LES MÉDIANES.

PAR M. MATHIEU (AUGUSTE),
élève du collége Stanislas.

Si on mène les trois médianes d'un triangle rectiligne quelconque :

1° On pourra toujours avec ces trois lignes construire un triangle;

2° La surface de ce triangle sera égale aux $\frac{3}{4}$ de la surface du triangle proposé.

3° Les médianes de ce triangle seront respectivement égales aux $\frac{3}{4}$ des côtés du triangle proposé (*).

(*) Ce théorème est de M. Gergonne (Annales, t. II, p. 88-94).

Soit ABC (*fig.* 62), un triangle quelconque, CQ, AP deux médianes; par le point C je mène une parallèle à AP, jusqu'à la rencontre de OB en D et je tire AD, je dis que AD est parallèle à CQ : en effet dans le triangle CBD, OP est parallèle à la base et passe par le milieu de BC, donc le point O est le milieu de BD; donc dans le triangle BAD, OQ passe par les milieux des deux côtés BD et AB est parallèle à la base. Ainsi la figure OCDA est un parallélogramme, ce qui démontrerait, si déjà cela ne l'était pas, que les médianes d'un triangle concourent en un même point et se coupent en leurs tiers à partir de la base.

De ce que la figure OCDA est un parallélogramme, il résulte que $CD = OA$, d'ailleurs $OD = OB$, donc le triangle OCD qui est toujours possible, a ses côtés respectivement égaux aux $\frac{2}{3}$ des médianes du triangle ABC, donc 1°, etc.

D'après ce que je viens de dire, le triangle formé avec les médianes du triangle ABC est semblable au triangle OCD et le rapport des côtés est $\frac{3}{2}$, par conséquent en désignant par s la surface du triangle en question, j'ai $s = \frac{9}{4}\,OCD$; mais le triangle OCD, est équivalent au triangle AOC et le triangle AOC est le tiers du triangle ABC, puisque ces deux triangles ont même base AB et que la hauteur du second est triple de celle du premier, donc en désignant par S la surface du triangle ABC, j'aurai $OCD = \frac{1}{3}\,S$ et par suite $s = \frac{3}{4}\,S$, donc 2°, etc.

Dans deux triangles semblables, les médianes sont proportionnelles et leur rapport est égal à celui des côtés; si donc je fais voir que dans le triangle OCD, les médianes sont égales aux moitiés des côtés du triangle ABC, il sera prouvé que dans le triangle construit avec les médianes de ABC, les médianes sont les $\frac{3}{4}$ des côtés de ABC ; or $CR=\frac{1}{2}AC$; comme le point O est le milieu de BD, si on joint ce point au milieu de CD, la droite de jonction sera la moitié de BC ; enfin si l'on joint le point D au milieu M de OC, comme $OC=AD=2AQ$, la figure MDAQ est un parallélogramme et $MD=AQ=\frac{1}{2}AB$, donc 3°, etc.

On voit par ce qui précède que si, considérant un triangle, on mène les trois médianes, qu'avec ces trois médianes on construise un second triangle, qu'avec les médianes de ce second triangle, on en construise un troisième, et qu'on continue ainsi indéfiniment, les surfaces de ces triangles successifs seront les termes de la progression géométrique décroissante

$$S, \frac{3}{4}S, \frac{3^2}{4^2}S\ldots\ldots$$

S étant la surface du triangle duquel on part; on voit aussi que tous les triangles de rang impair seront semblables entre eux, ainsi que tous les triangles de rang pair.

On peut encore remarquer que les sommes des carrés des côtés de ces triangles suivent aussi une progression géométrique décroissante dont la raison est encore $\frac{3}{4}$; car en partant du théorème de la médiane, on reconnaît facilement que dans un triangle quelconque, la somme des carrés des médianes est égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.

Comme applications du théorème démontré, je vais donner la solution d'un problème et la démonstration de deux théorèmes, par rapport au triangle équilatéral.

Problème. Construire un triangle dont on connaît les trois médianes.

Pour que le problème soit possible, il faut qu'avec les trois lignes données on puisse former un triangle ; cette condition étant remplie, on mène les médianes de ce triangle, et prenant des lignes égales aux $\frac{4}{3}$ de ces médianes, on a les côtés du triangle cherché ; donc lorsque le problème est possible, il n'admet qu'une seule solution.

De la solution de ce problème on peut conclure que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les médianes égales, chacune à chacune.

Théorème. Le triangle équilatéral est de tous les triangles dans lesquels la somme des médianes étant constante, le maximum est une surface.

Car dans ce triangle maximum, la surface du triangle formé avec les médianes devra être aussi un maximum, puisqu'elle est égale aux $\frac{3}{4}$ de la surface de ce triangle ; mais la somme des médianes est donnée ; donc ces médianes doivent être égales, or il est facile de voir que lorsque les trois médianes d'un triangle sont égales, ce triangle est équilatéral, donc le triangle maximum est équilatéral.

Théorème. Le triangle équilatéral est de tous les triangles égaux en surface, celui dans lequel la somme des médianes est un minimum.

Car si l'on considère le triangle dans lequel la somme des médianes est un minimum, comme la surface de ce triangle est donnée, celle du triangle formé avec les médianes, le sera aussi ; donc la somme de ces médianes ne peut être un minimum, qu'autant qu'elles sont égales entre elles ; donc le triangle dont il s'agit est équilatéral.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE.

PAR M. TRIAU,
élève de l'Institution Goudounèche.

—

Étant donnés un cercle et trois points dans le plan de ce cercle, y inscrire un triangle dont les côtés passent par les trois points.

Avant de résoudre ce problème général, qui, pris à part, offre de grandes difficultés, et que les plus illustres géomètres n'ont pas regardé comme indigne de fixer leur attention, je vais donner la solution d'un autre problème assez facile, et duquel le premier se déduira immédiatement. En voici l'énoncé :

Étant donnés un cercle et deux points pris hors de ce cercle, par ces deux points mener deux sécantes qui se coupent sur la circonférence, et telles que la ligne de jonction de leurs deux autres points d'intersection avec la circonférence soit parallèle à une ligne donnée.

Soit O le centre du cercle donné (*fig.* 65), A et B les deux points donnés et MN la ligne donnée ; supposons le problème résolu et soient IA et IB les deux droites cherchées, alors DC est parallèle à MN. Par le point D, je mène DG parallèle à AB, et je joins le point G au point C par une droite GK, qui coupe AB au point K. Si la ligne KG était connue, il est clair que tout le serait ; or je peux déterminer la ligne KG au moyen des seules données de la question.

En effet, KAC et IAB sont semblables comme équiangles, car l'angle en A est commun, l'angle $\widehat{CKA} = \widehat{CGD}$ comme alternes internes ; or $\widehat{CGD}$ et $\widehat{CID}$ sont égaux comme étant tous les deux compris dans le même segment CD ; donc $\widehat{CKA} = AIB$. Nous aurons donc

$$AK = \frac{AC \times AI}{AB}.$$

Mais le produit de chaque sécante partant d'un même point, par sa partie extérieure, étant une quantité constante, il s'ensuit que $AC \times AI$ est connu, par conséquent le point K est déterminé.

Nous avons donc déjà un point de la ligne KG ; de plus, l'angle $\widehat{GDC}$ est égal à l'angle ABM, qui est connu, donc nous connaissons la corde GC, et par conséquent la droite GK est déterminée, puisque c'est une sécante passant par un point donné et dont la partie interceptée par la circonférence est connue.

La ligne GK étant connue, je mène une parallèle à AB par le point G ; cette parallèle va couper la circonférence en un autre point D, qui est par conséquent déterminé, ainsi que le point C. Alors je connais deux points de chacune des sécantes demandées, le problème est donc résolu.

D'après la manière dont j'ai traité le problème, on pourrait être porté à croire qu'il est nécessaire, pour que les deux sécantes aillent se couper sur la circonférence, de joindre le point A au point C et le point B au point D ; mais cela serait une erreur, car si je joins le point A au point D et le point B au point C (*fig.* 65 bis), je dis que les deux sécantes se couperont encore sur le cercle. En effet, les deux triangles ADK et AIB sont semblables, car l'angle en A est commun, et nous avons de plus $AK = \frac{AI \times AD}{AB}$ ou bien

$$AK : AD :: AI : AB.$$

Donc l'angle IBA doit être égal à l'angle ADK, or IBA=BCG; donc ABK=BCG; donc le point I doit se trouver sur la circonférence.

Ce problème résolu, celui que nous avons à traiter va s'en déduire immédiatement.

Fig. 65 (*ter*). Soit un cercle dont le centre est en O et trois points A, B, C. Supposons le problème résolu et soit IML le triangle demandé, je joins le point A au point B, et, par le point L, je mène une parallèle LG à la droite AB; je mène la droite IG, qui va couper la droite AB en K. Il est clair que si nous pouvions déterminer le point K, le problème serait résolu, car il se trouverait ramené au problème que nous venons de traiter.

Or, pour déterminer le point K, nous nous y prendrons comme dans le problème précédent pour déterminer le même point, car il jouit tout à fait des mêmes propriétés. En effet, les deux triangles IBK et ABM sont semblables par la même raison que dans le problème ci-dessus; donc nous aurons, à cause de cette similitude,

$$BK : BI :: BM : AB,$$

ou

$$BK = \frac{BI \times BM}{AB}.$$

Or $BI \times BM$ est connu, nous connaissons aussi AB; donc le point K est connu. Le problème est donc ramené au suivant : *Étant donnés deux points* K *et* C, *mener par ces deux points deux sécantes* KG *et* CL *qui se coupent en* I *sur le cercle, et de manière que la ligne* GL *soit parallèle à* AB, problème qui ne diffère en rien de celui qu'on a traité ci-dessus.

Par là, nous déterminons deux sommets I et L du triangle, le problème est donc résolu.

Note. Pappus résout le problème où il s'agit d'inscrire dans une circonférence un triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés en ligne droite (lib. 7, prop. CXVII). Il ramène ce problème à celui-ci : *Inscrire dans une circonférence un triangle dont deux côtés passent par deux points donnés et dont le troisième côté soit parallèle à la droite qui réunit les deux points donnés* (lib. 7, prop. CVII). Gabriel Cramer, l'auteur des formules de ce nom (*V.* t. I, p. 125), généralisant ce problème pour trois points de position quelconque, le proposa à M. de Castillon (*), très-versé dans la géométrie des anciens; Castillon en donna une solution synthétique, déduite du problème de Pappus, que nous venons d'énoncer; elle est insérée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, 1776. La même année et dans le même recueil, Lagrange en donna une solution analytique très-simple, elle est fondée sur ce théorème : Si dans un triangle isocèle, on mène du sommet une droite quelconque à la base, cette droite, plus un des côtés, est à cette droite, moins un des côtés, comme l'unité est au produit des tangentes des demi-angles que forme cette droite avec les côtés; menant du centre du cercle trois droites aux points donnés et trois rayons aux sommets du triangle supposé construit, ce triangle sera partagé en trois triangles isocèles; prenant pour inconnues les angles que forment les rayons avec les droites, on aura en tout trois inconnues, et le théorème appliqué à chaque triangle fournit trois équations entre les produits des tangentes des angles inconnus, dont on tire facilement les inconnues. Mais la construction est moins élégante que celle qui a été donnée géométriquement d'abord par Annibale Giordano di Ottaiano, jeune Napolitain, et ensuite par Malfatti, dans la collection intitulée : *Memorie*

(*) Jean-François Salvemini, né en 1709 à Castiglione, en Toscane : d'où il a pris son nom; professeur à l'École d'artillerie et membre de l'Académie de Berlin, auteur de plusieurs traductions; mort en 1791.

di fisica e di matematica della societa italiana, t. IV.

Ces solutions sont générales et comprennent des polygones quelconques; on les trouve légèrement modifiées dans les Éléments d'analyse géométrique de Simon Lhuilier (1809), p. 280; nous en avons extrait ce qui précède. De là, ces solutions ont passé dans plusieurs recueils. — M. Servois a construit les mêmes problèmes pour les coniques en général, et en ne faisant usage que de la règle (*Ann. de Gergonne*, t. I, p. 357, 1810). C'est à cette occasion que ce savant géomètre a introduit la dénomination de *pôle d'une droite*. M. Poncelet s'est aussi occupé à diverses reprises de ce problème dans le recueil cité et dans les *Propriétés projectives* (p. 349); les constructions sont basées sur les théorèmes de Braickenridge et de Maclaurin relatifs aux polygones dont les côtés pivotent sur des points fixes, tandis que les sommets parcourent des lignes données.

A l'aide de la magnifique théorie des polaires réciproques, dont on doit aussi le développement à M. Poncelet, le problème de la circonscription des polygones dont les sommets doivent se trouver sur des droites données se ramène au problème de l'inscription, et *vice versâ*. On sait d'ailleurs que la polaire d'une conique, prise par rapport à un cercle décrit d'un foyer comme centre, est un second cercle; par là, les problèmes d'inscriptions et de circonscriptions de polygones dans les coniques se ramènent aux problèmes analogues dans le cercle. Il suffit donc de savoir résoudre ce genre de problèmes pour le cercle seulement.

On a lieu d'être surpris qu'une doctrine si facile, si abréviatrice, si riche en applications, n'ait pas encore trouvé place dans l'enseignement classique. Toutefois, s'il le fallait, j'en dirais la raison. Tm.

AIRE DE L'ELLIPSOIDE ALLONGÉ

(*V.* t. I, p. 480),

PAR M. A. PEYRONNY,
élève interne du collége de Saint-Louis (classe de M. Vincent)

—

Considérons la branche AM'B (*fig.* 64) d'une ellipse ayant pour grand axe la ligne $OA = a$ et pour petit axe la ligne $OB = b$; cette branche, en tournant autour de l'axe OA, engendrera la moitié de la surface d'un ellipsoïde de révolution; je représente par S cette surface, qu'il s'agit de déterminer.

Supposons que nous ayons divisé l'arc AD du cercle principal circonscrit en un très-grand nombre l de parties égales, dont je représente la valeur commune par k; k aura pour valeur $\frac{\pi a}{2l}$ et deviendra, quand l sera infini, l'élément du cercle, en un certain point M.

Soit K' l'élément de l'ellipse qui correspond au point M', ayant même abscisse OP; menons par les points M et M' deux tangentes qui viendront couper l'axe OA en un même point C, et représentons par m la tangente de l'angle $MCO = MOD = \alpha$, nous aurons

$$k' = k\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} = \frac{\pi}{2}a\frac{1}{l}\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} \quad (v.\ p.\ 233).$$

La demi-surface de l'ellipsoïde est égale à la somme des surfaces élémentaires engendrées par les éléments de la branche

AM'B. Soit s la surface correspondante à l'élément k', il viendra

$$s = 2\pi.\mathrm{M'P}.k' = \pi^2 a\mathrm{M'P}.\frac{1}{l}\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} =$$

$$= \pi^2 ab.\frac{1}{l}\cos\alpha\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2}m^2+1}{m^2+1}} = \pi^2\frac{ab}{l}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}m^2+1},$$

car on a

$$\mathrm{M'P} = \mathrm{MP}.\frac{b}{a} = a\cos\alpha.\frac{b}{a} = b\cos\alpha.$$

Représentons par p et q le sinus et le cosinus de l'angle α, posons $\frac{b^2}{a^2} = r^2 = \cos^2\theta$, ce qui est possible, puisque b est $< a$, et désignons par Σs la somme de toutes les surfaces élémentaires, nous aurons

$$\frac{1}{2}\mathrm{S} = \Sigma s = \Sigma\pi^2.ab\frac{q}{l}(p^2r^2+q^2)^{\frac{1}{2}} = \pi^2 al.\Sigma\frac{q}{l}\ldots\ldots$$

$$\left\{pr + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2}{r} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}\frac{p^{2\left(\frac{1}{2}-3\right)}q^4}{r^3} + \ldots\ldots\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}\frac{p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}}{r^{2n-1}} =$$

$$= \pi^2 ab\Sigma.\frac{1}{l}\left\{pqr + q\frac{\mathrm{tang}\theta}{\sin\theta}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}2p^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}\frac{q^4}{r^2} +\right.\right.$$

$$\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}p^{2\left(\frac{1}{2}+1\right)}\frac{q^{2n}}{r^{2(n-1)}}+\ldots\left.\left.\right]\right\} + \text{etc.}\Big\}$$

Cette expression devient, en posant $t = \mathrm{tang}\,\theta$ et remarquant que $r^2 = \frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{1}{2}S=\pi^2 ab\Sigma.\frac{1}{l}\left\{pqr+\frac{t}{\sin\theta}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}q^4(1+t^2)+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}(1+t^2)^{n-1}+\ldots\text{ etc.}\right]\right\}.$$

$$\frac{1}{2}S=\pi^2 ab.r\Sigma\frac{pq}{l}+$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}q^4\ldots\ldots\right]t+\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2\ldots\ldots n}p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}+\right.\\ +\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{1.2\ldots\ldots(n+1)}p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+1)}+\right.\\ +\text{etc.}\ldots\end{array}\right.$$

$$+\Sigma.\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}q^4+2.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}p^{2\left(\frac{1}{2}-3\right)}q^6+3\ldots\right]t^3$$

$$\left.+n\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{1.2\ldots\ldots(n+1)}p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}\ldots\right]t^{2n-1}$$

$$\left.+(n+1)\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{1.2\ldots\ldots(n+2)}p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+2)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ldots\right]t^{2n+1}$$

Représentons par T_{2n-1} et T_{2n+1} les coefficients des deux termes consécutifs qui contiennent t aux puissances $(2n-1)^{\text{ème}}$ et $(2n+1)^{\text{ème}}$, nous aurons

$$T_{2n+1}+T_{2n-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{1.2.\ldots.n}.\Sigma\frac{q}{l}$$

$$\left[p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}+\left(\frac{1}{2}-n\right)p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}q^{2(n+1)}+\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{2}\right.$$

$$\left.p^{2\left(\frac{1}{2}-n-2\right)}q^{2(n+2)}+\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}-n-1\right)\left(\frac{1}{2}-n-2\right)}{1.2.3}\ldots\right],$$

et remarquant que la quantité entre parenthèse revient à

$$p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n}+(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}-n}q^{2n}-p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)}q^{2n},$$

ou à q^{2n}, en vertu de la relation $p^2+q^2=1$,

$$T_{2n+1}+T_{2n-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2.\ldots.n}\Sigma\frac{q^{2n+1}}{l},$$

$\Sigma\frac{q^{2n+1}}{l}$ représente la somme des $(2n+1)^{ème}$ puissances de tous les cosinus des angles compris entre 0 et 90°, divisée par le nombre des angles, et l'on sait qu'elle a pour valeur

$$\frac{1.2.\ldots.n}{1.3.\ldots.(2n+1)}\cdot\frac{2^{n+1}}{\pi};$$

il viendra alors, en simplifiant,

$$T_{2n+1}+T_{2n-1}=\frac{\pm 2}{(2n-1)(2n+1)}\times\frac{1}{\pi},$$

d'où

$$T_{2n+1}=\frac{\pm 2}{(2n-1)(2n+1)}\times\frac{1}{\pi}-T_{2n-1},$$

le signe $+$ correspondant au cas où n est impair et le signe $-$ à celui où n est pair.

Revenons maintenant à la valeur de $\frac{1}{2}$S, nous avons

$$\Sigma\frac{pq}{l}=\Sigma\frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{l}=\frac{1}{2}\Sigma\frac{\sin 2\alpha}{l}=\frac{1}{\pi},$$

$$\Sigma\frac{q}{l}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}p^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)}q^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}p^{2\left(\frac{1}{2}-3\right)}q^4+\ldots\text{ etc.}\right]=$$

$$=\Sigma.\frac{q}{l}\left[(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}-p\right]=\Sigma\frac{q-pq}{l}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi},$$

il viendra alors

$$\frac{S}{2}=\pi^2 ab\left\{\begin{array}{l}\frac{r}{\pi}+\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\pi}.t+\left(\frac{2}{1.3}-1\right).\frac{1}{\pi}.t^3+\right.\\ \left.+\left(-\frac{2}{3.5}-\frac{2}{1.3}+1\right)\frac{1}{\pi}t^5+\ldots\right]\end{array}\right\}$$

$$=\pi ab\left\{\begin{array}{l}r+\frac{1}{\sin\theta}\left[t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+\ldots\pm\frac{1}{2n-1}t^{2n-1}+\right.\\ \left.+\left(\pm\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\mp\frac{1}{(2n-1)}\right)t^{2n+1}+\ldots\right]\end{array}\right\}$$

$$=\pi ab\left\{r+\frac{1}{\sin\theta}\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots\pm\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\mp\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\pm\ldots\right)\right\},$$

r est le cosinus de l'angle θ, t la tangente; alors la série qui est multipliée par $\frac{1}{\sin\theta}$ représente le développement de l'arc θ en fonction de sa tangente; nous aurons ainsi définitivement

$$\frac{S}{2}=\pi ab\left\{\cos\theta+\frac{\theta}{\sin\theta}\right\},$$

ou

$$S=2\pi ab\left\{\cos\theta+\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}.$$

Note. Cette belle méthode, qu'il serait facile d'abréger, est analogue à celle que Wallis employait, avant l'invention du calcul intégral, pour la quadrature des aires; le calcul suivant fait ressortir l'immense avantage des nouveaux calculs.

1° *Aire de l'ellipsoïde allongé*. On a pour expression intégrale de cette aire

$$2\pi\frac{b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-c^2x^2}=\pi\frac{b}{a^2}$$

$$\left(x\sqrt{a^4-c^2x^2}+\frac{a^4}{c}\operatorname{arc\,tang}\frac{cx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}\right),$$

faisant $x=a$ et doublant le résultat, on a pour la surface totale $2\pi ab\left(\cos\theta+\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$; lorsque $a=b$, alors $\theta=0$ et $\frac{\theta}{\sin\theta}=1$; l'aire devient $4\pi a^2$, qui est celle de la sphère.

2° *Aire de l'ellipsoïde aplati.*

$$2\pi\frac{a}{b^2}\int dy\sqrt{b^4+c^2y^2}=\pi\frac{a}{b^2}$$

$$\left[C+y\sqrt{b^4+c^2y^2}+\frac{b^4}{c}\log\left(cy+\sqrt{b^4+c^2y^2}\right)\right].$$

Si on détermine la constante pour que l'intégrale soit nulle pour $y=0$, on obtient $C=-\frac{b^4}{c}\log b^2$, faisant ensuite $y=b$ et doublant le résultat, on obtient pour l'aire totale de l'ellipsoïde aplati

$$2\pi ab\left[\operatorname{séc}\theta+\cot\theta\log\operatorname{tang}45^\circ+\frac{1}{2}\theta\right].$$

(*V*. t. I, p. 524); faisant $a=b$, on a

$$\theta=0,\quad \operatorname{séc}\theta=1,\quad \frac{\log\operatorname{tang}45^\circ+\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang}\theta}=\frac{0}{0}.$$

La dérivée du numérateur est $\frac{1}{\sin(90^\circ+\theta)}$ et celle du dénominateur est $\frac{1}{\cos^2\theta}$; donc ce rapport est égal à l'unité. Ainsi l'aire devient $4\pi a^2$, qui est encore celle de la sphère. (*V*. Moigno, t. II, p. 160.) Tm.

NOTE RELATIVE A UN THÉORÈME

sur la Cissoïde, lieu géométrique (t. II, p. 488).

PAR M. JULES MARCOU,
élève du collége de Besançon.

—

M. Terquem, dans une note à la fin de ce théorème, fait la remarque suivante. « Lorsque R devient négatif, les circonférences se touchent intérieurement, et n'ont qu'une tangente commune, toutefois la cissoïde reste réelle; que signifie-t-elle alors? » Pour trouver cette signification, il faut généraliser ainsi l'énoncé du problème.

Soient deux circonférences qui se touchent en un point fixe, l'une de ces circonférences est donnée de position et de grandeur, l'autre est d'un rayon variable; prenons le centre de similitude autre que le point de contact (qui est direct, lorsque les deux cercles se touchent extérieurement, et inverse lorsqu'ils se touchent intérieurement); de ce centre, menons le rayon *moyen* (*); et cherchons les lieux géométriques des extrémités de ce rayon moyen dans les deux circonférences. Pour la circonférence fixe ce lieu est évidemment la circonférence elle-même, et pour la circonférence variable le lieu est une cissoïde.

Si les deux circonférences se touchent extérieurement, on

(*) Prenons un point quelconque sur le diamètre d'une circonférence donnée, de ce point comme pôle menons des rayons vecteurs à la circonférence; cela posé, je désigne sous le nom de rayon moyen, le rayon vecteur qui fait le plus grand angle aigu avec le diamètre fixe; lorsque le point est intérieur, le rayon moyen est perpendiculaire au diamètre; lorsque le point est extérieur, le rayon moyen est tangent à la circonférence.

a le problème que j'ai discuté; je vais résoudre la seconde partie du problème, lorsque les circonférences se touchent intérieurement.

Je prendrai pour inconnue la distance du point de contact au centre de similitude inverse; les calculs sont plus rapides qu'en suivant la méthode que j'ai employée pour résoudre la première partie; que l'on peut aussi résoudre plus simplement en prenant pour inconnue la distance du point de contact des deux cercles, au centre de similitude directe.

Conservant les mêmes notations que dans la première partie, *fig.* 60, les deux triangles semblables ACD, BC'A me donnent

$$\mathrm{R} : \alpha :: \mathrm{C'A} : \mathrm{CA}$$
$$\mathrm{R} + \alpha : \mathrm{R} - \alpha :: \alpha : \mathrm{AC}$$
$$2\mathrm{R} : \mathrm{OA} :: \mathrm{R} + \alpha : \alpha,$$

d'où

$$\mathrm{OA} \text{ ou } x'' = \frac{-2\mathrm{R}\alpha}{\mathrm{R}+\alpha};$$

combinant cette valeur de x'' avec l'équation du cercle C', qui est $y^2 + x^2 + 2\alpha x = 0$, il vient $y''^2 = \frac{4\mathrm{R}\,\alpha^3}{(\mathrm{R}+\alpha)^2}$; éliminant α entre cette équation et la valeur de x'', on aura une équation qui représentera le lieu des points m. De x'', je tire

$$\alpha = \frac{-\mathrm{R}x}{2\mathrm{R}+x};$$

substituant cette valeur de α dans y'', il vient l'équation de la cissoïde

$$y^2 = \frac{-x^3}{2\mathrm{R}+x}.$$

Si on veut avoir le lieu des points m', il faut combiner la valeur de x'' avec l'équation du cercle C, qui est $y^2 + x^2 +$

$2Rx = 0$, puis éliminant α comme précédemment, on trouve l'équation du cercle C.

Si R est aussi variable, et qu'on donne entre α et R la relation

$$\alpha : R :: m : 1 \quad \text{ou} \quad \alpha = mR,$$

il viendra, pour le lieu géométrique des points de contact au cercle α, l'équation $y = \pm \sqrt{m}.x$, qui représente deux droites passant par l'origine; pour le cercle R, on trouve aussi deux droites passant par l'origine.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE SUR APOLLONIUS.

(Suite, voir p. 352.)

—

7. Les Coniques en huit livres; ouvrage principal dont nous allons nous occuper.

8. Eutocius, dans son Commentaire sur Archimède, cite encore un autre ouvrage d'Apollonius sous le titre inintelligible de ὠκυτόβοον; il s'agit d'une approximation de π plus approchée que celle d'Archimède; Halley conjecture qu'il faut lire ὠκυτόκιον; moyen d'obtenir vite les produits de la multiplication des grands nombres; ce qui serait une nouvelle preuve, s'il en fallait, que les Anciens ne connaissaient pas notre numération écrite, c'est-à-dire, le caractère zéro qui en est la vraie base.

9. *Sur la spirale* (Cochlea), mentionné par Proclus, II ad Eucl., p. 29.

10. Sur la comparaison de l'icosaèdre et du dodécaèdre inscrits dans la même sphère, cité par Hypsicles, liv. XIV, Eucl.

11. Sur les stations et les rétrogradations des planètes, au

moyen des Épicycles, Ptolémée, liv. XII, ch. I, au commencement.

12. *De Pyramidibus*, manusc. de la bib. du Vatican, Montfaucon, Cat. manuscript., t. 1, p. 28.

Pappus dit (liv. VII) que c'est Aristée (—350), qui le premier a publié en cinq livres, un traité des Coniques; ensuite Euclide en a publié quatre auxquels Apollonius a ajouté quatre autres. Les quatre premiers livres du texte grec existent manuscrits, à la bibliothèque royale, Bodleyenne, au Vatican, à Munich, à Milan. Apollonius n'a commencé à être connu que vers le milieu du quinzième siècle, et Regiomontanus (1) le traduisit et en projeta une édition qui ne parut point.

La première traduction latine de ces quatre livres a paru à Venise, en 1537; on la doit à Jean-Baptiste Menonius, patricien de Raguse; publiée par son fils, elle est très-défectueuse, et fourmille de fautes.

La seconde traduction est du célèbre Frédéric Commandin; elle porte ce titre : *Apollonii Pergæi Conicorum libri quatuor unà cum Pappi Alexandrini lemmatibus et commentariis Eutocii Ascalonitæ, Sereni, Antissensis philosophi, libri duo; nunc primùm in lucem edita quæ omnia nuper Federicus Commandinus Urbinas expurgata è græco convertit et commentariis illustravit, cum privilegio Pii IIII, in annos X. Bononiæ, in officinâ Alexandri Benatii*, MDLXVI; in-folio de 134 feuillets numérotés au verso seulement; l'ouvrage est dédié à Guido Ubaldo, duc d'Urbin. On a deux autres éditions, Paris 1626, et Pistoie 1696; c'est la meilleure.

Il y a encore une traduction latine de Claude Richard, jésuite, année 1655, avec un ample commentaire extrêmement prolixe et peu profond.

---

(1) Son nom est Muller; il fut surnommé Regiomontanus, de sa ville natale Konigsberg; ce qui veut dire Mont royal.

Nous citerons encore : *Apollonii Conicorum lib. IV, methodo novâ illustrati et succinctè demonstrati per Isaacum Barrow. Extant cum Archimedis operibus, et Theodosii sphæricis, per eumdem Barrow eodem modo adornatis, Lond.* 1675, 4. On sait que Newton a été le disciple, et ensuite le successeur de Barrow, dans la chaire *Lucasienne* de géométrie, fondée par le chevalier Lucas, à l'Université de Cambridge.

Ces quatre livres, longtemps seuls connus en Europe, ne pouvaient donner une idée juste du génie d'Apollonius. Aussi Descartes n'en fait-il pas grand état. Toutefois, les Arabes possédaient, depuis le neuvième siècle, une version des sept premiers livres. Ainsi dès 830, sous le calife Almamoun, on traduisit les trois premiers livres; les livres V, IV, VII furent ajoutés, pendant le même siècle, par Thebit Ben-Cora, et le tout fut soigneusement revu par Nassir-Eddin, vers 1250.

Enfin Golius, célèbre orientaliste géomètre, professeur à Leyde, rapporta de son voyage en Orient, une version arabe des sept livres d'Apollonius.

Il en écrivit au père Mersenne, en lui indiquant les commencements des livres sixième et septième (*Geomet. universæ Synopsis*, p. 274); c'était en 1644; Golius eut même l'idée d'en donner une version; mais il paraît que la nouvelle de cette découverte ne se répandit pas, car on continuait à regarder comme perdue la fin d'Apollonius, et d'éminents géomètres travaillaient à la restituer. Enfin le célèbre médecin mathématicien Joseph Alphonse Borelli, trouva dans la bibliothèque de Florence un manuscrit arabe, qu'il conjectura, d'après les figures qui l'accompagnaient, devoir être les derniers livres du grand géomètre. Ayant obtenu la permission de l'emporter, il se rendit à Rome auprès d'Abraham Echellensis (*), Maronite, arabiste : possédant, l'un la con-

(*) Ainsi nommé d'Ekel, sa ville natale.

naissance de la langue, et l'autre celle de la matière, ils en firent ensemble une traduction qui fut imprimée à Florence, en 1661 ; mais le manuscrit n'est qu'un extrait de la version de Nassir-Eddin, fait par le persan Abalphat; la traduction est augmentée des précieuses notes de Borelli.

Vers le même temps, le célèbre Rau découvrit un Apollonius arabe dans la bibliothèque de Kiel, et ignorant ce qui s'était passé en Italie, il publia une traduction sous ce titre : *Conicorum sectionum libri V, VI, VII, in Græciâ deperditi, jam vero ex arabico MS. latinitate donati, à Christiano Ravio*, 1670, *Kilone* ; mais ceci n'est encore qu'un extrait fait par le Persan Abdalmelec Schirazita, et très-mal traduit par Rau. En Angleterre, un ouvrage venu de la collection des manuscrits de Selden, déposée à la bibliothèque Bodleyenne, tomba entre les mains de Édouard Bernard, professeur Savilien d'astronomie, et savant orientaliste; il reconnut une œuvre d'Apollonius, et Halley prouva que c'était une traduction du grec, parce que, dans les figures, les lettres ne suivent pas l'ordre de l'alphabet arabe ; et il conjectura que la traduction remontait à 830, sous les auspices du calife Almamoun. Bernard entreprit la traduction, et il fut à peine à la dixième partie, qu'il mourut. D'après les exhortations d'Aldrich, professeur de théologie et doyen du collége de Christ-Church, le célèbre David Gregory corrigea la version de Bernard, et entreprit de donner une description soignée et élégante de tout l'ouvrage.

Dans cet intervalle, Wallis étant mort en 1703, et Édouard Halley l'ayant remplacé dans la chaire Savilienne de géométrie (*), Aldrich lui communiqua la version de Bernard. Narcisse Marsh, archevêque d'Armagh et primat d'Irlande, lui envoya le texte arabe de Golius, celui de Nassir-Eddin,

(*) Fondée par le chevalier Savile.

que ce haut dignitaire, fauteur des sciences mathématiques, avait acquis des héritiers du professeur de Leyde. Muni de tous ces secours, Halley, quoique ignorant presque l'idiome arabe, entreprit la version des livres en arabe, en devinant le sens d'après les figures. On lit ces détails dans l'ouvrage suivant : *Historia matheseos universæ à mundo condito ad seculum XVI*, auctore Jos. Christ, Heilbronneo, 1761 (p. 272); le reste est raconté par Halley lui-même ; Gregory (David), astronome et philologue, ayant succédé à Bernard en 1691, se chargea de la révision du texte grec et de la version latine de Commandin ; mais Gregory fut aussi enlevé en 1708, à peine arrivé à la page 64 ; de sorte que cette partie de la besogne retomba aussi sur Halley seul, et Jean Hudson, conservateur de la bibliothèque Bodleyenne, lui donna quelques secours. L'illustre géomètre, astronome et littérateur, donna la meilleure et la plus complète édition que nous ayons d'Apollonius ; et il *restitua* le livre VIII, d'après certaines données fournies par Pappus. On lit en arabe à la fin du manuscrit de Golius : « Le huitième livre n'a pas été traduit en arabe, parce qu'on ne le trouve plus en grec ; ainsi ce livre avait déjà disparu au 13e siècle ; il reste peu d'espérance de le recouvrer.

Herbelot, dans sa bibliothèque orientale, p. 119, dit : « Depuis le temps du khalife Almamoun, jusqu'en l'an 1000 et plus de l'Hégire, ce huitième livre n'a point été trouvé, et l'on croit qu'il est caché dans quelques bibliothèques des Grecs, où il est conservé précieusement à cause de sa rareté. » Aben-Moussa dit qu'outre les sept livres, on a trouvé encore quatre figures du huitième, etc., etc.

L'édition de Halley est très-rare en France, elle n'existe pas à la bibliothèque royale. Il n'y a, à ma connaissance que trois exemplaires à Paris. L'un appartenant à M. Olivier, répétiteur à l'École polytechnique ; le second à la bibliothèque de cette école, et le troisième à la bibliothèque de l'Institut, que l'on a eu la bonté de me communiquer. Nous allons en donner une suffisante description.

Voici le titre : *Apollonii Pergæi Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo, Oxoniæ, e theatro Scheldoniano,* MDCCX, in-folio IV. Cet édifice magnifique appartient à l'Université et a été élevé par le célèbre Wren, aux dépens de Scheldon, archevêque de Cantorbéri.

On ne sait rien de ce Sérénus, sinon qu'il était d'Antissa, ville de l'île de Lesbos, et qu'il a vécu avant Marinus, disciple de Proclus, ainsi qu'il résulte de la préface de ce Marinus aux *Data* d'Euclide. Il a composé un livre sur la section du cylindre, et un autre sur la section du cône, qu'on trouve ici avec la version latine; le commentaire du même géomètre sur Apollonius est perdu.

Le commentaire d'Eutoce sur les trois premiers livres, déjà traduit par Commandin, est donné avec le texte grec dans l'édition de Halley.

Eutoce était d'Ascalon en Palestine et florissait sous Justinien, vers 540; car il a dédié son Commentaire sur Apollonius à Anthemius Trallianus, et son Commentaire sur Archimède, à son précepteur, Isidore de Milet; or c'étaient les architectes de la célèbre église de Sainte-Sophie, érigée selon Procope, en 532.

Les quatre premiers livres contiennent 250 pages. En voici le titre particulier :

Απολλονίου Περγαιου Κωνίχῶν βιβλία Δ', πρότερα μετα Παππου Αλεξανδρέως λημμάτων καὶ Ευτοχῖου Ασχαλωνιτοῦ ὑπομνημάτων. — *Apollonii Pergæi Conicorum libri IV, priores cum Pappi Alexandrini lemmatis et Eutocii Ascalonitæ commentariis. Ex Codd. Mss. græcis edidit Edmundus Halleius, apud Oxonienses geometriæ professor Savilianus.*

Le texte complet de Pappus n'a malheureusement pas encore été publié; mais on trouve ici le texte des lemmes, que Pappus a donné pour servir d'éclaircissement à Apollonius; le premier livre d'Apollonius est dédié à Eudème.

Il lui dit: « Lorsque je me suis trouvé avec vous à Pergame, vous avez manifesté le désir de connaître mes travaux sur les coniques; je vous envoie le premier livre corrigé, et quand je serai mieux disposé, vous aurez les sept autres. Vous n'avez pas oublié à quelle occasion je les ai composés: c'était à Alexandrie et à la prière du géomètre Naucrate, lequel étant pressé de s'embarquer, je mis par écrit les huit livres, très à la hâte et sans les revoir. Ayant maintenant le temps, nous les éditerons, à mesure qu'ils seront corrigés. Mais il est arrivé que le premier et le second livre ont été donnés à quelques-unes de mes connaissances, avant d'être revus: vous ne devez donc pas être surpris de trouver des changements dans certaines propositions de ces huit livres. Les quatre premiers contiennent la partie élémentaire: le premier livre renferme les générations des trois sections du cône et des sections dites opposées (*); le second livre traite des diamètres, des axes et des asymptotes, et contient diverses propositions utiles pour les *diorismes* (**); le troisième livre contient beaucoup et d'admirables théorèmes utiles pour la synthèse des lieux solides, et pour les diorismes; la plupart sont beaux et nouveaux. Par occasion, nous devons faire observer qu'Euclide n'a pas bien fait la synthèse du lieu aux trois et quatre lignes (***), il n'en a traité qu'une petite partie et cela sans beaucoup de succès. Cette synthèse ne peut même bien se faire sans les théorèmes que nous avons

(*) Nom donné à l'hyperbole située sur la seconde nappe du cône.

(**) Nom donné par les Grecs aux problèmes déterminés, de διοριζω, *distermino;* les Grecs ne cultivaient même les lieux géométriques, qu'en vue de leur utilité pour les diorismes.

(***) Problème célèbre. Étant données trois ou quatre droites, trouver le lieu du point tel que les distances satisfassent à une relation donnée, ne dépassant pas le second degré.

inventés. Le quatrième livre apprend de combien de manières les coniques peuvent se rencontrer entre elles et avec la circonférence, et beaucoup d'autres propositions appartenant à une théorie complète ; ce qui n'a jamais été publié par aucun de nos devanciers ; il en est ainsi du nombre des points d'intersections que peuvent avoir les sections opposées. Les quatre autres livres appartiennent à la science la plus relevée, car le cinquième traite des maxima et minima ; le sixième, des sections coniques égales et semblables ; le septième contient des théorèmes dioristiques ; le huitième contient des problèmes dioristiques. Lorsqu'ils seront tous édités, il sera loisible à chacun d'en porter tel jugement qu'il trouvera convenable. »

On voit qu'Apollonius avait une opinion très-haute mais très-juste de ses découvertes. Pappus taxe Apollonius d'arrogance, et trouve qu'il ne parle pas avec convenance d'Euclide, son prédécesseur, tandis que celui-ci s'est montré très-juste envers Aristée, qui avait écrit sur les coniques avant Euclide; voici les paroles de Pappus, au commencement du septième livre des collections, « *Euclides autem secutus Aristæum, scriptorem luculentum, in iis quæ de conicis tradiderat, neque antevertens, neque volens eorum tractationem destruere, cùm mitissimus esset et benignus erga omnes, præsertim eos qui mathematicas disciplinas aliquâ ex parte augere et amplificare possent, ut par est, et nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans ; velut hicce est Apollonius.* » Pappus fait cette sortie à cause de la manière dont Apollonius parle ci-dessus d'Euclide, à l'occasion du problème *des trois et quatre lignes.*

Il est bien possible qu'Apollonius n'ait pas toujours rendu justice suffisante à ses devanciers et ait cherché à les primer et à démolir leurs travaux (*antevertere et destruere*); cela s'est vu, même chez d'éminents géomètres, en tout temps.

Voici comment ils s'y prennent de nos jours. Vous avez découvert, je suppose, une propriété du triangle importante, inconnue; *ils circonscrivent votre triangle dans un polygone*, s'évertuent à généraliser votre propriété, et la signalent ensuite comme un petit cas particulier; et toutefois, sans le triangle, jamais ne leur serait venue l'idée du polygone. C'est ce qu'on peut appeler la passion *absorbante*, une des innombrables ramifications de la cupidité. Apollonius peut avoir eu cette faiblesse : le génie n'en exempte pas; mais le passage incriminé par Pappus ne prouve rien, et même plutôt le contraire; car Apollonius dit expressément que les quatre premiers livres sont consacrés à l'exposition des éléments, et on n'invente pas les éléments; il dit seulement *avoir perfectionné certaines parties*, ce qui n'a rien d'extraordinaire; mais il fait ses réserves pour les quatre derniers livres, où se trouvent en effet des découvertes capitales et qui lui appartiennent incontestablement, et où il a créé la théorie des diamètres conjugués; et même, moins la dénomination, la théorie des développées des coniques, encore aujourd'hui plus complète que chez les modernes, et où son génie, devançant dix-huit siècles, marche de niveau avec le génie d'Archimède.

Le second livre est dédié au même Eudème; Apollonius l'envoie par son fils, de même nom que le père, et il recommande à Eudème de le communiquer aux personnes qui lui en paraissent dignes, et surtout au géomètre Philonide, s'il vient à Pergame, et avec lequel il avait contracté amitié à Ephèse. On voit quelle importance les auteurs attachaient, avant l'impression, à des communications officieuses, alors l'unique moyen de publicité.

Le troisième livre n'a pas de dédicace, mais le quatrième est dédié à Attale; on ne sait quelle ville il habitait. Apollonius dit qu'Eudème ayant trépassé (μετηλλαχοτος δὲ ἐκεινου), il enverra les autres livres à Attale. « Dans ce livre, je » traite, dit-il : 1° des intersections des sections coniques » entre elles et avec la circonférence; 2° des intersections » des sections coniques avec les branches opposées, avec les » secondes branches de l'hyperbole; 3° des intersections des » branches opposées entre elles. » Conon a écrit sur la première partie, mais ses démonstrations ne sont pas exactes; il a été en cela justement critiqué par Nicotèle de Cyrène; le dernier fait mention de la seconde partie comme d'une chose facile, cependant ni lui ni d'autres n'ont rien donné là-dessus; quant à la troisième partie, elle n'est même venue à l'idée de personne. Nicotèle, dans sa discussion avec Conon, avance que les inventions de Conon ne peuvent servir aux *diorismes*, ce qui est faux, elles sont au contraire très-utiles pour cet objet. »

Χωρὶς δε τῆς τοιαυτῆς εὐχρηστίας, καὶ δι' αυτὰς τὰς ἀποδείξεις, ἄξια ἔσται αποδοχῆς καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν μαθήμασι διὰ τοῦτο, καὶ οὗ δι' ἄλλο τι, ἀποδεχόμεθα.

« D'ailleurs, indépendamment d'une telle utilité, les démonstrations sont dignes d'être admises pour *elles-mêmes*, car nous admettons de même beaucoup d'autres propositions dans les mathématiques pour elles-mêmes et non pour d'autres raisons. »

Apollonius veut qu'on cultive aussi la science pour la science, et non toujours en vue d'une utilité. En effet, qui est juge de cette utilité, à quels caractères la reconnaître? Qui aurait pu prédire, au siècle d'Apollonius, que les propriétés focales des coniques joueraient le rôle le plus important dans la construction de l'univers? Pouvait-on prévoir que des propriétés de nombres amèneraient à des divisions du cercle, que quarante siècles de méditations géométriques n'ont pas su et ne savent pas encore effectuer?

Dans l'édition de Halley, la pagination recommence pour les trois livres traduits de l'arabe et pour le quatrième, restitué, en tout 171 pages. Voici le titre : *Ap. Perg. Conicorum libri tres posteriores* (*sc. V*, *VI et VII*), *ex arabico sermone in latinum conversi*, *cum Pappi Alexandrini lemmatis ; subjicitur liber Conicorum octavus*, *restitutus operâ et studio Edmundi Halleii*, *apud Oxonienses geometriæ professoris Saviliani.* — Halley a dédié les quatre premiers livres à Jean Holt, chef de la justice en Angleterre, et les quatre derniers à Marsh, archevêque d'Armagh, primat d'Irlande, *artium mathematicarum fautori summo*, *suique ordinis propè unico.*

Halley donne la description du manuscrit de Golius, devenu la propriété de cet archevêque. On lit en marge ce titre : Livre des Coniques, selon Nassir Eddin, de Téus (*). Au commencement et à la fin du livre, on trouve ces mots : Livre des Coniques d'Apollonius. Thebit ben Corah a traduit, mais Beni Moses a corrigé.

On y lit aussi que le manuscrit, commencé le 16 août 1247, a été terminé à Maraga (**) le 30 mars 1303. Ces renseignements ont été traduits, dit Halley, par Sike, professeur de littérature orientale à Cambridge ; ainsi Halley ne savait pas l'arabe.

Le cinquième livre est adressé à Attale. Le trait qui est en tête de la première ligne fait présumer que cette dédicace n'est pas complète, en voici la traduction. « Nous avons écrit dans ce cinquième livre les propositions des maxima et minima. Il est à savoir que ceux qui ont vécu avant nous et ceux de notre temps n'ont que légèrement effleuré la doctrine des minima, ils ont seulement démontré ce qui concerne, sous ce rapport, les droites qui touchent les coniques, et *vice versâ*, c'est-à-dire ce qui arrive lorsque ces lignes sont

(*) Teus est une ville de la Perse. Latitude 37°, longitude 92°.
(**) Ville entre la Médie et l'Assyrie. Latitude 37°, longitude 82°.

des *touchantes*; mais nous avons parlé de ces lignes dans le premier livre, si ce n'est que dans l'exposition nous avons omis la doctrine des minima; nous avons résolu de suivre encore le même ordre que dans les trois premières parties des éléments, ayant égard aux divers diamètres quelconques; mais comme les propriétés sont innombrables, nous avons seulement cherché pour le moment à montrer comment les choses se comportent relativement aux axes ou aux diamètres principaux. Nous avons arrangé avec soin les propositions sur les minima et nous les avons distinguées selon leurs classes; nous y avons joint la doctrine susdite des maxima, car c'est nécessaire à ceux qui cultivent la science, tant pour l'analyse et les diorismes des problèmes que pour leur synthèse; en outre, que ces choses sont du nombre de celles qui par elles-mêmes ne paraissent pas indignes de devenir un objet de méditation. »

Ce cinquième livre, honneur de l'esprit humain, est le plus beau reste de la géométrie antique : nous en donnerons toutes les propositions dans les Annales, en indiquant le mode de démonstration.

Le sixième livre, adressé à Attale, débute ainsi : « Je t'envoie le sixième livre des coniques, qui contient des propositions sur les coniques, sur les segments de ces coniques, égaux et inégaux, semblables et dissemblables, et encore d'autres propositions omises par nos prédécesseurs; car c'est dans ce livre que tu trouveras spécialement comment il faut couper un cône droit donné pour obtenir une section égale à une conique donnée, et comment on peut construire un cône droit semblable à un cône donné et passant par une conique donnée, objet que nous avons traité avec plus d'abondance et un peu plus clairement que ceux qui en ont écrit avant nous. »

Voici la dédicace du septième livre, toujours au même :

« Je t'envoie avec ceux-ci (*) le septième livre des sections coniques : il y a plusieurs propositions neuves relatives aux diamètres et aux figures construites sur ces diamètres, propositions utiles en beaucoup d'espèces de problèmes, et principalement dans leurs *diorismes*. On en rencontre plusieurs exemples dans les problèmes coniques déterminés que nous avons résolus et démontrés dans le huitième livre, qui tiendra lieu d'appendix. Nous tâcherons de te l'envoyer le plus tôt possible. » Par figure construite sur un diamètre, Apollonius désigne le rectangle ayant pour côtés le diamètre et son paramètre, ou, en termes modernes, le carré du diamètre conjugué.

C'est dans ce dernier livre qu'on rencontre non-seulement les propriétés fondamentales des diamètres conjugués, mais beaucoup d'autres propositions importantes dont nous donnerons l'énoncé.

Le huitième et dernier livre est entièrement l'ouvrage de Halley, il contient trente-trois problèmes *dioristiques* (déterminés) sur les diamètres conjugués, leurs paramètres, leurs angles maxima, minima, etc., etc.; les solutions sont fondées sur diverses propositions d'Apollonius, et principalement sur ce que ce géomètre nomme *lignes homologues* (voir p. 345). Les problèmes sont faciles par les méthodes modernes.

La pagination recommence pour Sérénus, qui contient 88 pages; il est dédié à Aldrich, doyen du collége de Christ-Church, le titre est: Σερήνου Αντισσέως φιλοσόφου περὶ τομῆς κυλίνδρου καὶ κῶνου βιβλία δυω. — *Sereni philosophi Antissensis de sectione cylindri et coni, libri duo; ex codd. Mss. græcis edidit E. Halleius*, etc.

Serenus adresse ces deux livres à son ami Cyrus. Le premier livre a pour objet de démontrer que les sections qu'on

(*) On ne dit pas avec quoi.

obtient dans le cylindre oblique sont identiques à celles qu'on obtient dans le cône oblique, ce qui n'était pas encore généralement admis.

Le second livre est uniquement consacré aux diverses propriétés du triangle qu'on obtient en menant un plan par le sommet du cône; par exemple, il cherche quel est le triangle d'aire maxima, quel est le triangle mené par l'axe ayant l'aire minima, comment il faut mener un plan pour avoir un triangle isocèle d'une aire donnée; il ne résout ce problème que pour le cône droit, et Halley, par la méthode algébrique, résout le même problème pour le cône oblique. La construction exige qu'on mène une normale par un point donné à une parabole donnée, Apollonius résout ce dernier problème en faisant couper la parabole par une hyperbole, mais Halley remplace l'hyperbole par une circonférence; il dit avoir trouvé cette construction il y a une vingtaine d'années, par conséquent vers 1690. (*V.* t. II, p. 186.) Sérénus termine le volume.

Nous n'avons point de traduction française ni d'Apollonius, ni de Sérénus, ni de Pappus; ce seraient des travaux qui, exécutés par des professeurs de l'École normale, jetteraient quelque lustre sur une institution toujours primée par l'École polytechnique; et toutefois on aurait droit de s'attendre à un résultat opposé; car à l'École polytechnique, destinée à former des hommes pratiques, les mathématiques sont des sciences auxiliaires; tandis qu'à l'Ecole normale, où doivent se former des professeurs, des théoriciens, les mathématiques sont des sciences essentielles, devant être développées dans toute leur étendue, didactique, philologique, historique. Si donc les produits des deux institutions se présentent dans un ordre inverse, cela doit tenir à quelque vice d'enseignement qu'il serait utile de faire connaître.

L'Académie des inscriptions ou la Société asiatique rendraient un grand service en s'occupant de la publication du texte arabe d'Apollonius; c'est l'unique moyen de contrôler la traduction de Halley. On peut compter d'ailleurs sur les encouragements d'un gouvernement protecteur des sciences, qui a ordonné la réimpression de Laplace et de Fermat, réimpressions sans contredit très-patriotiques, mais aussi dispendieuses et moins nécessaires que les publications que nous avons indiquées. Multiplier un ouvrage existant à la portée de tous n'est pas aussi indispensable que de mettre en lumière un ouvrage inaccessible même au petit nombre. Peyrard, dans sa traduction d'Euclide (t. II, préf. VII), annonce avoir remis à l'Académie des sciences, la traduction latine et française des sept livres d'Apollonius et le texte grec : qu'est devenu ce précieux travail? s'il existe encore, ce qui est probable, pourquoi ne pas en hâter la publication? Les fonds accordés par le gouvernement pour l'impression d'ouvrages inédits seraient ici aussi fructueusement employés qu'à éditer tant de factums du moyen-âge, qui souvent ne nous apprennent autre chose que telle église ruinée d'un village inconnu a eu pour fondateur non un nommé Abogard, mais un nommé Hincmar. Quel progrès pour la science historique en particulier et pour l'esprit humain en général! Tm.

ANNONCE.

Géométrie élémentaire, suivie de la trigonométrie rectiligne et sphérique, à l'usage des candidats aux écoles spéciales; par P. J. E. Finck, docteur ès sciences, etc. Autorisée par le conseil royal de l'instruction publique, troisième édition revue et améliorée, Strasbourg, Paris, chez Carilian-Gœury et V^{or} Dalmont, 1844.

GRAND CONCOURS (année 1844).

Étant donnés une ellipse et un point A *sur la circonférence; on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point, et l'on mène au cercle et à l'ellipse, les deux tangentes communes, autres que celle qui toucherait les deux courbes au point* A.

On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux tangentes, quand on fait varier le rayon du cercle.

Nota. *Si on représente l'ellipse par l'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on *pourra, si l'on veut, exprimer les coordonnées du point* A *en fonction d'une seule constante* φ, *de cette manière* $x = a \sin \varphi$; $y = b \cos \varphi$.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. MESNARD (ARMAND-NICOLAS),
Né le 27 janvier 1825, à Paris.
(Institution Coutant. — Collége royal Charlemagne. Professeur : M. Rouby.)

—

Première solution.

Étant donnés une ellipse et un point sur sa circonférence, on mène par ce point un cercle tangent à l'ellipse, et on demande le lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes au cercle et à l'ellipse, autres que celle qui passe par le point donné.

Prenons pour axe des y la tangente commune à l'ellipse et au cercle au point donné A, et pour axe des x la normale à ces deux courbes en ce point; l'ellipse aura pour équation

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0,$$

et en désignant par R le rayon variable du cercle, l'équation de ce cercle sera

$$y^2+x^2+2Rx=0.$$

Nommons α, β, les coordonnées inconnues du point de rencontre des tangentes communes à l'ellipse et au cercle, autres que la tangente au point A. Ces deux tangentes pourront être représentées par l'équation

$$(1) \qquad y-\beta=m(x-\alpha),$$

m ayant une valeur particulière pour chacune des tangentes.

Cela posé, la droite qui a pour équation (1), ou

$y=mx+\beta-m\alpha$ ou $y=mx+n$, en posant $\beta-m\alpha=n$,

étant tangente à l'ellipse et au cercle, les équations provenant de la substitution de $mx+n$ à la place de y dans les équations de ces courbes, devront avoir leurs racines égales, ce qui nous fournira deux relations entre m, α, β et R, puisque $n=\beta-m\alpha$. Or, en considérant R comme une quantité connue, ces deux relations seraient deux équations en m, qui devront par conséquent avoir les mêmes racines; donc, en divisant chacune de ces deux équations par le coefficient de son premier terme, les autres coefficients devront être identiques, ce qui fournira deux relations entre α, β, R, entre lesquelles éliminant R, et remarquant que α et β sont alors l'x et l'y d'un point quelconque du lieu, on aura l'équation de ce lieu.

La substitution de $mx+n$ à la place de y dans l'équation $y^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$ donne :

$$\left.\begin{array}{r} m^2 \\ +Bm \\ +C \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{c} +2mn \\ +Bn \\ +E \end{array}\right| x+n^2=0,$$

équation qui, devant avoir ses racines égales, donne :

$$(2mn+Bn+E)^2-4n^2(m^2+Bm+C)=0,$$

ou, simplifiant et remplaçant dans le résultat n par $\beta-m\alpha$:

$$(B^2-4C)(\beta-m\alpha)^2+(4Em+2BE)(\beta-m\alpha)+E^2=0\,;$$

ordonnant par rapport aux puissances de m, on aura :

$$(2)\quad \left.\begin{array}{r}(B^2-4C)\alpha^2\\ -4E\alpha\\ \end{array}\right|\, m^2 \left.\begin{array}{r}-2(B^2-4C)\alpha\beta\\ +4E\beta\\ -2BE\alpha\end{array}\right|\, m \left.\begin{array}{r}+(B^2-4C)\beta^2\\ +2BE\beta\\ +E^2\end{array}\right| =0.$$

De même, la substitution de $mx+n$ à la place de y dans l'équation du cercle $y^2+x^2+2Rx=0$, donne :

$$\left.\begin{array}{r}m^2\\ +1\end{array}\right|\, x^2 \left.\begin{array}{r}+2mn\\ +2R\end{array}\right|\, x+n^2=0.$$

Or les deux racines de cette équation doivent être égales ; donc on aura :

$$(mn+R)^2-n^2(m^2+1)=0,$$

ou, simplifiant et remplaçant n par $\beta-m\alpha$:

$$(\beta-m\alpha)^2-2mR(\beta-m\alpha)-R^2=0\,;$$

ordonnant par rapport à m, il viendra :

$$(3)\qquad \left.\begin{array}{r}\alpha^2\\ +2R\alpha\end{array}\right|\, m^2 \left.\begin{array}{r}-2\alpha\beta\\ -2R\beta\end{array}\right|\, m \left.\begin{array}{r}+\beta^2\\ -R^2\end{array}\right| =0.$$

Divisant chacune des deux équations (2), (3), par le coefficient de m^2, et égalant alors les coefficients des autres termes, il viendra :

$$\frac{(B^2-4C)\alpha\beta-E(2\beta-B\alpha)}{(B^2-4C)\alpha-4E}=\frac{\beta(\alpha+R)}{\alpha+2R},$$

$$\frac{(B^2-4C)\beta^2+E(2B\beta+E)}{(B^2-4C)\alpha-4E}=\frac{\beta^2-R^2}{\alpha+2R}.$$

La première de ces deux relations étant du premier degré en R, on en tire :

$$\alpha\left\{(B^2-4C)\alpha\beta-E(2\beta-B\alpha)+2E\beta\right\}=$$
$$=R\left\{(B^2-4C)\alpha\beta-4E\beta-2(B^2-4C)\alpha\beta+2E(2\beta-B\alpha)\right\};$$

d'où
$$R=-\frac{E(2\beta+B\alpha)}{(B^2-4C)\beta+2BE};$$

substituant cette valeur à la place de R dans la seconde relation, après avoir chassé les dénominateurs, on aura :

$$\left\{\alpha-\frac{2E(2\beta+B\alpha)}{(B^2-4C)\beta+2BE}\right\}\left\{(B^2-4C)\beta^2+2BE\beta+E^2\right\}=$$
$$=\left\{(B^2-4C)\alpha-4E\right\}\left\{\beta^2-\frac{E^2(2\beta+B\alpha)^2}{[(B^2-4C)\beta+2BE]^2}\right\};$$

d'où l'on tire, en réduisant :

$$[(B^2-4C)\alpha\beta-4E\beta]\left\{(B^2-4C)\beta^2+2BE\beta+E^2\right\}[(B^2-4C)\beta+2BE]=$$
$$=[(B^2-4C)\alpha-4E]\left\{\beta^2[(B^2-4C)\beta+2BE]^2-E^2(2\beta+B\alpha)^2\right\}.$$

Divisant de part et d'autre par $(B^2-4C)\alpha-4E$, supprimant dans les deux membres $\beta^2[(B^2-4C)\beta+2BE]^2$, et divisant alors par E^2 qui devient facteur commun aux deux membres, on a :

$$\beta((B^2-4C)\beta+2BE)=-(2\beta+B\alpha)^2;$$

développant et remplaçant α et β par x et y, il viendra :

$$(4)\quad (B^2-4C+4)y^2+4Bxy+B^2x^2+2BEy=0,$$

qui est l'équation du lieu cherché.

Cette équation, étant indépendante du terme en x et ne renfermant pas de terme tout connu, représente une courbe tangente à l'axe des x à l'origine; cherchons maintenant la nature de cette courbe.

Pour que l'équation

$$y^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$$

représente véritablement une ellipse, il faut que l'on ait la condition

$$B^2 - 4C < 0.$$

Or aucune hypothèse n'a été faite jusqu'à présent sur la quantité $B^2 - 4C$; donc, déjà, on obtiendra l'équation (4) quelle que soit la nature de la courbe représentée par l'équation

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0.$$

Mais cette équation peut représenter les trois courbes du second degré : voyons donc pour chacune de ces courbes ce que représentera l'équation (4).

Si nous supposons $B^2 - 4C < 0$, ce qui nous porte au problème énoncé, l'équation (4) donne :

$$16B^2 - 4B^2(B^2 - 4C + 4) > 0;$$

car $B^2 - 4C + 4$ est alors négatif, ou positif et plus petit que 4; donc, le lieu répondant à l'énoncé du problème est une hyperbole tangente, au point donné, à la normale à l'ellipse en ce point.

Si nous supposons $B^2 - 4C > 0$, nous aurons :

$$16B^2 - 4B^2(B^2 - 4C + 4) < 0,$$

car $B^2 - 4C + 4$ est une quantité positive plus grande que 4; donc, lorsque la courbe donnée est une hyperbole, le lieu cherché est une ellipse, qui de même que précédemment est tangente, au point donné, à la normale à l'hyperbole en ce point.

Enfin, supposons $B^2 - 4C = 0$, nous aurons :

$$16B^2 - 4B^2(B^2 - 4C + 4) = 0;$$

donc, dans le cas où la courbe donnée est une parabole, on obtient encore une parabole pour le lieu cherché.

On peut remarquer aussi que, si le point donné était l'extrémité de l'un des axes, quelle que soit la nature de la courbe donnée, le lieu cherché serait cet axe lui-même ; ce qui se conçoit alors parfaitement, à cause de la symétrie, par rapport à cet axe, des deux courbes auxquelles on mène des tangentes communes.

En déterminant les coordonnées du centre et celles des foyers dans la courbe donnée et dans la courbe cherchée, on trouve que ces points sont les mêmes dans les deux courbes.

—

Seconde solution.

Supposons que l'équation de l'ellipse soit donnée de la forme

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1,$$

on pourra alors représenter les coordonnées du point donné au moyen d'une seule constante φ, ainsi qu'il suit :

$$x'=a\sin\varphi, \qquad y'=b\cos\varphi,$$

φ étant une constante qui varie avec la position du point donné sur l'ellipse ; car alors, on a :

$$\frac{a^2\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\cos\varphi}{b^2}=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1,$$

le cercle tangent à l'ellipse ayant pour rayon R : comme son centre se trouve sur la normale à l'ellipse au point donné, en appelant p et q les coordonnées de ce centre, on aura :

$$(1) \qquad q-b\cos\varphi=\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(p-a\sin\varphi),$$

et, puisque le cercle est tangent à l'ellipse, on aura :

$$(2) \qquad \mathrm{R}^2=(q-b\cos\varphi)^2+(p-a\sin\varphi)^2.$$

Maintenant, si nous représentons les coordonnées du point du lieu, correspondant au cercle dont le rayon est R, par α et β, nous aurons pour la tangente commune à ce cercle et à l'ellipse passant par ce point, l'équation

$$y = mx + (\beta - m\alpha).$$

Or, cette ligne devant être tangente à l'ellipse, on aura :

$$(\beta - m\alpha)^2 = a^2m^2 + b^2; \tag{3}$$

de plus, devant être tangente au cercle, cette droite devra être distante du centre de ce cercle de la quantité R, donc il faudra poser :

$$\frac{q - mp - (\beta - m\alpha)}{\sqrt{1+m^2}} = \mathrm{R}. \tag{4}$$

Éliminant p et q entre les équations (1), (2), (4), l'équation résultante en m, devra donner pour cette inconnue les mêmes valeurs que celles qu'on tirerait de l'équation (3); donc si on divise chacune de ces deux équations par le coefficient de son premier terme, les coefficients des autres termes devront être identiques dans les deux équations, ce qui donnera deux relations entre lesquelles éliminant R, on aura l'équation du lieu cherché en remplaçant dans le résultat de l'élimination de R, α par x, et β par y.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS DE 1844.

(V. p. 377.)

—

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Étant donnés une ellipse et un point A *sur la circonférence ;*

on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point, et l'on mène au cercle et à l'ellipse les deux tangentes communes, autres que celle qui toucherait les deux courbes données au point A. *On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux tangentes, quand on fait varier le rayon du cercle?*

La solution que nous allons donner est fondée sur les propositions suivantes :

1. *Le centre du cercle inscrit dans un triangle* ABC (fig. 66), *est situé sur la droite* ML, *menée du milieu* M *d'un des côtés* BC *du triangle, au milieu* L *de la droite* AD *qui joint le sommet* A, *opposé au côté considéré* BC, *au point de tangence* D *de ce côté et du cercle inscrit.* Et de même, *le centre* O' *du cercle qui touche un côté* BC *d'un triangle et les prolongements des deux autres côtés* AB, AC, *est sur le prolongement de la droite* ML', *menée du milieu* M *du premier côté, au milieu de la droite* AD' *qui joint le sommet opposé* A *au point de tangence* D' *de ce côté et du cercle ex-inscrit.*

En effet, concevez une hyperbole dont les foyers soient B et C, et qui passe par le point A; elle aura pour sommets D et D', car DC — DB = AC — AB, et d'ailleurs D'C = DB. Les droites DO, D'O', perpendiculaires à BC, aux points D, D', seront tangentes à l'hyperbole, à ses sommets ; et la bissectrice AOO' de l'angle BAC des rayons vecteurs AB, AC, touchera aussi la courbe au point A. Les droites ML, ML' sont les diamètres de l'hyperbole, menés par les milieux des cordes de contact AD, AD'; donc, la droite ML passe par le point O d'intersection des tangentes DO, AO ; et de même, la droite ML' doit passer par le point d'intersection O' des tangentes AO', D'O'.

La même proposition s'applique aux ellipses inscrites dans un triangle, et aux ellipses ex-inscrites : c'est ce que l'on reconnaît immédiatement en plaçant ces ellipses sur des cylindres droits à bases circulaires.

2. *La droite qui unit les milieux* M, L *des diagonales d'un quadrilatère* ABCD (fig. 67), *circonscrit à un cercle, passe par le centre* O *de ce cercle.*

Les sommes des côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit étant égales entre elles, on a : AC — AB = DC — DB ; et par conséquent l'hyperbole dont les foyers sont B et C, et qui passe par le point A, contiendra aussi le point D. Les bissectrices AO, DO des angles BAC, BDC, seront tangentes à la courbe aux points A, D. La droite LM est menée du milieu L de la corde des contacts au centre M de l'hyperbole : donc, elle contient le point O d'intersection des deux tangentes (*).

Cette proposition convient aussi à l'ellipse inscrite dans un quadrilatère ; et c'est encore ce qui résulte simplement de ce qu'on peut placer l'ellipse sur un cylindre droit à base circulaire. Je ferai, de plus, observer qu'il est toujours possible d'inscrire dans un quadrilatère convexe ABCD (*fig.* 68), une ellipse dont le centre soit un point donné O, sur la droite LM qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère. Nous supposons que le quadrilatère ABCD n'est pas un parallélogramme, autrement les points L, M coïncideraient. Ainsi, deux des côtés opposés de ce quadrilatère se rencontreront en un point F, en formant le triangle FCD. Or, si l'on inscrit dans le triangle FCD une ellipse dont le centre soit le point O, cette ellipse touchera nécessairement le quatrième côté AB du quadrilatère.

Car, si l'ellipse ne touche pas la droite AB, on pourra, par le point A, mener une droite AG, autre que AB, et tangente à la courbe. Le quadrilatère AGDC étant circonscrit à l'ellipse, la droite LO, menée du milieu de l'une des diago-

---

(*) On peut aussi déduire ce théorème et le précédent des propositions de la géométrie élémentaire ; voyez les notes placées à la fin de cet article.

nales AD au centre O de l'ellipse, devra couper l'autre diagonale CG en son milieu, au point I. Les points M, I étant respectivement les milieux des droites CB, CG, il faudra que IML soit parallèle à GB. En menant par le point B une tangente à l'ellipse, on prouverait, de même, que ML est parallèle à CA. Par conséquent les deux droites DB, CA seraient parallèles ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Et de là, nous conclurons que : *si les bissectrices* AO, DO *de deux angles opposés d'un quadrilatère convexe* ABCD (fig. 67), *se coupent en un point* O, *situé sur la droite* LM *qui unit les milieux des diagonales*, *ce quadrilatère sera circonscriptible au cercle.*

En effet, si l'ellipse inscrite dans le quadrilatère ABCD, et qui a son centre au point O, ne se réduisait pas à une circonférence lorsque ce point se trouve à la fois sur les bissectrices AO, DO de deux angles opposés BAC, BDC, il faudrait que ces deux bissectrices fussent perpendiculaires l'une à l'autre, puisqu'elles seraient dirigées suivant les deux axes de l'ellipse (*). Alors, la somme des trois angles BAO, BDO, ABD du quadrilatère convexe ABDO serait égale à trois angles droits. Il en résulterait $BAO+BDO>90°$, d'où $CAO+CDO>90°$, et par suite la somme des trois angles BAC, BDC, ABD du quadrilatère ABDC serait plus grande que celle des quatre angles du quadrilatère ABDO, et surpasserait quatre angles droits ; ce qui est impossible.

3. *Si d'un point* M *pris hors d'une ellipse* (fig. 69), *on mène deux tangentes* MD, MD' *à la courbe*, *et deux droites* MF, MF' *aux foyers*, *la bissectrice de l'angle des tangentes divisera*

(*) Nous supposons que les bissectrices AO, DO se coupent; si elles étaient en prolongement l'une de l'autre, elles coïncideraient avec la diagonale AD, et dans ce cas, le quadrilatère ABCD serait évidemment circonscriptible, puisque les bissectrices de trois angles consécutifs de ce quadrilatère se rencontreraient en un même point.

aussi en deux parties égales l'angle des deux droites menées aux foyers.

Sur les prolongements des rayons vecteurs F'D, F'D', je prends DE = FD, et D'E' = FD'. Les droites F'E, F'E' seront égales au grand axe de l'ellipse ; et d'ailleurs, les tangentes MD, MD' étant perpendiculaires sur les milieux des droites FE, FE', on aura ME = MF = ME' : ainsi, les triangles F'ME, F'ME' seront équiangles entre eux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que l'angle F'ME' = F'ME = $\frac{1}{2}$ E'ME. Or, les tangentes MD', MD divisant en parties égales les angles E'MF, EMF, on a aussi D'MD = $\frac{1}{2}$ E'ME ; donc, D'MD = F'ME, ou D'MF' = DME = DMF, et par conséquent la bissectrice de l'angle D'MD divise en parties égales l'angle F'MF.

L'égalité des triangles F'ME', F'ME donne encore E'F'M = EF'M ; ainsi, *la droite* F'M *qui joint un des foyers au point de concours des tangentes est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés de ce foyer aux deux points de contact.* (*V*. t. II, p. 538.)

4. Il est maintenant facile de résoudre la question proposée.

Soient F, F' les foyers de l'ellipse donnée (fig. 70); A le point auquel la circonférence, dont le rayon AO est variable, touche l'ellipse; et QAR, PQN, PRN' les tangentes communes à ces deux courbes; H, G les points de rencontre des rayons vecteurs FA, F'A et des droites PF', PF. Si l'on joint le milieu L de PA au milieu M de QR, la droite LM contiendra le centre O du cercle inscrit dans le triangle PQR. Le prolongement de cette droite passera par le centre C de l'ellipse qui touche le côté QR au point A, et les prolongements des côtés PQ, PR aux points N, N' (n° 1). La droite LM contient encore le milieu I de la droite HG, car les milieux L, I, C des trois diagonales PA, HG, F'F d'un quadrilatère *complet* PHAGF'F, sont situés sur une même droite. De plus, la ligne AO, prolongement de la normale AS à l'ellipse au point A, divise en parties égales l'angle HAG opposé au sommet de l'angle F'AF des rayons vecteurs; et la droite PO, bissectrice de l'angle N'PN des tangentes menées à l'ellipse par le point P, divise aussi en parties égales l'angle F'PF des droites PF', PF, menées du point P aux foyers de l'ellipse (n° 3). Donc, les bissectrices AO, PO de deux angles opposés du quadrilatère AHPG, se coupent en un point O de la droite LI qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère, et par conséquent le quadrilatère AHPG est circonscriptible à un cercle dont le centre est au point O (n° 2, page 498). Nommons D, D', E, E' les points auxquels la circonférence inscrite touche les quatre côtés du quadrilatère AHPG, et nous aurons, à cause de l'égalité des tangentes PE', PE :

$$PF' - PF = F'E' - FE = F'D - FD' = F'A - FA.$$

Ainsi, la différence des distances du point P aux foyers F', F, est égale à la différence des rayons vecteurs F'A, FA; donc, le lieu géométrique du point P est une hyperbole dont les foyers sont ceux de l'ellipse, et qui passe par le point A donné sur cette courbe.

La normale AS à l'ellipse est tangente à l'hyperbole; ces deux courbes se coupent à angle droit.

5. Si la courbe donnée, au lieu d'être une ellipse, était une parabole ou bien une hyperbole, la détermination du lieu géométrique proposé résulterait encore simplement des principes que nous venons d'établir, en ayant soin, toutefois, d'y apporter les modifications qui servent à passer des propriétés fondamentales de l'ellipse à celles des deux autres courbes du second degré. Quoique cette recherche ne puisse offrir aucune difficulté, nous résoudrons encore la question proposée

pour le cas de la parabole, en étendant à cette courbe les théorèmes des n^{os} 1 et 3.

Supposons qu'une parabole, (*fig.* 71), touche la base BC d'un triangle ABC au point D, et les prolongements des deux autres côtés AB, AC, aux points E, E' : la droite ML qui joint le milieu M de la base au milieu L de la droite AD, menée du sommet du triangle au point de contact de la base, sera parallèle à l'axe de la parabole.

Cette propriété peut être déduite de la proposition du n° 1, en assimilant la parabole à une ellipse dont le centre est à l'infini, ou bien en plaçant la parabole sur un cône droit à base circulaire; mais on peut aussi la démontrer directement de la manière suivante :

Par le sommet A du triangle ABC, je mène une parallèle AO à l'axe de laparabole ; elle divisera en deux parties égales la corde des contacts EE'. Par conséquent, les parallèles EG, E'G' menées à la base BC, jusqu'à la rencontre de AO, seront égales entre elles. Soient N, N' les points de rencontre de ces droites EG, E'G' et de la parallèle à l'axe qui passe par le point D : on aura $E'N' - EN = 2NG = 2DI$. Mais, la sous-tangente HN étant double de l'abscisse DN, on a $EN = 2BD$, et de même $E'N' = 2CD$; donc, $CD - BD = DI$; d'où $CI = BD$. Il s'ensuit que le point M, milieu de BC, est aussi le milieu de DI ; donc, LM est parallèle à la droite AIO ; c'est ce qu'il fallait démontrer, puisque AO est parallèle à l'axe de la parabole.

Si d'un point C *situé hors d'une parabole* (fig. 72), *on mène à cette courbe deux tangentes* CD, CE, *et une droite* CF *au foyer* F, *la bissectrice de l'angle* DCE *des tangentes divisera en deux parties égales l'angle* FCL *que forment la droite* CF *dirigée au foyer et une parallèle* CL *à l'axe*, *conduite par le point* C *donné.*

En effet, abaissez des trois points D, C, E des perpendiculaires DG, CM, EH sur la directrice GH, et tirez les droites CG, CF, CH ; les triangles GDC, CDF seront égaux, car l'angle CDG = CDF, et, de plus, DG = DF. De même, les triangles CEH, CEF seront égaux entre eux ; ainsi, CG = CF = CH. Les droites CD, CE, CM étant respectivement les bissectrices des angles GCF, FCH, HCG, dont la somme vaut quatre angles droits, on aura GCD + FCE + GCM = 180° ; d'ailleurs, GCD + DCL + GCM = 180° ; donc, FCE = DCL. Il s'ensuit que la bissectrice de l'angle DCE divise en deux parties égales l'angle FCL.

6. Au moyen de ces remarques, on déterminera facilement le lieu géométrique cherché.

Soient F le foyer de la parabole donnée ; O le centre du cercle tangent à la parabole au point A (*fig.* 73) ; QAR, PQD', PRD les tangentes communes aux deux courbes ; N, E les points d'intersection des droites FA, FP, et des parallèles à l'axe SF de la parabole, menées par les points P et A. Si l'on joint le milieu M de QR au milieu L de PA, par la droite ML, cette droite passera par le point O (n° 1), et sera parallèle à l'axe SF de la parabole (n° 5) ; ainsi, le point O est à des distances égales OG, OG' des deux parallèles AE, PN. D'ailleurs, la droite PO, bissectrice de l'angle QPR des tangentes PQD', PRD, divise en deux parties égales l'angle NPE (n° 5). De plus, la droite AO, prolongement de la normale au point A, est aussi la bissectrice de l'angle NAE : donc, la circonférence décrite du point O comme centre avec OG' pour rayon, touchera les quatre côtés du quadrilatère NPEA, en des points G', I, G, I'. L'égalité des tangentes FI', FI donne FA + AG = FP — PG' ; il en résulte que si l'on prend AK = AF et PH = PF, on aura GK = G'H, et par suite la droite HK sera parallèle à GG', c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de la parabole. La position de la droite HK est invariable, puisqu'elle passe par le point K. Donc, le point P appartient à une parabole dont le foyer est F, et qui a pour directrice la droite HKR′, parallèle à la directrice de la parabole donnée, à une distance du point A égale au rayon vecteur FA. Les directrices des deux paraboles sont à égales distances du point donné A, mais de différents côtés de ce point. Les deux courbes se coupent sous un angle droit au point A, car la normale AO, à l'une d'elles, est tangente à l'autre.

On trouvera, de même, que si la courbe donnée est une hyperbole, le lieu géométrique demandé est une ellipse dont les foyers seront ceux de l'hyperbole, et qui passera par le point donné sur cette hyperbole.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Par un point O *pris sur le prolongement d'un diamètre* BA *d'un cercle, on mène une sécante quelconque qui rencontre le cercle en deux points* M, M′ (fig. 74), *et de ces points on mène au centre* C *deux rayons* MC, M′C : *prouver que le produit de tang* $\frac{1}{2}$ MCA *par tang* $\frac{1}{2}$ M′CA *est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

Au point O, élevez sur OC la perpendiculaire ODD′ qui rencontre en D et D′ les droites menées des points M, M′ à l'extrémité B du diamètre ACB. En prenant BO pour rayon, la droite OD sera la tangente de $\frac{1}{2}$ MCA, et OD′ la tangente de $\frac{1}{2}$ M′CA. Or, les quatre points M, M′, D, D′, appartiennent à une même circonférence, car les angles DD′M′, DMM′ sont supplémentaires. En effet, l'angle DD′M′, complément de M′BA, doit avoir pour mesure la moitié de l'arc BM′, il est donc égal à l'angle M′MB, qui est adjacent à l'angle DMM′. Puisque les quatre points M, M′, D, D′ sont situés sur une même circonférence, on a $OD.OD' = OM.OM' = OA.OB$; donc, $\text{tang}\,\frac{1}{2}\,MCA \times \text{tang}\,\frac{1}{2}\,M'CA = OA \times OB$, quelle que soit la direction de la sécante OMM′.

Notes. On peut démontrer les théorèmes des nos 1 et 2 (p. 496, 497), au moyen des Propositions de la géométrie élémentaire.

1. Je suppose que le cercle inscrit dans le triangle ABC (*fig.* 75), touche la base BC au point D ; par ce point et le centre O du cercle, je mène le diamètre DOE ; puis, je joins le sommet A du triangle à l'extrémité E du diamètre DOE, par la droite AE dont le prolongement coupe la base BC au point D′ : ce dernier point sera celui auquel le cercle tangent à la base BC et aux prolongements des deux autres côtés AB, AC, touche la base BC du triangle. C'est ce que nous allons d'abord démontrer.

J'élève sur BC, au point D′, la perpendiculaire D′O′E′ qui rencontre aux points O′, E′ les prolongements des droites AO, AD ; et je mène, des points O, O′, des perpendiculaires OG, O′G′ sur AB. Il en résulte : $OG:O'G'::AO:AO'::OE:O'D'$. Mais $OG=OE$; donc, $O'G'=O'D'$; et par conséquent le point O′ est le centre du cercle ex-inscrit au triangle ABC. Ce cercle touche la base BC au point D′, puisque le rayon O′D′ est perpendiculaire sur BC.

Maintenant, je dis que les droites MO, MO′, menées du milieu M de BC aux centres O et O′, passent par les milieux L, L′ des droites AD, AD′. En effet, les tangentes BD, CD′ sont, comme on sait, égales entre elles ; ainsi, le point M, milieu de BC, est le milieu de DD′. La droite MO divise en parties égales les côtés DD′, DE du triangle DD′E : elle est donc parallèle à D′EA ; et par conséquent elle divisera DA en deux parties égales au point L. De plus, $D'O'=O'E'$, puisque $EO=OD$; donc, la droite O′M est parallèle à E′D ; il s'ensuit qu'elle partage en deux parties égales la droite AD′ au point L′.

Je ferai encore observer que le produit des rayons OD, O′D′ est égal au produit des tangentes BD, BD′. Car les triangles BOD, BO′D′, semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, donnent la proportion OD:BD'::BD:O'D'.

2. La droite qui unit les milieux M, L des diagonales BC, AA' d'un quadrilatère ABCA' (*fig.* 76), circonscrit à un cercle, passe par le centre O de ce cercle.

En effet, inscrivez des cercles dans les triangles ABC, A'BC, ils toucheront la base commune BC en un même point D. Car, le quadrilatère étant circonscriptible, on a AC — AB = A'C — A'B; mais la différence AC — AB est égale à la différence des distances DC, DB des extrémités de la base BC du triangle ABC, au point de contact D de la base et du cercle inscrit, et il en est de même pour le triangle A'BC; donc, les cercles inscrits dans ces triangles toucheront la base commune au même point. Les diamètres DGE, DG'E' de ces deux cercles, menés par le point D, seront en prolongement l'un de l'autre, sur une perpendiculaire à la droite BC. Les deux droites AE, A'E' couperont la base BC en un même point D', qui sera le point de contact de la base BC et des cercles ex-inscrits aux deux triangles (note 1). Enfin, si l'on prolonge les deux droites AD, A'D, jusqu'à ce qu'elles rencontrent en des points F, F' la perpendiculaire élevée sur BC au point D', les droites D'F, D'F' seront les diamètres des cercles ex-inscrits aux triangles ABC, A'BC, et qui touchent la base BC au point D'.

Cela posé, on aura D'F':DE::D'F:DE', car les produits DE $\times$ D'F, DE' $\times$ D'F' sont égaux entre eux, puisque chacun d'eux est égal à 4.BD.BD' (note 1); il s'ensuit HF':HD :: FH': H'D, et par conséquent la droite HH' est parallèle à F'F et à E'E. Le milieu de cette droite HH' sera le centre O du cercle inscrit dans le quadrilatère ABCA', car les bissectrices AG, A'G' des angles BAC, BA'C, divisant en deux parties égales les diamètres DE, DE', devront passer par le milieu de HH'. La ligne D'C étant égale à BD, le point M, milieu de BC, est milieu de D'D. Ainsi, les trois points M, O, L sont les milieux des diagonales D'D, H'H, A'A du quadrilatère complet H'D'HDA'A. Donc, ces trois points sont en ligne droite. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. CHASLES,

sur les arcs semblables *d'une conique; et autres considérations sur les arcs curvilignes.*

I. Théorème 1. Une sécante coupe une courbe plane en deux points M et M', par ces points menons des tangentes se rencontrant en un point I; supposons que la sécante tourne infiniment peu autour d'un point fixe O, situé sur la sécante, et que les points de rencontre deviennent respectivement m et m': on a la proportion $\frac{Mm}{M'm'} = \frac{OM.MI}{OM'.M'I}$.

Voir la démonstration p. 183 et 184 (IV et V).

Observation. Le théorème est dû à Newton, il sert de base à ses applications du calcul *fluxionnel* à des questions de géométrie (*).

II. Une droite D et une conique C étant situées dans le même plan, sur D prenons deux points I et i infiniment voisins. Soient MM' la polaire du point I, et mm' celle du point i; le point d'intersection O sera le pôle de la droite D, et le théorème précédent donne le rapport fini auquel est égal le rapport différentiel $\frac{Mm}{M'm'}$.

(*) *Tractatus de quadraturâ curvarum. Introductio.* — Cet ouvrage a paru en 1706, à la suite de *Enumeratio Linearum*, etc.

III. Il existe encore une autre relation pour ce rapport différentiel. Soit N le point de rencontre des deux tangentes consécutives IM, im : MNm est l'angle de contingence; portons NI sur Ni de N en P, de sorte qu'on a :

$$iP = iN - IN = im - IM - (mN + MN) = iI \cos iIP,$$

car le triangle IiP est rectangle en P. On aura de même de l'autre côté de Ii :

$$iP' = iN' - IN' = Im' - IM' - (m'N' + M'N') = iI \cos iIP'.$$

Les points analogues sont désignés par les mêmes lettres accentuées. Fixons sur la conique un point R entre M et M'; soient I$m = t$, I$m' = t'$, RM $= s$, RM' $= s'$, $im -$ IM $= dt$, I$m' -$ IM' $= dt'$: mN + MN $= m$M $= ds$, m'N' + M'N' $= ds'$, car dans le triangle mNM l'angle diffère infiniment peu de deux angles droits. On a donc $\dfrac{\cos . iIP}{\cos iIP'} = \dfrac{dt - ds}{dt' - ds'}$.

IV. Si, au lieu de la droite D on prend une courbe quelconque C', les angles iIP, iIP' sont les angles que forme la tangente à la courbe C', passant par I, avec les tangentes IM, IM' menées par ce point à la conique C ; si la courbe C' est telle que le rapport des cosinus de ces angles soit constamment égal au nombre r, de sorte que MI étant le rayon incident, IM' soit le rayon réfracté selon le rapport r de réfraction ; on aura $n = \dfrac{dt - ds}{dt' - ds'}$, d'où $n(t' - s') = t - s +$ constante. Il suffit de connaître les valeurs de t, s, t', s' répondant à un point de la courbe C' pour déterminer la valeur de la constante. n étant donné, il est facile de trouver l'équation différentielle de la courbe C'; nous la donnerons en traitant des caustiques par réfraction et des lignes aplanétiques ; pour le moment, il suffit de remarquer qu'au point où C' rencontre C, on a évidemment $n = \pm 1$; donc si n n'est pas égal à 1, la courbe C' ne peut pas rencontrer la conique C ; supposons donc $n=1$, nous savons qu'alors C' et C sont deux coniques bi-confocales se coupant orthogonalement; prenons ce point d'intersection pour le point fixe R; en ce point t, s, t', s' sont nuls; donc on a $t'-s'=t-s$ ou $t'-t=s'-s$, ce qui démontre le beau théorème de M. Chasles. (*V.* p. 425.)

Observation. Le célèbre géomètre donne le nom d'arcs *semblables* à deux arcs dont la différence est égale à une droite; ces arcs n'étant pas *semblables* dans le sens ordinaire du mot, il est à désirer qu'on indique une autre dénomination; ne pourrait-on pas les désigner par *arcs correspondants?* Le mot *correspondant* a déjà été introduit par M. Ivory dans la théorie des attractions des sphéroïdes, dont on doit à M. Chasles une exposition si intuitive.

L'expression homo-focale ne paraît pas non plus convenable; outre que sa formation est hybride, elle ne dit pas que les *deux* foyers sont communs.

V. Ce théorème donne la solution de plusieurs problèmes importants.

Problème 1. Partager l'arc MN de conique en deux arcs correspondants?

Solution. Par M et N on mène des tangentes à la conique; soit I le point de rencontre, par ce point on fait passer une conique bi-confocale à la conique donnée, le point d'intersection R des deux coniques est le point de division cherché.

Observation. L'intersection de deux coniques confocales, et *à fortiori* bi-confocales, peut toujours se construire *géométriquement.*

Problème 2. Étant donnés trois points M, N, M' d'une conique tracée, trouver un quatrième point N' tel que les deux arcs MN, M'N' soient correspondants.

Solution. Soit I le point d'intersection des deux tangentes menées par M et M'; par I faisons passer une conique bi-confocale, qui sera rencontrée en I' par la tangente menée par

N ; par ce même point I′ menant une tangente à la conique donnée, le point de contact sera le point N′ cherché.

Problème 3. Partager la demi-ellipse en deux arcs correspondants.

Solution. Soient C le centre de l'ellipse ; A et A′ les extrémités d'un diamètre ; AT, A′T les deux tangentes parallèles, T est un point situé à l'infini ; construisons une hyperbole bi-confocale ayant pour asymptote la droite CT ; elle coupe la demi-ellipse en un point R, donc $RA' - RA = A'T - AT$: abaissons de A′ une perpendiculaire A′P sur AT, on aura $A'T - AT = AP$; donc $RA' - RA = AP$, c'est-à-dire que la différence des arcs est égale à la projection du diamètre sur la tangente passant par son extrémité.

VI. *Théorème.* La longueur infinie des asymptotes, moins la longueur infinie des hyperboles, est une quantité finie.

Démonstration. Soient C, A, F le centre, le sommet, le foyer voisin d'une hyperbole ; AR le quart de l'hyperbole, R étant le point situé à l'infini ; CR la longueur infinie de l'asymptote ; soit encore I le point où la tangente au sommet A rencontre l'asymptote ; concevons une ellipse bi-confocale passant par I et coupant orthogonalement l'hyperbole en M, nous aurons :

$$\begin{aligned} CR - AR &= CI + IR - AM - MR \\ &= CI + IR - 2AM + AM - MR. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de M. Chasles, $AM - MR = AI - IR$, donc $CR - AR = CI + AI - 2AM$. C. Q. F. D.

Observation. Ce dernier théorème et le moyen de trouver des arcs correspondants dans les coniques et dans d'autres courbes sont connus depuis longtemps et remontent jusqu'au comte Fagnano (1750) ; Legendre en a donné une théorie analytique complète sous le titre de *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, 2 vol. in-4°, mais la relation entre cette théorie et celle des coniques bi-confocales est une des plus belles découvertes de l'auteur de l'histoire des méthodes en géométrie (*).

VII. *Théorème.* Deux courbes algébriques ne peuvent avoir des arcs égaux sans se confondre.

Démonstration. On peut placer les deux courbes de manière à avoir cet arc en commun, alors elles auront donc une infinité de points en commun sans se confondre, ce qui est impossible, donc, etc.

Observation. Apollonius démontre qu'un arc d'ellipse ne peut être égal à un arc de cercle, etc., et en général que l'arc d'une conique ne peut être placé sur un arc d'une conique différente. (Liv. VI, prop. VI.)

VIII. On démontre de la même manière que dans la même courbe deux arcs ne peuvent être égaux, à moins que la courbe ne soit symétrique par rapport à un axe : les arcs égaux sont placés symétriquement.

Observation. Apollonius démontre encore que dans le même quadrant d'ellipse, dans la même demi-parabole et dans la même demi-hyperbole, on ne peut prendre des arcs superposables. (Prop. XIX.) Tm.

RELATIONS D'IDENTITÉ,

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(V. p. 424.)

—

LIV. Théorème de Newton *sur les segments.*

Si l'on prend dans le plan d'une ligne de l'ordre m un

(*) La première trace des fonctions elliptiques se trouve dans Pascal. (Œuvres, t. V, p. 38 et suivantes, édit. de 1819.)

point fixe et que l'on mène par ce point deux sécantes, le produit des segments formés par la première sécante, divisé par le produit des segments formés par la seconde sécante, donne un quotient constant, quelque soit le point fixe, pourvu que les sécantes conservent mêmes directions.

Démonstration. Soit $P_m + P_{m-1} + \ldots\ldots P(_0) = 0$ l'équation de la ligne de l'ordre m; et $P_m = Ay^m + \ldots\ldots + Cx^m$; prenons le point fixe pour origine et les sécantes pour axes.

Premier cas. Aucune des trois quantités A, C, $P(_0)$ n'est nulle; faisons $y=0$; le produit des segments formés par l'axe des x est égal à $(-1)^m \frac{P_0}{C}$; de même le produit des segments formés par l'axe des y est $(-1)^m \frac{P}{A}$; ce produit divisé par le précédent donne pour quotient $\frac{C}{A}$; prenons maintenant des sécantes parallèles aux précédentes et n'ayant pas non plus leur point commun sur la courbe; prenant ces nouvelles sécantes pour axes, le terme P_m ne changera pas (L, coroll. 1); les coefficients A et C ne changeant pas, le rapport $\frac{C}{A}$ reste le même.

2e *cas.* Si A seul est zéro, alors $\frac{P(_0)}{A}$ est infini, et $\frac{C}{A}$ est nul; ce rapport restera nul pour toutes les sécantes parallèles aux axes; et $\frac{P(_0)}{A}$ restera toujours infini tant que $P(_0)$ n'est pas nul; donc *si une droite rencontre une courbe à l'infini, toute droite parallèle la rencontre aussi à l'infini.*

Si C seul est zéro, on a des conclusions analogues.

3e *cas.* Si $P(_0)$ seul est zéro, alors l'origine est sur la courbe; $\frac{P(_0)}{A}$, $\frac{P(_0)}{C}$ sont nuls et leur rapport se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; toutefois ce rapport est déterminé et égal à $\frac{C}{A}$; car, supposons l'origine très-près de la courbe, alors $P_{(0)}$ est infiniment petit et le rapport segmentaire est toujours $\frac{C}{A}$.

4[e] *cas.* Si C et A sont nuls, le rapport segmentaire $\frac{C}{A}$ devient $\frac{0}{0}$ et reste indéterminé, et le théorème des segments n'a plus lieu ; autrement, toutes les fois que les deux sécantes rencontrent la courbe à l'infini, la constance du rapport segmentaire n'existe plus.

5[e] *cas.* Si A et $P_{(0)}$ sont nuls, le rapport $\frac{C}{A}$ devient et reste infini.

Observation 1. Dans ce qui précède, le produit des segments comprend aussi les segments imaginaires.

Observation 2. La proportionnalité des produits des segments dans les coniques était connue des anciens. C'est la proposition XVII du troisième livre d'Apollonius, ainsi énoncée : Les rectangles des segments formés par deux cordes qui se coupent sont proportionnels aux carrés des tangentes parallèles à ces cordes; les propositions suivantes concernent divers cas particuliers. Newton est le premier qui, dans l'ouvrage cité ci-dessus (p. 423), ait étendu cette propriété aux courbes du second genre (troisième ordre); cette proposition (VI, p. 4) ainsi que toutes les autres qu'on trouve dans cet ouvrage sont énoncées sans démonstration; elles ont été données ensuite par divers géomètres.

Observation essentielle. Une ligne de l'ordre m comprend aussi un système de lignes quelconques, situées sur un même plan et dont la somme des degrés est égale à m. Ainsi, les propriétés des segments s'appliquent à un système de m droites dans un même plan, etc.; nous ne répéterons plus cette observation.

LV. *Cas particuliers.* 1° Si sur une droite rencontrant la courbe à l'infini, on prend deux points O, O′ par lesquels on mène deux sécantes quelconques parallèles, les produits des segments formés par les deux sécantes sont entre eux comme les produits des segments *finis*, réels et imaginaires formés sur la droite aux points O et O′; car les segments infinis dans les deux produits, ne différant que de la quantité finie OO′, sont égaux. Ainsi, dans la parabole, deux cordes parallèles étant rencontrées par un diamètre quelconque, les produits des segments formés sur ces cordes sont entre eux comme les parties du diamètre interceptées entre les cordes et la courbe; il en est de même dans l'hyperbole lorsque les cordes parallèles sont coupées par une droite parallèle à une asymptote.

2° Une corde étant conjuguée à un diamètre, le théorème des segments donne directement dans les deux coniques à centre : le carré de la demi-corde est au produit des segments du diamètre comme le paramètre du diamètre est à la longueur du diamètre ; et dans la parabole : le carré de la demi-corde est équivalent au rectangle formé du paramètre et du segment *fini* du diamètre. Écrites algébriquement, ces propositions fournissent les équations les plus simples des coniques. C'est à ces mêmes équations, l'origine étant au sommet, que les coniques doivent leurs noms, comme nous le dirons dans un article sur l'origine de diverses dénominations.

LVI. *Problème.* Une courbe algébrique du degré m étant tracée, mener une tangente par un point pris sur la courbe.

Solution. Par un point O pris dans le plan de la courbe menons deux sécantes, rencontrant chacune la ligne en m points réels et à distances finies ; chaque sécante fournit m segments, à partir du point O. Soit OM un segment pris sur la première sécante, et représentons par P le produit des $m—1$ autres segments ; représentons de même par OM′ et P′ des quantités analogues pour la seconde sécante; et désignons par R le rapport constant des deux produits, on a donc :

$$\frac{OM.P}{OM'.P'}=R, \quad \text{d'où} \quad \frac{OM}{OM'}=\frac{RP'}{P};$$

prenons sur la sécante OM un point N et sur la seconde sécante un point N' tels que l'on ait :

$$\frac{OM}{OM'}=\frac{ON}{ON'}=\frac{R.P'}{P.};$$

il est évident que la droite NN' est parallèle à la corde MM'. Supposons que le point O se transporte sur la courbe, le rapport $\frac{OM'}{OM}$ prend la forme $\frac{0}{0}$, mais est égal à $\frac{RP'}{P}$, et la corde MM' devient une tangente; de là résulte cette construction : par le point de contact S on mène deux sécantes rencontrant chacune la courbe en $m-1$ autres points réels, à distances finies, faisant le produit des $m-1$ segments, on a le rapport $\frac{P'}{P}$; par un point quelconque O non situé sur la courbe, on mène deux sécantes parallèles aux cordes, ce qui fait connaître R; prenant sur les cordes deux longueurs SN, SN' telles que l'on ait $\frac{SN}{SN'}=\frac{RP'}{P}$, la droite menée par S parallèlement à NN' est la tangente demandée.

Application aux coniques. Par le point S je mène deux cordes ST, ST'; on a donc $\frac{P'}{P}=\frac{ST'}{ST}$; par un point V pris sur ST, je mène une parallèle LVL' à la corde ST'; on a donc :

$$R=\frac{SV.VT}{LV.VL'}; \quad \text{donc} \quad \frac{SN}{SN'}=\frac{SV.VT.ST'}{LV.VL'.ST};$$

prenant SN'=ST, il vient $SN=\frac{SV.VT.ST'}{LV.VL'}$; ligne facile à construire; mais il faut faire attention aux signes des segments pour savoir dans quel sens il faut porter SN.

Si les cordes ST, ST′ sont également inclinées sur un axe principal, ce qui arrive lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres égaux ou bien à deux cordes égales passant par un sommet, alors on a évidemment $SV.VT = LV.VL'$; donc, si $SN' = ST$, on a aussi $SN = ST'$. Il suffit donc dans ce cas de porter ST sur ST′ et ST′ sur ST′; dans le cercle, tous les diamètres étant égaux, la construction existe pour des cordes quelconques; elle est due ainsi que la suivante à Maclaurin.

LVII. *Cercles osculateurs dans les coniques.* Les cordes ST, ST′ étant également inclinées sur un axe principal, le cercle qui passe par les trois points S, T, T′, a donc au point S même tangente que la conique; c'est-à-dire que le cercle a deux points en commun avec la conique au point S, et deux autres points en T et T′; si le point T se rapproche continuellement de S, la corde ST devient finalement une tangente et ST′ une corde ayant même inclinaison sur l'axe principal que la tangente; le cercle qui a même tangente et même corde ST′ se nomme *cercle osculateur;* il a trois points en commun avec la conique au point S et un autre au point T′. Le *rayon de ce cercle est le rayon de courbure*; ainsi, pour construire le cercle osculateur en un point donné S sur la conique, on mène par ce point une tangente et puis une corde ayant sur un axe même inclinaison que la tangente; le cercle qui a la même tangente et la même corde est le cercle osculateur cherché.

Cette construction est impraticable aux sommets, parce que, en ces points, le cercle osculateur a un point *quadruple* en commun avec la courbure; mais on sait par d'autres considérations qu'aux extrémités d'un axe principal, le rayon de courbure est égal au demi-paramètre de cet axe. Nous reviendrons sur cette matière, et voir aussi tome II, p. 75 et 183.

QUESTIONS PROPOSÉES

au concours d'agrégation pour les sciences mathématiques.

—

1° En 1844.

Composition d'analyse.

Intégrer les deux équations

$$\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

en expliquant la méthode qu'on aura suivie.

Composition de mécanique.

Déterminer les lois des petites oscillations d'un fil flexible inextensible et sans masse, suspendu à un point fixe et chargé de deux points matériels pesants, en supposant qu'à l'origine du mouvement les deux points matériels n'aient pas de vitesse et qu'ils se trouvent avec le point de suspension sur une même ligne droite qui s'écarte très-peu de la verticale.

Chercher les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

2° En 1843.

Composition d'analyse.

Donner la théorie de l'intégration des équations aux différences partielles linéaires et du premier ordre.

Trouver l'équation des surfaces telle que si, par un point donné, on mène une perpendiculaire au plan tangent, le rectangle construit sur cette perpendiculaire et sur la portion de la normale comprise entre le point de contact et un plan fixe mené par le point donné, soit équivalent au carré de la distance du point donné au point de contact.

Composition de mécanique.

Déterminer le mouvement d'une ligne droite pesante et homogène dont un point est fixé, dont la position initiale est quelconque, et à laquelle on applique une percussion en un point donné.

On fera voir l'analogie de ce mouvement avec celui d'un pendule simple, on assignera les circonstances initiales du mouvement et la pression variable sur le point fixe.

On examinera en particulier le cas où la droite décrit un cône droit vertical et celui où elle s'écarte très-peu de la verticale.

3° En 1842.

Composition d'analyse.

Étant donnée une série de paraboles ayant même grand axe et même foyer, déterminer les courbes qui coupent ces paraboles à angle droit.

Déterminer les courbes qui coupent à angle droit une série d'ellipses de même foyer.

Composition de mécanique.

Donner les conditions d'équilibre d'un fil flexible et inextensible libre ou placé sur une surface, et sollicité par des forces quelconques.

Démontrer qu'un fil flexible homogène et sans pesanteur peut tourner autour de la droite qui joint ses extrémités fixes, en conservant une figure permanente, et déterminer cette figure : on fait abstraction de la résistance de l'air et des frottements.

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES SÉRIES DE SINUS ET COSINUS.

PAR L. A. LECOINTE.

—

Euler a donné, dans son Introduction à l'Analyse infinitésimale (*Introductio in Analysin infinitorum*, t. 1er, p. 218), plusieurs séries de sinus et de cosinus, et ce sont ces séries qui font l'objet du mémoire que nous croyons devoir publier.

On sait que cet illustre géomètre a été conduit à la sommation de ces séries en ayant recours aux séries récurrentes, ce qui exige les notions de l'Algèbre supérieure, tandis que le procédé que nous allons présenter ici, pour arriver au même but, nous paraît beaucoup plus simple, en ce qu'il ne touche nullement aux questions de l'Analyse supérieure.

I.

Considérons d'abord les deux séries infinies :

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a + \ldots\ldots$$
$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \cos 5a + \ldots\ldots$$

et proposons-nous de les sommer ; pour cela, représentons, pour plus de simplicité, par S la première série (celle des sinus), et par C la seconde (celle des cosinus).

Maintenant si l'on remarque que

$$\begin{aligned}
\sin a &= \ldots\ldots\ldots\ldots \sin a \\
\sin 2a &= \sin a \cos a + \sin a \cos a \\
\sin 3a &= \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a \\
\sin 4a &= \sin 3a \cos a + \sin a \cos 3a \\
\sin 5a &= \sin 4a \cos a + \sin a \cos 4a \quad \text{etc.....}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos a &= \ldots\ldots \cos a \\
\cos 2a &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\
\cos 3a &= \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a \\
\cos 4a &= \cos 3a \cos a - \sin 3a \sin a \\
\cos 5a &= \cos 4a \cos a - \sin 4a \sin a \quad \text{etc.....}
\end{aligned}$$

on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
S &= S.\cos a + (1 + C)\sin a, \\
C &= (1 + C)\cos a - S.\sin a.
\end{aligned}$$

Ces deux équations, ne renfermant que les deux inconnues S et C, donnent les expressions suivantes de ces deux inconnues :

$$S = \frac{\sin a}{2(1 - \cos a)}, \qquad C = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, nous avons :

$$(1) \quad \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a + \ldots = \frac{\sin a}{2(1 - \cos a)},$$

$$(2) \quad \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \cos 5a + \ldots = -\frac{1}{2}.$$

II.

Proposons-nous, maintenant, de sommer les deux séries infinies :

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \sin(a + 3b) + \ldots\ldots$$
$$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + 3b) + \ldots\ldots$$

pour cela, représentons toujours par S la première série (celle des sinus), et par C la seconde (celle des cosinus).

Si nous remarquons que

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin a\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a\\ \sin(a+2b) &= \sin a\cos 2b+\sin 2b\cos a\\ \sin(a+3b) &= \sin a\cos 3b+\sin 3b\cos a \text{ etc.....}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos a\\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a+2b) &= \cos a\cos 2b-\sin a\sin 2b\\ \cos(a+3b) &= \cos a\cos 3b-\sin a\sin 3b \text{ etc.....}\end{aligned}$$

on aura :

$$\begin{aligned}S = \sin a\,(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots..)+\\ +\cos a\,(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots..),\\ C = \cos a\,(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots...)-\\ -\sin a\,(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots..);\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des séries (1) et (2), § 1[er] :

$$S=\sin a.\frac{1}{2}+\cos a.\frac{\sin b}{2(1-\cos b)}=\frac{\sin a-\sin(a-b)}{2(1-\cos b)},$$

$$C=\cos a.\frac{1}{2}-\sin a.\frac{\sin b}{2(1-\cos b)}=\frac{\cos a-\cos(a-b)}{2(1-\cos b)};$$

mais, on a :

$$\sin a-\sin(a-b)=2\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2},$$

$$\cos a-\cos(a-b)=-2\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2},$$

et $$2(1-\cos b)=4\sin^2\frac{b}{2},$$

d'où

$$S=\frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}},\quad C=-\frac{\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

Ainsi, nous avons :

$$(3)\ \sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)+\ldots=\frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}},$$

$$(4)\ \cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\cos(a+3b)+\ldots=-\frac{\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

Nous sommes parvenus à la sommation de ces deux séries, en ayant recours à celles du § 1[er], mais on peut y arriver directement, comme, dans ce paragraphe, pour les séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples :

En effet, si nous remarquons que

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\sin(a+2b)=\sin(a+b)\cos b+\sin b\cos(a+b)$$
$$\sin(a+3b)=\sin(a+2b)\cos b+\sin b\cos(a+2b)\ \text{etc}\ldots$$

et

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a+2b)=\cos(a+b)\cos b-\sin(a+b)\sin b$$
$$\cos(a+3b)=\cos(a+2b)\cos b-\sin(a+2b)\sin b\ \text{etc}\ldots$$

on aura :

$$S=\sin a+S.\cos b+C.\sin b,$$
$$C=\cos a+C.\cos b-S.\sin b,$$

et ces deux équations nous donneront les valeurs de S et C, trouvées précédemment.

III.

Dans ce paragraphe, nous allons nous proposer de sommer les séries finies :

$$\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\sin 4a+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sin na,$$
$$\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cos 4a+\ldots\ldots\ldots\ldots+\cos na,$$
$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)\ldots\ldots+\sin(a+nb),$$
$$\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\cos(a+3b)\ldots\ldots+\cos(a+nb).$$

Euler est arrivé à la sommation de ces séries en ayant recours aux séries (3) et (4) du § 2 ; mais on peut y arriver directement par la méthode de décomposition appliquée simultanément à deux des séries précédentes, et que nous avons fait connaître dans les §§ 1 et 2.

Ainsi, considérons d'abord les deux séries

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots + \sin na,$$
$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 3a + \ldots\ldots + \cos na,$$

et proposons-nous de les sommer.

Pour cela, représentons la première (celle des sinus) par S, et la seconde (celle des cosinus) par C.

Si on décompose les quantités

$$\sin a,\ \sin 2a,\ \sin 3a,\ \sin 4a \ldots\ldots\ldots \quad \sin na$$

et $$\cos a,\ \cos 2a,\ \cos 3a,\ \cos 4a \ldots\ldots\ldots \quad \cos na$$

de la même manière que dans le § 1er, on sera conduit aux deux équations

$$S = (S - \sin na) \cos a + (C - \cos na + 1) \sin a,$$
$$C = (C - \cos na + 1) \cos a - (S - \sin na) \sin a$$

qui, ne renfermant que les deux inconnues S et C, nous donneront :

$$S = \frac{\sin \frac{a}{2}(n+1) \sin \frac{a}{2} n}{\sin \frac{a}{2}}, \quad C = \frac{\cos \frac{a}{2}(n+1) \sin \frac{a}{2} n}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Maintenant, supposons qu'il s'agisse de sommer les deux autres séries

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \ldots + \sin(a+nb),$$
$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \ldots + \cos(a+nb).$$

Représentons toujours la première par S et la seconde par C.

Si on décompose les quantités

$$\sin a,\ \sin(a+b),\ \sin(a+2b),\ \sin(a+3b) \ldots \sin(a+nb),$$
et $$\cos a,\ \cos(a+b),\ \cos(a+2b),\ \cos(a+3b) \ldots \cos(a+nb),$$

de la même manière que dans le § 2, on sera conduit aux deux expressions suivantes de S et C :

$$\begin{aligned} S &= \sin a(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots\ldots+\cos nb)+ \\ &\quad +\cos a(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots\ldots+\sin nb), \\ C &= \cos a(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots\ldots+\cos nb)- \\ &\quad -\sin a(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots\ldots+\sin nb); \end{aligned}$$

et, par suite,

$$S=\frac{\sin\left(a+\frac{b}{2}n\right)\sin\frac{b}{2}(n+1)}{\sin\frac{b}{2}},\quad C=\frac{\cos\left(a+\frac{b}{2}n\right)\sin\frac{b}{2}(n+1)}{\sin\frac{b}{2}}.$$

On aurait pu parvenir directement à ces formules sans avoir besoin de connaître les sommations des séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples.

En effet, remarquons, comme dans le § 2, que

$$\begin{aligned} &\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a \\ &\sin(a+2b)=\sin(a+b)\cos b+\sin b\cos(a+b) \\ &\sin(a+3b)=\sin(a+2b)\cos b+\sin b\cos(a+2b) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sin(a+nb)=\sin[a+(n-1)b]\cos b+\sin b\cos[a+(n-1)b] \\ &\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ &\cos(a+2b)=\cos(a+b)\cos b-\sin(a+b)\sin b \\ &\cos(a+3b)=\cos(a+2b)\cos b-\sin(a+2b)\sin b \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\cos(a+nb)=\cos[a+(n-1)b]\cos b-\sin[a+(n-1)b]\sin b, \end{aligned}$$

d'où on déduit les deux équations

$$S=\sin a+[S-\sin(a+nb)]\cos b+[C-\cos(a+nb)]\sin b,$$
$$C=\cos a+[C-\cos(a+nb)]\cos b-[S-\sin(a+nb)]\sin b,$$

lesquelles donneront pour S et C les valeurs trouvées précédemment.

Des séries que nous venons de donner, il est facile de déduire celles-ci :

$$(1)\qquad \cos a+\cos 3a+\cos 5a+\cos 7a+\ldots\ldots+$$
$$+\cos(2n+1)a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(n+1)2a}{\sin a},$$

$$(2)\qquad \cos 2a+\cos 2.2a+\cos 3.2a+\cos 4.2a+\ldots\ldots+$$
$$+\cos(n+1)2a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2n+3)a}{\sin a},$$

$$(3)\qquad \cos a+\cos 3a+\cos 5a+\cos 7a+\ldots\ldots+$$
$$+\cos(2n-1)a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2na}{\sin a},$$

$$(4)\qquad \cos 2a+\cos 2.2a+\cos 3.2a+\cos 4.2a+\ldots\ldots+$$
$$+\cos(n-1)2a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2n-1)a}{\sin a}.$$

Maintenant, π désignant la demi-circonférence dont le rayon est 1, faisons dans les séries (1) et (2), § 4 : $a=\dfrac{\pi}{2n+3}$, et dans les séries (3) et (4), § 4 · $a=\dfrac{\pi}{2n}$, on aura :

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\cos 7\varphi+\ldots\ldots+\cos(2n+1)\varphi=\frac{1}{2},$$
$$\cos 2\varphi+\cos 2.2\varphi+\cos 3.2\varphi+\cos 4.2\varphi+\ldots\ldots+\cos(n+1)2\varphi=-\frac{1}{2},$$
$$\cos\psi+\cos 3\psi+\cos 5\psi+\cos 7\psi+\ldots\ldots+\cos(2n-1)\psi=0,$$
$$\cos 2\psi+\cos 2.2\psi+\cos 3.2\psi+\cos 4.2\psi+\ldots\ldots+\cos(n-1)2\psi=0,$$

en représentant $\dfrac{\pi}{2n+3}$ par φ et $\dfrac{\pi}{2n}$ par ψ.

Ces dernières séries sont très-importantes, ainsi que nous le verrons dans un mémoire que nous publierons prochainement, et qui est relatif à la théorie des nombres et à la géométrie de situation.

Si dans la série

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \ldots.. + \cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{2},$$

nous posons $\varphi = \frac{\pi}{17}$ ou $2n+3 = 17$, nous aurons la série

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\cos 7\varphi+\cos 9\varphi+\cos 11\varphi+\cos 13\varphi+\cos 15\varphi=\frac{1}{2}.$$

(Legendre, *Théorie des nombres*, 3e édit., t. II, p. 221, et *Géométrie*, p. 429.)

Maintenant, si dans la même série nous posons $2n+3=7$, nous aurons :

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi = \frac{1}{2},$$

ou bien

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi - \cos 2\varphi = \frac{1}{2},$$

d'où, en remplaçant $\cos 3\varphi$ par $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$ par $2\cos^2\varphi - 1$, on déduit :

$$(2\cos\varphi)^3 - (2\cos\varphi)^2 - 2(2\cos\varphi) + 1 = 0.$$

Cette équation, qui donne l'inscription du polygone régulier de sept côtés, est la même que celle donnée par Legendre dans son traité sur la théorie des nombres, t. II, p. 214, excepté que l'inconnue a été changée de signe.

Si dans l'équation précédente on remplace $\cos\varphi$ par $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$, on aura l'équation

$$(2\sin\varphi)^6 - 7(2\sin\varphi)^4 + 14(2\sin\varphi)^2 - 7 = 0,$$

qui est celle donnée par Képler dans son Harmonique du monde (*Harmonices mundi*, 1619, in-fol.).

Lagrange a donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, la formule suivante :

$$\Sigma_1^{m-1} \sin n\theta \sin n\varphi = \frac{\sin m\varphi \sin (m-1)\theta - \sin (m-1)\varphi \sin m\theta}{2(\cos\varphi - \cos\theta)},$$

n étant une variable, de telle sorte que $\Sigma_1^{m-1} \sin n\theta \sin n\varphi$ nous représente la série finie

$$\sin\theta\sin\varphi + \sin 2\theta \sin 2\varphi + \sin 3\theta \sin 3\varphi + \ldots + \sin(m-1)\theta \sin(m-1)\varphi,$$

et c'est cette formule que nous allons démontrer.

Démonstration. On a la relation

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b),$$

d'où, en posant $\theta - \varphi = \delta$, $\theta + \varphi = \omega$,

$$\Sigma_1^{m-1} \sin n\theta \sin n\varphi = \frac{1}{2}[\cos\delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(m-1)\delta] -$$

$$-\frac{1}{2}[\cos\omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega + \ldots + \cos(m-1)\omega];$$

mais on a, d'après le § 3 :

$$\cos\delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(m-1)\delta = \frac{\cos\frac{\delta}{2}m \sin\frac{\delta}{2}(m-1)}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

$$\cos\omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega + \ldots + \cos(m-1)\omega = \frac{\cos\frac{\omega}{2}m \sin\frac{\omega}{2}(m-1)}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

d'où

$$\Sigma_1^{m-1} \sin n\theta \sin n\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\delta}{2}m \sin\frac{\delta}{2}(m-1)\sin\frac{\omega}{2} - \cos\frac{\omega}{2}m\sin\frac{\omega}{2}(m-1)\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\omega}{2}};$$

mais

$$\cos\frac{\delta}{2} m \sin\frac{\delta}{2}(m-1)=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\delta}{2}(2m-1)-\sin\frac{\delta}{2}\right],$$

$$\cos\frac{\omega}{2} m \sin\frac{\omega}{2}(m-1)=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\omega}{2}(2m-1)-\sin\frac{\omega}{2}\right],$$

d'où

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta \sin n\varphi=\frac{\sin\frac{\delta}{2}(2m-1)\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\omega}{2}(2m-1)\sin\frac{\delta}{2}}{4\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\omega}{2}},$$

ou bien

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta \sin n\varphi=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)};$$

or, nous avons :

$$\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left[(m-1)\theta-m\varphi\right]-\frac{1}{2}\cos\left[m\theta-(m-1)\varphi\right],$$

$$\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left[(m-1)\theta+m\varphi\right]-\frac{1}{2}\cos\left[m\theta+(m-1)\varphi\right],$$

et $$2\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)=\cos\varphi-\cos\theta,$$

d'où

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta \sin n\varphi=$$

$$=\frac{\cos[(m-1)\theta-m\varphi]-\cos[m\theta-(m-1)\varphi]-\cos[(m-1)\theta+m\varphi]+\cos[m\theta+(m-1)\varphi]}{4(\cos\varphi-\cos\theta)};$$

mais

$$\cos\left[(m-1)\theta-m\varphi\right]=\cos(m-1)\theta\cos m\varphi+\sin(m-1)\theta\sin m\varphi\,.$$

$$\cos\left[m\theta-(m-1)\varphi\right]=\cos m\theta\cos(m-1)\varphi+\sin m\theta\sin(m-1)\varphi,$$

$$\cos[(m-1)\theta+m\varphi]=\cos(m-1)\theta\cos m\varphi-\sin(m-1)\theta\sin m\varphi,$$
$$\cos[m\theta+(m-1)\varphi]=\cos m\theta\cos(m-1)\varphi-\sin m\theta\sin(m-1)\varphi,$$

d'où on déduit enfin :

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\sin n\varphi=\frac{\sin m\varphi\sin(m-1)\theta-\sin(m-1)\varphi\sin m\theta}{2(\cos\varphi-\cos\theta)}.$$

Ainsi la formule de Lagrange se trouve démontrée.

SUR LES COURBES

où le rayon de courbure a un rapport constant avec la partie de la normale interceptée entre la courbe et une droite fixe.

PAR M. ARMAND FARCY,
ancien élève de l'École polytechnique.

—

Dans toute parabole, le rayon de courbure est double de la portion de normale interceptée entre la courbe et sa directrice. Cette propriété a été signalée (t. II, p. 185) et démontrée par des considérations de géométrie analytique. Nous l'établirons par le calcul différentiel ainsi qu'il suit :

I. La parabole, rapportée à son axe et à son sommet, ayant pour équation $y^2=2px$, si on transporte l'origine au pied de la directrice, cette équation devient

$$y^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)=2px-p^2,$$

ou plus symétriquement $y^2+p^2=2px$. Il en résulte, en différentiant une première fois,

$$yy'=p,\ \text{d'où}\ y'=\frac{p}{y},$$

puis en différentiant une seconde fois,

$$y'^2+yy''=0\text{, d'où } y''=-\frac{y'^2}{y}=-\frac{p^2}{y^3},$$

par suite le quarré du rayon de courbure, au point x, y :

$$R^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=\frac{(y^2+p^2)^3}{p^4}=\frac{8x^3}{p},$$

et le quarré de la normale comprise entre la courbe et sa directrice prise pour axe des y :

$$N^2=x^2+\frac{x^2}{y'^2}=\frac{x^2(y^2+p^2)}{p^2}=\frac{2x^3}{p}.$$

Donc $R^2=4.N^2$, ou bien $R=2N$. C. Q. F. D.

II. Soit encore $(y-h)^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$ l'équation collective de toutes les paraboles, ayant pour directrice l'axe des y et pour axe une parallèle à l'axe des x ; en la différentiant deux fois, on obtient successivement :

(1) équation primitive $(y-h)^2=2px-p^2$,

(2) $\qquad (y-h)y'=p$,

(3) $\qquad (y-h)y''+y'^2=0$.

De (3), on tire $y-h=-\frac{y'^2}{y''}$, puis de (2), $p=-\frac{y'^3}{y''}$, qui, substituées dans (1), donnent $\frac{y'^4}{y''^2}=-\frac{2xy'^3}{y''}-\frac{y'^6}{y''^2}$ (4).

Cette relation, résultant de l'élimination de h et de p entre (1), (2), (3), exprime une propriété commune de toutes les paraboles données par l'équation (1) ; mais en transposant, divisant par y'^4, multipliant par y'', puis par $\sqrt{1+y'^2}$, la relation (4) devient :

$$\frac{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''}=-2.x\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

ou bien : $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2.\sqrt{x^2+\frac{x^2}{y'^2}}$, c'est-à-dire ce qu'il fallait démontrer.

III. Réciproquement, *si dans une courbe le rayon de courbure est en chaque point double (et de sens contraire) de la normale comprise entre ce point et une droite fixe, cette courbe est une parabole ayant la droite fixe pour directrice.* — La droite fixe étant prise pour axe des y, la relation supposée donne en chaque point de la courbe :

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2x\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

ou, par la suppression de $\sqrt{1+y'^2}$:

$$\frac{1+y'^2}{y''} = -\frac{2x}{y'},$$

équation différentielle de la courbe proposée. On a vu ci-dessus que l'équation en termes finis $(y-h)^2 = 2px - p^2$, dans laquelle il entre deux constantes arbitraires, satisfait en chacun de ses points à l'équation différentielle du second ordre actuellement proposée ; elle en est donc l'intégrale générale, mais on la retrouve aussi comme il suit.

L'équation différentielle $\frac{1+y'^2}{y''} = -\frac{2x}{y'}$ donne, en ayant égard à $y'' = \frac{dy'}{dx}$: $-\frac{dx}{2x} = \frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$, d'où, en intégrant, introduisant une première constante A, et repassant des logarithmes à leurs nombres $\frac{1}{A\sqrt{x}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, de là résulte :

$y' = \frac{1}{\sqrt{A^2x-1}}$, c'est-à-dire $dy = \frac{dx}{\sqrt{A^2x-1}}$, d'où, intégrant et introduisant une nouvelle constante h : $y = h + \frac{2}{A^2}\sqrt{A^2x-1}$, ou bien : $(y-h)^2 = 2\frac{2}{A^2}x - \frac{4}{A^4}$; ou enfin en remplaçant $\frac{2}{A^2}$ par p, autre constante arbitraire : $(y-h)^2 = 2px - p^2$; ce qu'il fallait démontrer.

IV. Nous avons dû, dans la réciproque précédente, introduire cette restriction, que *le rayon de courbure était de sens contraire à la normale*, etc..... Pour en faire comprendre la nécessité, nous traiterons cette question plus générale : *Déterminer la courbe dans laquelle le rayon de courbure est à la normale comprise entre la courbe et une droite fixe, dans un rapport constant?*

Soit m ce rapport constant : l'énoncé donne de suite, en prenant la droite fixe pour axe des y :

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = m\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{y'^2}} = mx\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

ou bien $\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{mx}{y'}$, ou autrement : $\frac{dx}{mx} = \frac{dy'}{y'\sqrt{1+y'^2}}$;

d'où en intégrant : $Ax^{\frac{1}{m}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, A étant une constante arbitraire; de là résulte d'abord :

$$y' = \frac{Ax^{\frac{1}{m}}}{\sqrt{1-A^2x^{\frac{2}{m}}}} \quad \text{puis enfin} \quad y = \int \frac{Ax^{\frac{1}{m}}}{\sqrt{1-A^2x^{\frac{2}{m}}}}dx.$$

L'intégration de cette dernière formule donnera, en termes finis, l'équation du lieu demandé pour chaque valeur de m; mais il importe d'observer ici toute l'influence du signe de m.

Si le rayon de courbure doit être de même sens que la normale considérée, il faut prendre $m > 0$, et la formule conserve la forme ci-dessus : $y = \int \frac{Ax^{\frac{2}{m}}}{\sqrt{1-A^2x^{\frac{2}{m}}}}dx$.

Si le rayon de courbure doit être de sens contraire à celui de la normale, il faut prendre $m < 0$, et la formule devient en remplaçant m par $-m$: $y = \int \frac{A dx}{\sqrt{x^{\frac{2}{m}} - A^2}}$.

Nous intégrerons l'une et l'autre dans les cas de $m = 1$ et de $m = 2$.

Dans le premier cas, si $m = 1$, on a : $y = \int \frac{A x . dx}{\sqrt{1 - A^2 x^2}}$,

d'où en intégrant : $y = \beta - \frac{\sqrt{1 - A^2 x^2}}{A}$, ou bien :

$(y - \beta)^2 + x^2 = \frac{1}{A^2}$; ou remplaçant $\frac{1}{A^2}$ par R^2 : $(y - \beta^2) + x^2 = R^2$. Équation qui, à cause de l'indétermination des constantes R et β, appartient à un cercle de rayon quelconque ayant son centre en un point quelconque de l'axe des y. Résultat facile à prévoir et à justifier.

Dans le même cas, si $m = 2$, on a : $y = \int \frac{A \sqrt{x} . dx}{\sqrt{1 - A^2 x}}$,

d'où en intégrant :

$$y = \beta + \frac{1}{2} \text{arc} \left[\sin = A \sqrt{x}\right] - \frac{1}{2} A \sqrt{x - A^2 x^2}.$$

Famille de lignes transcendantes fort différentes comme on voit des paraboles considérées ci-dessus ; dans les unes comme dans les autres, le rayon de courbure est double de la normale ; mais dans les unes il est de même sens, dans les autres de sens contraire.

Dans le second cas, si $m = 1$, on a : $y = \int \frac{A dx}{\sqrt{x^2 - A^2}}$,

d'où en intégrant : $y = \beta + l \left[\frac{x}{A} + \sqrt{\frac{x^2}{A^2} - 1}\right]$. Nouvelle famille de courbes transcendantes fort différentes des cercles trouvés ci-dessus.

Enfin dans le même second cas, si $m=2$, on a :

$$y=\int \frac{\mathrm{A}dx}{\sqrt{x-\mathrm{A}^2}},$$

d'où on tire par intégration :

$$y=\beta+2\mathrm{A}\sqrt{x-\mathrm{A}^2},$$

ou bien

$$(y-\beta)^2=4\mathrm{A}^2x-4\mathrm{A}^4,$$

ou en remplaçant $2\mathrm{A}^2$ par p :

$$(y-\beta)^2=2px-p^2.$$

Équation collective des paraboles étudiées dans cet article.

NOTE

sur la construction des racines de l'équation complète du quatrième degré.

—

Dans les Traités d'application de l'algèbre à la géométrie, on indique le moyen de construire les racines d'une équation à une seule inconnue, $f(x)=0$, par l'intersection de deux lignes dont les équations $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$, conduisent à la proposée, $f(x)=0$, par l'élimination de l'inconnue y. On a soin de faire observer que le choix des équations $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$, peut être fait d'une infinité de manières différentes : la condition essentielle consistant en ce que l'élimination de y donne pour résultat $f(x)=0$, ou bien une équation qui contienne toutes les racines réelles de $f(x)=0$. A cela, j'ajouterai une observation qui, sans doute, a paru trop simple aux auteurs des

Traités où elle ne se trouve pas : c'est qu'il faut encore choisir les équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, de manière que les lignes représentées par ces équations aient autant de points communs que la proposée $f(x) = 0$ a de racines réelles; et cette condition est loin d'être remplie par tous les systèmes $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, qui donnent $f(x) = 0$ en éliminant y, puisqu'il est facile de former une équation $f(x) = 0$, dont toutes les racines soient réelles, et qui s'obtienne en éliminant y de deux autres $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, représentant des courbes dont le nombre des points communs soit inférieur au degré de la proposée. Ainsi, par exemple, l'équation $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$ a pour racines $1, -1, 2, 2$, et elle résulte immédiatement de $x^4 - 4x^3 = 3y^2 + 1$, $3y^2 + 3x^2 + 4x - 3 = 0$, par l'élimination de y. Or, les lignes que représentent ces deux dernières équations n'ont aucun point commun du côté des abscisses positives, car les abscisses positives des points de la première sont toujours plus grandes que le nombre 4, et ces valeurs, substituées à x dans la seconde, donnent pour l'ordonnée y des valeurs imaginaires (*).

Je ne me propose pas de présenter ici une discussion complète du moyen de construire les racines des équations de tous les degrés; je m'occuperai seulement de l'équation du quatrième degré : $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. On peut construire ses racines, d'une infinité de manières différentes, par l'intersection de deux courbes du second degré : afin que ces courbes aient autant de points communs que l'équation proposée a de racines réelles, il suffit de choisir pour l'une des deux équations auxiliaires une équation du premier degré en y, par exemple $x^2 = y$; la seconde sera $y^2 + Axy + By + Cx + D = 0$. A chaque racine réelle α de la proposée, correspondra un point commun aux deux courbes, dont les coordonnées seront : $x = \alpha$, $y = \alpha^2$. En effet, ce point est évidemment sur la parabole $x^2 = y$, et il ap-

(*) Les deux courbes ont d'ailleurs deux points communs correspondants à une abscisse négative égale à -1.

partient aussi à l'hyperbole $y^2+Axy+By+Cx+D=0$; car en substituant α et α^2 à x et y dans cette dernière équation, on parvient à l'égalité $\alpha^4+A\alpha^3+B\alpha^2+C\alpha+D=0$, qui a lieu par hypothèse.

On peut aussi construire les racines réelles de l'équation (1)..... $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ par l'intersection d'une circonférence et d'une parabole. Les équations de ces deux courbes s'obtiennent facilement au moyen du calcul suivant.

Posons $x^2=y-\frac{Ax}{2}$... (2), il en résultera $x^2+Ax=y+\frac{A}{2}x$, et $x^4+Ax^3=y^2-\frac{A^2}{4}x^2$. Par suite l'équation (1) devient $y^2+\left(B-\frac{A^2}{4}\right)x^2+Cx+D=0$... (3). On aura toutes les racines réelles de la proposée en déterminant les abscisses des points communs aux courbes représentées par les équations (2) et (3), puisque l'une d'elles est du premier degré en y. Actuellement, je multiplie l'équation (2) par $1-B+\frac{A^2}{4}$, et je l'ajoute, membre à membre, à l'équation (3), il viendra:

$$y^2+x^2+\left[C+\frac{A}{2}+\frac{A^3}{8}-\frac{AB}{2}\right]x-\left[1+\frac{A^2}{4}-B\right]y+D=0\ (4).$$

Les axes des coordonnées étant supposés rectangulaires, l'équation (4) représente une circonférence dont les points communs avec la parabole (2) ont pour abscisses les racines réelles de l'équation proposée.

Je reprends, comme exemple, l'équation $x^4-4x^3+3x^2+$ $+4x-4=0$. Le coefficient du second terme étant -4, je pose $x^2=y+2x$, d'où $x^2-4x=y-2x$ et $x^4-4x^3=y^2-4x^2$. En substituant y^2-4x^2 à x^4-4x^3, l'équation donnée devient $y^2-x^2+4x-4=0$; je multiplie par 2 l'équation $x^2=y+2x$, et je l'ajoute membre à membre à $y^2-x^2+4x-4=0$, il en résulte $y^2+x^2-2y-4=0$, ou $x^2+(y-1)^2=5$. Ainsi, on obtiendra toutes les racines réelles de l'équation donnée en construisant les abscisses des points communs à la circonférence $x^2+(y-1)^2=5$ et à la parabole $x^2=y+2x$. C'est, au reste, ce qu'il est facile de vérifier.

En effet, la parabole $x^2 = y + 2x$ a pour axe une droite AB parallèle à l'axe des ordonnées OY, et située à une distance OB de OY, égale à l'unité ; le sommet de la courbe est un point A de la droite AB, à une distance égale à -1 de l'axe OX des abscisses ; enfin cette parabole passe par l'origine O des coordonnées et coupe l'axe des x en un second point C, dont la distance à l'origine est égale au nombre 2.

La circonférence $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ a son centre sur l'axe des y en un point D, à une distance OD de l'origine égale à 1 ; le carré de son rayon est 5. Or, $\mathrm{OD} = 1$, $\mathrm{CO} = 2$ donnent $\overline{\mathrm{DC}}^2 = 5$; donc la circonférence contient le point C, et l'on voit déjà que l'un des points communs, C, aux deux courbes a pour abscisse le nombre 2 ; d'ailleurs, les coordonnées du centre D de la circonférence étant $x = 0$, $y = 1$ et celles du sommet de la parabole : $y = -1$, $x = 1$, la distance DA est égale à $\sqrt{5}$. Ainsi le sommet de la parabole est sur la circonférence, et par conséquent l'abscisse du second point commun aux deux courbes est l'unité. De plus, prolongez la droite AD d'une longueur $\mathrm{DG} = \mathrm{AD}$, de l'autre côté de l'axe des y : le point G appartiendra évidemment à la circonférence, et il sera aussi sur la parabole, car l'axe des y est le diamètre de la parabole qui divise en parties égales les cordes parallèles à AD ; donc les deux courbes se coupent en un troisième point dont l'abscisse est -1. Enfin, si par le point C on mène une tangente à la parabole, elle touchera aussi la circonférence ; car nommons L, M les points auxquels cette droite coupe l'axe AB de la parabole et l'axe des y qui lui est parallèle, on aura, d'après une propriété connue, $\mathrm{AL} = \mathrm{AB} = 1$, d'où $\mathrm{LB} = 2$, $\mathrm{MO} = 4$, et comme, d'ailleurs, $\mathrm{CO} = 2$ et $\mathrm{OD} = 1$, la droite CO sera moyenne géométrique entre MO et OD. Donc CM est perpendiculaire sur CD, c'est-à-dire que CL est tangente à la circonférence. Alors, les deux courbes doivent être considérées comme ayant en C deux points communs dont l'abscisse est le nombre 2 ; et l'on trouve, de cette manière, par une construction géométrique, les valeurs des quatre racines de l'équation proposée. G.

PROBLÈME DE COMBINAISON.

PAR A. CHEVILLARD,
professeur à Sorèze.

Diverses personnes en nombre quelconque s'étant distribué différents objets connus, trouver à l'aide d'une seule donnée l'ordre de la distribution des objets.

I. $p+1$ personnes prennent $p+1$ objets connus dans un ordre inconnu, qu'on veut deviner. Pour cela, on donnera à la 1^{re} 1 jeton, à la 2^{me} 2 jetons, à la 3^{me} 3, à la 4^{me} 4,... à la $p+1^{me}$, $p+1$ jetons. Posant ensuite G jetons sur la table, vous ordonnerez qu'à votre insu la personne qui a le 1^{er} objet, prenne x fois autant de jetons qu'elle en a reçu, que celle qui a le 2^{me} objet, prenne y fois autant de jetons qu'elle en a reçu, 3^{me} objet z fois autant,... $p+1^{me}$ objet, v fois autant. Demandant ensuite combien il reste de jetons sur la table, il faut, à l'aide de la réponse, déterminer l'ordre de la distribution des $p+1$ objets.

Si la 1^{re} personne a pris le 1^{er} objet, la 2^{me} le 2^{me}, la 3^{me} le 3^{me}, etc., le nombre de jetons pris sur les G jetons, sera $x+2y+3z+\ldots+(p+1)v$; si la 2^{me} a pris le 1^{er}, la 1^{re}, le 2^{me}, la 3^{me} le 3^{me}, etc., le nombre de jetons pris sera $2x+y+3z+\ldots+(p+1)v$ et ainsi de suite, ce qui fait $1.2.3\ldots(p+1)$ permutations diverses suivant lesquelles les $p+1$ personnes peuvent se distribuer les $p+1$ objets. Si je parviens à déterminer $x, y, z,\ldots v$ de manière à ce que les $1.2.3\ldots(p+1)$ sommes enlevées soient toujours différentes, les restes qu'elles laisseront sur la table seront toujours différents, et l'on conçoit que la connaissance du reste pouvant amener celle de la permutation correspondante, précise ainsi l'ordre de la distribution. Et d'abord, les nombres x, y, z,... v doivent tous différer, car si l'on avait seulement $x=y$, les 2 permutations $x+2y+3z+\ldots$ et $2x+y+3z+\ldots$ répèteraient la même somme et causeraient incertitude sur 2 des $p+1$ objets distribués. Je supposerai donc $x, y, z,\ldots$ croissants, savoir :

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= x+l \\ z &= x+al \\ t &= x+bl \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ v &= x+il, \end{aligned}$$

x, l, a, b,... i étant des entiers quelconques, et a, b,... i croissants. Une permutation quelconque, par exemple $3x+2y+z+\ldots+(p+1)v$ deviendra $x(3+2+1+\ldots+p+1)$ $+l[(p+1)i+\ldots+1.a+2]=\frac{(p+1)(p+2)}{2}x+l.N$, N étant un arrangement sommatoire formé en multipliant $i+\ldots+b+a+1$ par P des $p+1$ nombres $1, 2, 3,\ldots p+1$.

2. Pour que les permutations primitives diffèrent, il suffit que tous ces arrangements diffèrent : avec les $p+1$ nombres $1,2,3,\ldots p+1$, on ne peut faire que $(p+1)p(p-1)\ldots3.2$ arrangements divers de p d'entre eux, arrangements dont le nombre devait en effet équivaloir à celui des permutations primitives. Pour disposer ces arrangements sommatoires de manière à ce qu'ils forment des valeurs croissantes, il est clair qu'on doit commencer par la plus faible somme $1.i+2h+\ldots+(p-2)b+(p-1)a+p$, et s'élever progressivement de manière à faire porter d'abord les plus faibles

multiplicateurs 1, 2,... sur les plus forts nombres i, h,.... D'après cela je placerai les $(p+1)p(p-1)\ldots 3.2$ arrangements en $p+1$ colonnes de $1.2.3\ldots p$ lignes horizontales chacune, chaque horizontale contenant p des $p+1$ nombres $1, 2, 3,\ldots p+1$. Ces $p+1$ colonnes où le nombre initial est le rang même de chacune ne formeront qu'une colonne générale commençant par les coefficients de la somme minima, et terminée par ceux de la somme maxima $p+1$, p, $p-1,\ldots$ 3, 2. Voici les lois de la composition de cette colonne :

i J	h I	g H	.....	c D	b C	a B	A
.	.	.		$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	.	.		.	$p-2$	$p-1$	$p+1$
.	.	.		.	$p-2$	p	$p-1$
.	.	.		.	$p-2$	p	$p+1$
.	.	.		.	$p-2$	$p+1$	$p-1$
.	.	.		.	$p-2$	$p+1$	p
.	.	.		.	$p-1$	$p-2$	p
.	.	.		.	$p-1$	$p-2$	$p+1$
.	.	.		.	$p-1$	p	$p-2$
.	.	.		.	$p-1$	p	$p+1$
.	.	.		.	$p-1$	$p+1$	$p-2$
.	.	.		.	$p-1$	$p+1$	p
.	.	.		.	p	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	p	$p-2$	$p+1$
.	.	.		.	p	$p-1$	$p-2$
.	.	.		.	p	$p-1$	$p+1$
.	.	.		.	p	$p+1$	$p-2$
.	.	.		.	p	$p+1$	$p-1$
.	.	.		.	$p+1$	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	$p+1$	$p-2$	p
.	.	.		.	$p+1$	$p-1$	$p-2$
.	.	.		.	$p+1$	$p-1$	p
.	.	.		.	$p+1$	p	$p-2$
.	.	.		$p-3$	$p+1$	p	$p-1$
.	.	.		$p-2$	$p-3$	$p-1$	p
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		$p-1$	$p+1$	p	$p-2$
.	.	.		p	$p-3$	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
1	$p+1$	p	.....	6	5	4	3
2	1	3		$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
2	$p+1$	p		6	5	4	3
3	1	2		$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
3	$p+1$	p		6	5	4	2
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
$p+1$	1	2		$p-4$	$p-3$	$p-2$	$p-1$
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
$p+1$	p	$p-1$		5	4	3	2

La 1re verticale se compose de $p+1$ périodes de $1.2.3\ldots p$ nombres égaux successifs. La 2me verticale se compose de $(p+1)p$ périodes de $1.2.3\ldots(p-1)$ nombres égaux. La 3me verticale comporte $(p+1)p(p-1)$ périodes. *La* $\text{v}^{\text{ième}}$ *verticale comprend* $(p+1)p(p-1)\ldots(p-v+2)$ *périodes chacune de* $1.2.3\ldots(p-v+1)$ *nombres égaux.* Ainsi la $(p-1)^{\text{ième}}$ verticale comprend $(p+1)p(p-1)\ldots4.3$ périodes de 2 nombres égaux, la $p^{\text{ième}}$ verticale contient $(p+1)p(p-1)\ldots4.3.2$ nombres non périodiques.

La loi fondamentale à l'aide de laquelle on peut écrire tous les nombres de la colonne générale consiste en ce que *les nombres qui manquent horizontalement jusqu'au* 1er *nombre d'une période quelconque de la* $\text{v}^{\text{ième}}$ *verticale sont ceux qui doivent former par ordre de croissance les* $p-v+1$ *périodes de la* $v+1^{\text{ième}}$ *verticale en regard de la période considérée.* Ainsi pour écrire les nombres de la $p-1^{\text{me}}$ verticale, en regard de la 2me période de la $p-2^{\text{me}}$ verticale, comme la ligne horizontale qui commence cette période est $1, 2, 3,\ldots p-3, p-1$, j'écrirai 3 périodes formées avec les nombres manquants successifs $p-2, p, p+1$.

Dans toute verticale d'une des $p+1$ colonnes partielles se trouvent tous les nombres $1, 2,\ldots p+1$, excepté celui qui marque le rang de cette colonne qui ne se trouve qu'à la 1re verticale. Si l'on observe dans une verticale les nombres croissants d'une suite de périodes, ce sont les mêmes qui composent dans un autre ordre la même portion de la verticale suivante. Ainsi dans la $p-1^{\text{me}}$ verticale, la 2me suite de périodes croissantes est $p-2, p, p+1$, et ce sont les seuls nombres qui composent la même portion de la $p^{\text{ième}}$ verticale. Une correspondance remarquable des suites de périodes croissantes dans 2 verticales successives consiste en ce que la 1re suite de périodes croissantes de la $\nu^{\text{ième}}$ verticale étant épuisée, la 2me suite commence avec le renouvellement de la 1[re] suite croissante de la $\nu + 1^{me}$ verticale et de tous les termes qui prolongent cette suite dans les verticales suivantes; la 3^{me} suite commence avec le renouvellement de la 2^{me} suite de la $\nu+1^{me}$ verticale, et de tous les termes qui la prolongent à droite, et ainsi de suite.

La loi fondamentale de croissance des périodes verticales, permet de calculer facilement telle ligne horizontale qu'on voudra de la colonne générale. Soit à former la 422^{me} horizontale par exemple, on divisera successivement 422 par 1.2, 1.2.3,... jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'entier au quotient, ce qui donnera les quotients et les restes ci-dessous :

	422		
2	211	reste 0	$p-1$
2.3	70	2	$p-2$
2.3.4	17	14	$p-3$
2.3.4.5	3	62	$p-4$
2.3.4.5.6	0	422	$p-5$

$p-5$	$p-4$	$p-3$	$p-2$	$p-1$	p
.	$p-3$	.	.	.	.
.	$p-2$	.	.	.	.
.	$p-1$	$p-4$	.	.	.
		$p-3$	.	.	.
		$p-2$	$p-4$	.	.
			$p-3$		
			p	$p-4$	$p+1$

422[e] horizontale.

$\ldots . \; p-6 \quad p-5 \quad p-1 \quad p-2 \quad p \quad p-4 \quad p+1$

Puis observant que les verticales $p^{ième}$, $p-1^{me}$, $p-2^{me}$,... commencent par des périodes de 1, $1.2=2$, $1.2.3=6$, $1.2.3.4=24$, 120, 720,... termes, on en conclura que la 422^{me} horizontale commence par le 422^{me} nombre de la période initiale $p-5$ de la $p-5^{me}$ verticale, et que pour les verticales $p-4^{me}$, $p-3^{me}$, $p-2^{me}$, $p-1^{me}$, p^{me}, cette horizontale se continue dans les périodes 4^{me}, 18^{me}, 71^{me}, 211^{me}, 422^{me}. Pour trouver les chiffres de ces périodes, on observera que la période $p-5$ comprend 6 périodes de la droite, $p-4$, 5 ;

$p-3$, 4 ; et $p-1$, 2. Si donc pour faciliter l'application de la loi de croissance, on représente les périodes croissantes, chacune par un terme, la suite initiale de la $p-4^{me}$ verticale sera

$$\begin{array}{ll} p-5, & p-4, \\ \vdots & p-3, \\ \vdots & p-2, \\ \vdots & p-1; \end{array}$$

et comme c'est par la 4^{me} que passe l'horizontale cherchée, on arrêtera cette suite à $p-1$. Les 3 premières périodes de la $p-4^{me}$ verticale, en font 5×3 ou 15 de la $p-3^{me}$, formant par la loi de croissance les périodes de la $p-3^{me}$ verticale en regard de la période $p-1$ dans la $p-4^{me}$ verticale, comme il en faut 18 on s'arrêtera à $p-2$. Les 17 premières périodes de la $p-3^{me}$ verticale en font $4\times 17=68$ de la $p-2^{me}$. Formant les périodes de la $p-2^{me}$ verticale en regard de la période $p-2$ dans la $p-3^{me}$ verticale ; comme il en faut 71, on s'arrêtera à p. Les 70 premières périodes de la $p-2^{me}$ verticale en font 210 de la $p-1^{me}$; ce qui donne $p-4$ pour la 211^{me}, et comme c'est le dernier terme d'une période de la $p-1^{me}$, on doit terminer par le plus haut terme manquant $p+1$. Ces calculs se rangent commodément comme ci-contre, et l'on a ainsi très-rapidement la 422^{me} horizontale ....$p-6$, $p-5$, $p-1$, $p-2$, p, $p-4$, $p+1$.

3. Passons à la recherche des conditions de croissance de l'arrangement variable $\mathrm{J}i+\mathrm{I}h+\mathrm{H}g+\ldots+\mathrm{D}c+\mathrm{C}b+\mathrm{B}a+\mathrm{A}$, depuis la somme minima en tête de la colonne générale jusqu'à la somme maxima $(p+1)i+ph+(p-1)g+\ldots+4b+3a+2$, qui la termine et qui fournit évidemment le minimum de jetons à poser sur la table, savoir :

$$\mathrm{G}=\frac{(p+1)(p+2)x}{2}+l[(p+1)i+ph+(p-1)g+\ldots+3a+2].$$

Les dispositions déjà prises pour la croissance des sommes étant favorables le plus possible, il suffit pour que cette croissance soit assurée qu'on ait constamment

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} Ji + Ih + Hg + \ldots + Dc + Cb + Ba + A \\ \quad < J'i + I'h + H'g + \ldots + D'c + C'b + B'a + A', \end{array} \right.$$

J', I', H',... désignant les nombres qui dans la colonne générale sont placés au-dessous de J, I, H... Pour que cette relation subsiste toujours, il faut que les diverses oppositions que peut y apporter la variation des coefficients A, B,... A', B',... y soient toujours annulées par les valeurs des constantes a, b, c,... i. Or, d'après l'organisation de la colonne générale des arrangements, les deux sommes successives de la relation (1) ne peuvent se trouver placées que dans les circonstances suivantes dont chacune est supposée exclure les précédentes :

1° B et B' périodiques ; d'où

$B = B'$ (*), $C = C'$, $D = D'$,.... $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$;

2° C et C' périodiques ; d'où

$C = C'$, $D = D'$, $E = E'$,.... $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$,

transition de période dans la $p-1^{me}$ verticale ;

3° D et D' périodiques ; d'où

$D = D'$, $E = E'$, $F = F'$,.... $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$,

transition de période dans la $p-2^{me}$ verticale.

. . . .

. . . .

$(p-3)$° H et H' périodiques ; d'où $H = H'$, $I = I'$, $J = J'$, transition de période dans la 4^{me} verticale ;

(*) La réciproque n'est pas vraie, car on peut avoir $B = B'$ sans que ces coefficients forment période, de même que $A = A'$ sans qu'il y ait aucune période dans la verticale A. Même observation pour les hypothèses suivantes.

$(p-2)^\circ$ I et I′ périodiques ; d'où $I = I'$, $J = J'$, transition dans la 3ᵉ verticale ;

$(p-1)^\circ$ J et J′ périodiques ; d'où $J = J'$, transition dans la 2ᵉ verticale ;

p° $J < J'$, transition dans la 1ʳᵉ verticale ou passage d'une colonne partielle à la suivante.

Dans l'hypothèse 1°, la relation (1) se réduit à $A < A'$, et d'après la loi de croissance (2), elle est toujours satisfaite; mais dans les hypothèses suivantes cette relation ne peut subsister que pour les valeurs attribuées aux nombres a, b, c,... et comme elle devient successivement, par les hypothèses,

$$Ba + A < B'a + A',$$
$$Cb + Ba + A < C'b + B'a + A',$$
$$Dc + Cb + Ba + A < D'c + C'b + B'a + A',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Hg + \ldots + Dc + Cb + Ba + A < H'g + \ldots + D'c + C'b + B'a + A',$$
$$Ih + Hg + \ldots + Dc + Cb + Ba + A < I'h + H'g + \ldots + D'c + C'b + B'a + A',$$
$$Ji + Ih + \ldots \quad + Ba + A < J'i + I'h + \ldots \quad + B'a + A',$$

on trouve alors que a, b, c,... doivent satisfaire aux relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a > \dfrac{A - A'}{B' - B}, \quad b > \dfrac{Ba + A - B'a - A'}{C' - C}, \\ c > \dfrac{Cb + Ba + A - C'b - B'a - A'}{D' - D}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i > \dfrac{Ih + Hg + \ldots + Ba + A - I'h - H'g - \ldots - B'a - A'}{J' - J}. \end{array}\right.$$

Les dénominateurs de ces fractions sont toujours positifs, parce qu'ils commencent la transition de 2 périodes dans une suite de périodes croissantes. Quant aux numérateurs, ils le sont toujours aussi, mais il est inutile de le prouver, parce que la supposition qu'ils soient positifs est précisément la seule défavorable à l'existence de la relation (1). Par exemple, dans le cas de D et D′ périodiques, la relation (1) se réduit à $Cb+Ba+A<C'b+B'a+A'$: on a nécessairement $C<C'$, et cette réduction de la relation (1) ne nécessite une détermination pour b que si l'on a $B+A>B'+A'$; autrement, cette réduction serait identiquement satisfaite, quels que fussent b, a.

4. On déterminera facilement des limites inférieures pour les nombres a, b, c,... si l'on observe que les nombres de toute horizontale devant tous différer et être choisis parmi $p+1, p, p-1, \ldots 3, 2, 1$, il suffira de remplacer dans les numérateurs les termes positifs par les plus hauts maxima décroissants, les termes négatifs par les plus faibles minima croissants et les dénominateurs par leurs minima qui ne pouvant être 0 se réduisent à 1. Par exemple, pour déterminer la limite de C, les maxima décroissants de C, B, A étant $p+1$, p, $p-1$ et les minima croissants de C′, B′, A′ étant 1, 2, 3, on aura donc :

$$c>(p+1)b+pa+p-1-b-2a-3=pb+(p-2)a+p-4.$$

C'est ainsi que les relations (2) donnent :

$$(3)\left\{\begin{array}{l} a>p,\ b>pa+p-2,\ c>pb+(p-2)a+p-4, \\ \qquad d>pc+(p-2)b+(p-4)a+p-6, \\ e>pd+(p-2)c+(p-4)b+(p-6)a+p-8, \text{etc.} \end{array}\right.$$

ce qui donne une loi de formation très-simple pour les limites inférieures. Si $p=2$, a est la seule constante ; si $p=3$, a et b sont les seules constantes. Pour $p=p$, il y a $p-1$ constantes. Les relations (3) montrent que si p croît, les derniers termes des seconds membres deviennent de plus en plus négatifs, ce qui arrive dès que $p>4$. Cela tient à ce que les nombres les plus élevés i, h,... correspondent dans la colonne générale à d'autant plus de périodes que p est plus grand, et ont, par conséquent, besoin d'une augmentation moins rapide pour la croissance des sommes horizontales. Ainsi, on posera :

$$a=p+1,\ b=pa+p-1,\quad c=pb+(p-2)\,a+p-3,$$
$$d=pc+(p-2)\,b+(p-4)\,a+p-5,\ \text{etc.},$$

et il sera plus commode dans la pratique de calculer $a, b, c, \ldots$ en fonctions successives les uns des autres qu'en fonction de p. Le minimum de jetons à poser sur la table sera connu

$$G=\frac{(p+1)\,(p+2)}{2}+l\,[2+3\,a+4b+\ldots+(p+1)\,i],\ x=1,$$

et pour résoudre entièremement la question, il ne reste qu'à expliquer comment la connaissance du nombre de jetons laissés sur la table fera trouver l'ordre de la distribution des $p+1$ objets, car $x, y, z, \ldots v$ sont maintenant connus. Supposons qu'il reste M jetons, on aura donc :

$$G-M=\frac{(p+1)\,(p+2)}{2}+l\,(A+Ba+Cb+Dc+\ldots),$$

ce qui se réduit à $A+Ba+Cb+Dc+\ldots=T$, où $a, b, c, \ldots$ sont des entiers connus, $l=1$. Cette équation doit être résolue en nombres entiers positifs pour A, B, C, D,... et l'on sait par les discussions précédentes qu'il n'y a qu'un seul système de p nombres choisis parmi $1, 2, 3, \ldots p+1$ qui y satisfasse. On emploiera donc les méthodes connues de l'analyse indéterminée du premier degré par suite desquelles B, C, D... seront calculés en fonction de plusieurs indéterminées dont A fera partie. Examinant chacun des systèmes $A=1$, $A=2$, $A=3, \ldots$ $A=p+1$, et limitant à chaque fois les valeurs de B, C, D,... par les relations $0<B<p+1$, $0<C<p+1$, etc., on trouvera définitivement A, B, C, D,... Si maintenant on se reporte à la notation $A+Ba+Cb+Dc+\ldots$, on se rappellera que celui des $p+1$ nombres qui est omis parmi A, B, C, D,... provient du rang de l'objet pris par la première personne.

Personnes	$p+1$,	p,	$p-1$,	. . . .	5,	4,	3,	2,	1,
Objets	J,	I,	H,			D,	C,	B,	A,

Écrivant donc sur deux horizontales les nombres $p+1$, p, $p-1$ ... 3, 2, 1 et J, I ... B, A, on dira que la 2^{me} personne a pris le A^{me} objet, la 3^{me} le B^{me}, la 4^{me} le C^{me}, etc., la 1re l'objet non encore nommé. On peut d'ailleurs éviter le calcul de l'équation qui doit fournir A, B, C, D,... en dressant pour les cas numériques dont on veut faire l'épreuve une table des arrangements correspondants à chaque reste, ou même, si p est fort petit, en composant une phrase mnémonique faisant l'office de cette table. (*Arithmétique de Reynaud*, page 309, 23^e édition.)

NOTE

Sur l'expression analytique de la plus courte distance d'un point à une droite ou d'un point à un plan.

PAR M. E. PROUHET,
professeur au Collége royal d'Auch.

—

I.

Pour exprimer la plus courte distance d'un point à une droite en fonction des coordonnées du point et des coefficients de l'équation de la droite, on commence ordinairement par mener une perpendiculaire du point à la droite; on cherche ensuite les coordonnées du pied de la perpendiculaire, et il ne reste plus qu'à calculer la distance de deux points dont les coordonnées sont connues. Cette marche est très-naturelle; mais elle a l'inconvénient de conduire à de très-longs calculs, surtout quand les axes sont obliques. Le procédé que je vais exposer dans cette note conduit beaucoup plus rapidement au but, et en le généralisant il nous permettra d'obtenir la plus courte distance d'un point à un plan, dans le cas le plus général possible.

Soient :

D la droite donnée : $OA=a$, $OB=b$, ses coordonnées à l'origine ;

D′ une parallèle à la droite D, menée par le point donné (x', y', z') ;

c le segment de la droite D intercepté entre les axes ;

h, h' les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les droites D, D′ ;

δ la distance cherchée ;

φ l'angle des axes.

On aura évidemment :

$$\delta = h - h'.$$

Si on appelle m le rapport de similitude des deux triangles OAB, OA′B′, on aura $h' = mh$: donc

$$\delta = (m-1)h.$$

Pour avoir la valeur de h, je remarque que l'aire du triangle OAB est exprimée par $\frac{bc}{2}$, et aussi par $\frac{ab\sin\varphi}{2}$: donc

$$h = \frac{ab\sin\varphi}{c}.$$

Pour avoir la valeur de m, je remarque que l'équation de la droite D étant

$$(1) \qquad ay + bx - ab = 0,$$

l'équation de la droite D′ dont les coordonnées à l'origine sont ma, mb, doit être

$$(2) \qquad ay + bx - mab = 0,$$

l'équation (2) devant être satisfaite, quand on fait $x = x'$, $y = y'$, on aura en faisant cette substitution et résolvant par rapport à m :

$$m = \frac{ay' + bx'}{ab}.$$

D'ailleurs, du triangle OAB, on tire : $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos y}$; donc, en substituant dans la formule $\delta = (m - 1)h$ ces valeurs que nous venons de trouver, nous aurons :

$$\delta = \frac{(ay' + bx' - ab)\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}}.$$

Si l'équation était donnée sous la forme $Ay + Bx + C = 0$, il suffirait de remplacer dans cette formule a, b, ab par les quantités A, B, —C qui leur sont proportionnelles, et on aurait :

$$\delta = \frac{(Ay' + Bx' + C)\sin\varphi}{\sqrt{A^2 + B^2 + 2C\cos\varphi}}.$$

II.

Proposons-nous maintenant de trouver la plus courte distance d'un point H à un plan donné P.

Soient :

$OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, les coordonnées à l'origine du plan donné P;

$OA' = ma$, $OB' = mb$, $OC' = mc$, celles d'un plan P' parallèle au plan P, et passant par le point donné $M(x', y', z')$;

s la portion du plan P interceptée entre les plans coordonnés;

h, h' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans P, P';

δ la distance cherchée;

α, β, γ les angles des axes.

On aura comme plus haut :

$$\delta = (m - 1) h.$$

La pyramide triangulaire OABC a pour mesure $\frac{1}{3} hs$ et aussi $\frac{1}{3} abc\mathrm{F}$, F désignant ici pour abréger la fonction

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Donc on aura :

$$h = \frac{abc\mathrm{F}}{s}.$$

L'équation du plan P' dont les coordonnées à l'origine sont ma, mb, mc, est

$$bcx + acy + bcz - mabc = 0,$$

d'où l'on tire, en faisant $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$:

$$m = \frac{bcx' + acy' + bcz'}{abc};$$

donc on aura :

$$\delta = \frac{(bcx' + acy' + bcz' - abc)\mathrm{F}}{s}.$$

Pour résoudre complétement le problème, il reste à exprimer s en fonction des quantités a, b, c, α, β, γ. Si nous désignons par e, f, g les côtés de ce triangle respectivement opposés aux arêtes a, b, c, nous aurons d'après une formule connue :

$$16s^2 = 2f^2g^2 + 2e^2g^2 + 2e^2f^2 - e^4 - f^4 - g^4.$$

Mais on voit facilement que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\ f^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$g^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

En faisant la substitution et réduisant, on aura la formule symétrique :

$$4s^2 = \Sigma b^2c^2\sin^2\alpha - 2\Sigma a^2bc\,(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma).$$

La valeur de δ sera donc

$$\delta = (bcx' + acy' + abz' - abc) \times$$
$$\times \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sqrt{\Sigma b^2c^2\sin^2\alpha - 2\Sigma a^2bc\,(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}}.$$

NOTE

SUR LES NOMBRES PARFAITS.

(Voir page 218.)

PAR M. LEBESGUE,
professeur à la faculté de Bordeaux.

—

La règle d'Euclide qui donne des nombres parfaits essentiellement pairs, les donne-t-elle tous? L'affirmative s'établit en deux mots; mais quant à cette autre question : y a-t-il des nombres parfaits impairs? elle reste pour moi tout à fait indécise ; j'ai bien démontré que x^x, $x^\alpha y^\beta$, $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, ne sauraient être impairs et parfaits; le cas de $x^\alpha y^\beta z^\gamma u^\delta$ et quelques autres s'établissent peut-être de la même manière; mais en laissant indéterminé le nombre des facteurs premiers impairs et différents x, y, z, u,... je ne puis établir qu'il n'y a point de nombres parfaits impairs. Les propriétés que vous énoncez relativement aux nombres parfaits, doivent donc être attribuées aux nombres parfaits pairs.

Legendre dit que $2^{31}-1$ (*Théorie des nombres*, t. I, p. 229, 1830), est le plus grand des nombres premiers vérifiés. D'après la table que vous avez donnée, $2^{41}-1$, $2^{47}-1$ seraient premiers, et l'assertion de Legendre inexacte, ce qui est fort possible.

Théorème. L'équation des nombres parfaits

$$2.x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots=(1+x+\ldots+x^{\alpha})(1+y+\ldots+y^{\beta})(1+z+\ldots+z^{\gamma})\ldots \quad (1),$$

où $x, y, z,\ldots$ sont des nombres premiers différents, est possible quand $x=2$, ou pour les nombres pairs. L'équation devient alors :

$$y^{\beta}z^{\gamma}\ldots+\frac{y^{\beta}z^{\gamma}\ldots}{2^{\alpha+1}-1}=(1+y+\ldots y^{\alpha})(1+z\ldots+z^{\gamma}),$$

dont l'impossibilité est manifeste, quand les exposants β, $\gamma\ldots$ sont autres que 1, 0, 0 ;... mais pour ce cas, on obtient la solution d'Euclide.

Problème. L'équation (1) est-elle toujours impossible, quand les nombres $x, y, z,\ldots$ sont impairs ?

NOTE SUR LA TOROÏDE.

PAR E. CATALAN,
Répétiteur à l'École polytechnique.

Pour obtenir l'équation de cette courbe, il faut, ainsi que l'a fait voir M. Cauchy, éliminer θ entre les deux équations

$$\frac{a^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=1,\quad \frac{\theta^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=k^2.$$

(*Nouvelles Annales*, t. III, p. 455).

Cette élimination se fait assez simplement de la manière suivante.

Chassant les dénominateurs, on obtient d'abord :

$$a^2(\theta+b^2)^2x^2+b^2(\theta+a^2)^2y^2=(\theta+a^2)^2(\theta+b^2)^2, \quad (1)$$
$$\theta^2(\theta+b^2)^2x^2+\theta^2(\theta+a^2)^2y^2=k^2(\theta+a^2)^2(\theta+b^2)^2. \quad (2)$$

Multipliant l'équation (1) par θ^2, l'équation (2) par a^2 ; retranchant membre à membre, et supprimant le facteur $(\theta+a^2)^2$, j'obtiens :

$$(a^2-b^2)\theta^2y^2=(\theta+b^2)^2(a^2k^2-\theta^2). \quad (3)$$

On aurait de même :

$$(a^2-b^2)\theta^2x^2=(\theta+a^2)^2(\theta^2-b^2k^2). \quad (4)$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (3) et (4), et si l'on supprime le facteur a^2-b^2, commun aux deux membres de l'équation résultante, on obtient :

$$\theta^2(x^2+y^2)=\theta^2(a^2+b^2+2\theta)+k^2(\theta^2-a^2b^2). \quad (5)$$

Multiplions l'équation (3) par a^2, l'équation (4) par b^2, ajoutons, et supprimons le facteur $(a^2-b^2)\theta$; il viendra :

$$\theta(a^2y^2+b^2x^2)=\theta(a^2b^2-\theta^2)+k^2\theta(a^2+b^2)+2a^2b^2k^2. \quad (6)$$

Ces deux dernières équations étant ordonnées par rapport à θ, deviennent :

$$2\theta^3-\theta^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)-a^2b^2k^2=0, \quad (5')$$
$$\theta^3+\theta(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)-2a^2b^2k^2=0. \quad (6')$$

J'élimine tour à tour, entre ces deux dernières équations, le terme en θ^3 et le terme indépendant ; j'obtiens ainsi :

$$A\theta^2+2B\theta-3C=0, \quad (7) \qquad 3\theta^2-2A\theta-B=0; \quad (8)$$

en posant, pour abréger,

$$A=x^2+y^2-a^2-b^2-k^2,\quad B=a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2,$$
$$C=a^2b^2k^2.$$

Les équations (7) et (8), traitées comme les deux précédentes, donnent

$$2(A^2+3B)\theta+(AB-9C)=0, \qquad (9)$$
$$(AB-9C)\theta+2(B^2+3AC)=0. \qquad (10)$$

Enfin, l'élimination de θ entre ces deux dernières équations, conduit à

$$(AB-9C)^2 = 4(A^2+3B)(B^2+3AC).$$

L'équation de la toroïde est donc

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\ &+4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3-27a^4b^4k^4\\ &+18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\\ &+4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3=0.\end{aligned}$$

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

(Suite, voir page 213.)

—

15. Théorème VI. Si l'on désigne par e l'excès relatif à la fraction $\dfrac{xF'(x)}{F(x)}$ et pris entre les limites $-a$ et $+b$; soient de plus π le nombre des racines positives et ν le nombre des racines négatives de l'équation $F(x)=0$, comprises entre ces mêmes limites, on aura $e=\pi-\nu$, pourvu que le polynôme $F(x)$ ne soit pas divisible par x.

Démonstration. Décomposons e en deux parties, e' relatif aux racines négatives et e'' relatif aux racines positives de

$F(x) = 0$; on aura $e = e' + e''$. D'ailleurs $\frac{xF'x}{Fx}$ et $\frac{F'(x)}{Fx}$ sont de signe toujours opposé dans l'intervalle de $-a$ à 0, et de même signe dans l'intervalle de $+0$ à $+b$; donc (Prob. II) : $e' = -\nu$; $e'' = \varpi$; ainsi $\varpi - \nu = e$; et comme on sait calculer e, on connaît donc la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives d'une équation.

16. Lemme I. p étant une racine de $F'(x)$, $F(p)$ est un minimum ou un maximum absolu (abstraction faite du signe), selon que le produit $F(p)\, F''(p)$ est positif ou négatif.

La démonstration est dans tous les traités élémentaires.

17. Problème (III). Étant donnée la fonction entière $F(x)$, trouver la différence entre le nombre des maxima et des minima absolus dont elle est susceptible. On suppose que ni $F(x)$ ni $F'(x)$ n'ont de racines égales.

Solution. Posons les deux équations :

$$F'(x) = 0\,, \qquad y + F(x)\, F''(x) = 0\,;$$

soit $y = 0$ le résultat de l'élimination de x ; y ne peut avoir plus de valeurs que $F'(x)$ n'a de racines ; les valeurs positives de y correspondent à des maxima, et les valeurs négatives à des minima ; y est donc de même degré que $F'(x)$; d'après le théorème VI, on peut connaître la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation $y = 0$, et cette différence est égale à la différence cherchée (15).

18. Théorème VII. Le nombre de racines réelles distinctes d'une fonction algébrique entière, augmenté d'une unité, est toujours égal au nombre des maxima dont la fonction est susceptible, moins le nombre des minima.

Démonstration. Il suffit de construire la courbe parabolique représentée par l'équation $y = F(x)$, et de discuter les diverses formes de la courbe ; et le théorème devient d'une évidence intuitive. On peut aussi parvenir au même but d'une manière discursive et plus longue, par des considérations purement analytiques.

Remarque historique. A l'aide des théorèmes, lemmes et problèmes contenus dans les quatre paragraphes précédents, et qui appartiennent tous à M. Cauchy, on peut donc toujours trouver le nombre des racines réelles positives et négatives d'une équation. C'est ce que l'illustre analyste a fait connaître en 1815 (*). Il indique comment on peut remédier à la restriction que les racines égales ou nulles apportent à la méthode. Ainsi dès 1815 on possédait des moyens certains de déterminer le nombre de racines réelles, en considérant la succession de lignes de certaines fonctions, dont l'une était $\frac{F''x}{Fx}$; ce n'est qu'en 1829 que M. Sturm, au lieu de cette fonction, a pris celle-ci, $\frac{F'x}{Fx}$, et est parvenu au théorème d'une si admirable simplicité ; les procédés laborieux de M. Cauchy sont sans doute l'unique motif qui ont détourné l'attention que méritait un travail d'une si haute importance et qui, quinze après son apparition, était presque oublié. Nous reviendrons sur plusieurs autres théorèmes que contient ce beau mémoire ; on y trouve le germe de la proposition Sylvester que M. Sturm vient de démontrer. (Journal de Liouville, t. 5.)

Venons maintenant, comme s'exprime M. l'abbé Moigno, à l'une des plus belles conquêtes qu'on doit au génie de M. Cauchy. On sait que toute racine imaginaire est composée de deux parties reélles, mais dont la seconde est multipliée par $\sqrt{-1}$; M. Cauchy a découvert le moyen de déterminer

(*) Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques. Journ. de l'Ecole polytechn., 17ᵉ cahier. p. 457, 1815.

les limites de ces parties réelles, à l'aide d'un magnifique théorème, généralisation d'un théorème semblable, qu'on doit à l'illustre analyste de Göttingue (*voir* t. 1, p. 443). MM. Sturm (Charles) et Liouville en ont les premiers donné une démonstration élémentaire ; mais nous prendrons celle que M. Cauchy a indiquée, en la faisant précéder de quelques éclaircissements à l'usage de nos jeunes lecteurs.

19. Soient $f(x,y)=0$ (1), $F(x,y)=0$ (2) et $z=\dfrac{f(x,y)}{F(x,y)}$ (3) les équations de deux lignes et d'une surface rapportées aux mêmes axes rectangulaires. Les deux premières fonctions étant algébriques et entières, les valeurs de z sont constamment réelles, et par conséquent ne peuvent changer de signe qu'en passant par zéro ou par l'infini ; pour tous les points de la ligne représentée par l'équation (1), les valeurs de z sont nulles, et pour les points de la ligne représentée par l'équation (2), ces valeurs sont infinies. Mais pour les points d'intersection de ces deux lignes, les valeurs de z sont $\frac{0}{0}$ ou indéterminées. C'est-à-dire que l'ordonnée z fait partie de la surface. De sorte que la surface cylindrique ayant pour directrice la ligne (2) et pour génératrice une droite parallèle à l'axe des z, sera asymptote à la surface (3), et les deux surfaces auront autant de droites en commun que les deux lignes (1) et (2) ont de points d'intersection, que nous désignons avec M. Prouhet (*voir* t. 1, p. 444) sous le nom de *points-racines*. Concevons qu'on trace sur le plan xy un contour *fermé* pouvant être une ligne continue ou composée de plusieurs lignes quelconques, mais avec la condition essentielle de ne pas passer par un des *points-racines*. Supposons que ce contour fermé, que nous désignons par C, renferme dans son intérieur un nombre m de points-racines. Si, en partant d'un point M de ce contour, on marche toujours dans le même sens, il est évi-

dent, le contour étant fermé, qu'on reviendra au même point M ; à chaque station correspond une valeur réelle de z, dans les passages par la ligne (1) ces valeurs sont nulles, et par la ligne (2) elles sont infinies. Ne considérons que ces derniers passages : un instant avant, et après, les valeurs de z présentent une variation, soit ascendante, soit descendante ; la différence entre le nombre des variations ascendantes et descendantes est ce que nous avons appelé l'*excès* E (p. 191). Lorsque les fonctions (1) et (2) sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, il n'y a aucune relation entre E et m ; mais si l'on établit une relation entre les deux fonctions, il s'ensuivra aussi quelque relation entre E et m ; or si l'on a cette relation :

$$f(x\,,y)+\mathrm{F}(x\,,y)\sqrt{-1}=\varphi\left(x+y\sqrt{-1}\right),$$

φ désignant une fonction algébrique entière, alors $\mathrm{E}=2m$; c'est là le théorème de M. Cauchy, qu'il nous reste à démontrer.

La relation entre les deux fonctions se décompose en ces deux équations :

$$f(x,y)=\varphi x-\varphi'' x.\frac{y^2}{1.2}+\varphi^{\mathrm{IV}}x.\frac{y^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

$$\mathrm{F}(x,y)=\varphi' x.y-\varphi''' x.\frac{y^3}{1.2.3}+\varphi_{\mathrm{V}}x.\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.$$

Ainsi la fonction φ étant donnée, on voit comment on en déduit les fonctions f et F ; c'est une conséquence évidente du théorème de Taylor.

21. Lemme I. Considérons deux fonctions $f(s)$ et $\mathrm{F}(s)$ de la variable s et continues entre les limites $s=s_0$ et $s=s_1$, on donne de plus les équations de condition :

$$f(s_0)=f(s_1),$$
$$\mathrm{F}(s_0)=\mathrm{F}(s_1);$$

$\dfrac{f(s)}{\sqrt{(fs)^2+(\mathrm{F}s)^2}}$ et $\dfrac{\mathrm{F}s}{\sqrt{(fs)^2+(\mathrm{F}s)^2}}$ sont des fractions plus petites que l'unité et dont la somme des carrés est égale à l'unité, la première peut donc représenter le cosinus d'un arc, et la seconde le sinus; désignant le dénominateur pris positivement par r, on aura :

$$f(s) = r\cos p \quad \text{et} \quad F(s) = r\sin p\,;$$

p est un arc, fonction de s, et fonction qu'on assujettit à la continuité. L'excès e de la fraction $\frac{F(s)}{f(s)}$, pris entre les limites s_0 et s_1, est égal à $\frac{p_1 - p_0}{\pi}$; p_1 et p_0 sont les valeurs de p aux deux limites.

Démonstration. $\frac{F(s_0)}{f(s_0)} = \tang p_0$; $\frac{F(s_1)}{f(s_1)} = \tang p_1$; ainsi, en vertu de l'équation de condition, $\tang p_0 = \tang p_1$; donc $p_1 - p_0 = n\pi$; n étant un nombre entier; si l'on fait croître insensiblement l'arc p depuis p_0 jusqu'à p_1, $p_1 - p_0$ sera égale à la somme de tous les accroissements; la tangente de cet arc pourra passer plusieurs fois par l'infini, de deux manières; du négatif au positif; alors l'arc passe brusquement de $-\frac{\pi}{2} - \delta$ à $\frac{\pi}{2} + \delta'$, δ et δ' sont des quantités infiniment petites; l'accroissement est donc $+\pi + \delta + \delta'$, quantité finie, et la fonction est discontinue; mais à $\tang\frac{\pi}{2} + \delta$ on peut substituer $\tang\frac{\pi}{2} + \delta - \pi$; alors l'accroissement devient $\delta - \delta'$, quantité infiniment petite, et la fonction reste continue. Ainsi toutes les fois que la tangente passe par l'infini, au moyen d'une variation ascendante, il faudra, pour empêcher les accroissements brusques de l'arc, retrancher π; et pour le même motif, il faudra ajouter π, lorsque la variation est descendante. Si nous appelons donc e' l'*excès* de la fonction fractionnaire $\frac{F(s)}{f(s)}$, on aura $p_{(1)} - p_{(0)} = -e'\pi$; mais $e' = -e$; donc $p_1 - p_{(0)} = e\pi$. C. Q. F. D.

Observation. Il est évident que le théorème subsiste si f est une fonction de plusieurs variables $x, y, z\ldots$, pourvu que chacune de ces variables soit une fonction continue de s.

22. Lemme II. Considérons deux fonctions fractionnaires $\frac{f(s)}{F(s)}$ et $\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$ de la même variable s ; et ces fonctions sont soumises aux équations de condition du lemme précédent ; soit

$f(s) = r\cos p$; $F(s) = r\sin p$; $\varphi(s) = r'\cos p'$; $\psi(s) = r'\sin p'$;
ou

$$f(s) + F(s)\sqrt{-1} = r\cos p + \sqrt{-1}\sin p),$$
$$\varphi(s) + \psi(s)\sqrt{-1} = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p') ;$$

multipliant ensemble membre à membre les deux équations, il vient :

$$S + T\sqrt{-1} = rr'[\cos(p+p') + \sqrt{-1}\sin(p+p')],$$
$$S = f(s)\,\varphi(s) - F(s)\,\psi(s),$$
$$T = f(s)\,\psi(s) - F(s)\,\varphi(s).$$

Soit E, e, e' les excès relatifs aux fractions $\frac{S}{T}$, $\frac{fs}{F(s)}$, $\frac{\varphi(s)}{\psi s}$, on aura :
$$E = e + e'.$$

Démonstration. $e = \frac{p_1 - p_0}{\pi}$; $e' = \frac{p_1' - p_0'}{\pi}$; mais $p + p$ est l'arc correspondant à $\frac{S}{T}$; donc ....

Corollaire. La même démonstration a lieu, quel que soit le nombre des fonctions fractionnaires.

23. Soit une courbe *fermée*, rapportée à des coordonnées polaires ; supposons d'abord le pôle dans l'intérieur de la courbe. Désignons par p_0 l'angle polaire d'un point M de la courbe. Si le point M mobile sur la courbe parcourt son contour dans le même sens, p_0 croîtra sans cesse ;

quand on sera revenu au même point M, quand on aura parcouru tout le contour, p_0 sera devenu

$$p_0 + 2\pi\ ;\ \text{ou}\ p_1 = p_0 + 2\pi\ ;\ p_1 - p_0 = 2\pi.$$

Mais si le pôle est extérieur, le même mouvement du point M, après avoir fait croître p_0, le fera décroître de la même quantité ; de sorte que l'on aura, à la fin du mouvement $p_1 = p_0$ ou $p_1 - p_0 = 0$.

Observation. C'est ainsi qu'on explique, dans le système du monde, les rétrogradations apparentes des planètes.

24. *Théorème de M. Cauchy.* Supposons que $F(z)$ soit une fonction entière du degré n, qui, lorsqu'on change z en $x + y\sqrt{-1}$, devient $f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1}$: traçons dans le plan de x, y une courbe fermée dont la longueur du contour soit c, et dont les coordonnées x, y puissent être considérées comme des fonctions continues de l'arc s de cette courbe ; le nombre m des points dont les coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$ (points-racines) vérifient l'équation $f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1} = 0$ sera donné par l'équation $m = \frac{E}{2}$; E étant l'excès relatif à la fonction $\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$, et pris entre les limites $s = 0$, $s = c$.

Démonstration. Rapportons la courbe fermée à des coordonnées polaires, et choisissons pour pôle le *point-racine* dont les coordonneés soient $x = \alpha$, $y = \beta$; nous aurons $x - \alpha = r\cos p$ et $y - \beta = r\sin p$, r et p étant le rayon vecteur et l'angle polaire du point mobile M ; $x - \alpha$ et $y - \beta$ sont des fonctions continues de l'arc s ; donc aussi r et p ; et r est essentiellement positif.

Appelant e l'excès relatif à $\frac{x - \alpha}{y - \beta}$ ou $\operatorname{tang} p$ considérée comme fonction de s et pris entre les limites $s = 0$, $s = c$, on a, d'après le lemme I :

$$e = \frac{p_1 - p_0}{\pi}\ ;\ \text{si le pôle est intérieur, } p_1 - p_0 = 2\pi,$$

$$\text{si le pôle est extérieur, } p_1 - p_0 = 0.$$

Donc $e = 2$ si le point-racine est intérieur, et $e = 0$ s'il est extérieur ; pour un autre point-racine ayant pour coordonnées α', β', on aura de même $e' = 2$ ou $e' = 0$, selon que le point-racine est au dedans ou au dehors de la courbe ; cet excès étant relatif à la fraction $\dfrac{x - \alpha'}{y - \beta'}$; et ainsi des autres points-racines.

Donc, en supposant qu'il n'y ait aucun point-racine sur la courbe, et qu'il y ait m points-racines dans l'intérieur, on aura

$$e + e' + e'' + \ldots = 2m.$$

Or

$$Fz = \left(z - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)\left(z - \alpha' - \beta'\sqrt{-1}\right)\left(z - \alpha'' - \beta''\sqrt{-1}\right)\ldots =$$
$$= \left[\left(x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1}\right)\left(x - \alpha' + (y - \beta')\sqrt{-1}\right)\left(x - \alpha'' + (y - \beta'')\sqrt{-1}\right)\right]$$
$$= f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1}\ ;$$

donc, d'après le lemme précédent,

$$E = e + e' + e'' + \text{etc.} \ldots = 2m.$$

C. Q. F. D.

Remarque I. Les ordonnées β, β', β'' .... peuvent être nulles ; alors les points-racines correspondent à des racines réelles.

Remarque II. Lorsque l'équation a des racines égales, il y a des points-racines qui coïncident ; ces points-racines sont multiples.

Remarque III. Le théorème a de même lieu pour les fonctions non entières ou transcendantes, pourvu qu'elles admettent la forme $\left(z - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)$ et que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ne rende pas infini ou nul le quotient de la fonction par $\left(z - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)^n$.

Remarque IV. Les fonctions f et F auxquelles s'applique le théorème de M. Cauchy sont les équations (U) et (T) de M. Gauss (t. 1, p. 441), qui a montré aussi comment on trouve le nombre de *points-racines* renfermés dans un cercle de rayon quelconque décrit de l'origine comme centre. De sorte que le théorème de M. Cauchy n'est au fond, comme nous l'avons dit, qu'une généralisation du théorème de M. Gauss.

25. Problème. Étant donnée l'équation $F(z) = 0$, trouver combien elle a de racines imaginaires dont la partie réelle est renfermée entre les limites x_0, x_1, et dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ est renfermée entre les limites y_0, y_1.

Solution (fig. 78). Soient les axes rectangulaires OX, OY ; faisons $OM = x_0$; $ON = x_1$; $AM = y_0$; $DM = y_1$ et formons le rectangle ABCD.

Remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$, on aura :

$$F(z) = f(x, y) + F(x, y)\sqrt{-1} \, ;$$

la question est donc réduite à trouver le nombre des points-racines renfermés dans le contour ABCD ; parcourons ce contour en allant de A vers B ; s étant comme ci-dessus la longueur d'un arc de la ligne parcourue, on a pour la droite :

			Limites.	*Excès.*
AB	$x = s$;	$y = y_0$;	$x_0 \ldots x_1$	E
BC	$y = s$;	$x = x_1$;	$y_0 \ldots y_1$	
CD	$x = s$;	$y = y_1$;	$x_1 \ldots x_0$	
DA	$y = s$;	$x = x_0$;	$y_1 \ldots y_0$	

Soit $\dfrac{f(x, y)}{F(x, y)} = \varphi(x, y)$; désignons par

E_{y_0} l'excès de la fonction $\varphi(x, y_0)$ entre les limites x_0, x_1;
E_{x_1} ..... $\varphi(x_0, y)$ .... y_0, y_1;
E'_{y_1} ..... $\varphi(x, y_1)$ ..... x_1, x_0
E'_{x_0} ..... $\varphi(x_0, y)$ ..... y_1, y_0;

d'où $$E = E_{y_0} + E_{x_1} + E'_{x_1} + E'_{x_0} = 2m.$$

Désignant par

E_{y_1} l'excès relatif à $\varphi(x, y_1)$ pris entre les limites x_0, x_1;
E_{x_0} ..... $\varphi(x_0, y)$ ..... y_0, y_1;

on aura $$E = E_{y_0} - E_{y_1} - [E_{x_0} - E_{x_1}];$$

car l'on a évidemment $E'_{y_1} = -E_{y_1}$. On calcule ensuite les quatre excès nécessaires pour trouver E d'après le problème (II, p. 192) ; et la moitié de E donne le nombre de points-racines qui se trouvent dans l'intérieur du rectangle.

Observation. Lorsque y_0 et y_1 sont de même signe, la partie comprise ne peut être nulle ; donc, dans ce cas, le rectangle ne peut renfermer des racines réelles.

(*La fin prochainement.*)

DÉMONSTRATION.

De la quadrature de l'hyperbole par la méthode des limites.

PAR H. PRUDOT,
professeur de mathématiques.

—

Lemme. Soient A, B, C des quantités constantes, et α, β des quantités qui peuvent devenir aussi petites que l'on veut; je dis que si l'égalité

$$(A - \alpha)^{B+\beta} = C, \qquad (1)$$

a toujours lieu, quelque petits que soient α et β, on a aussi

$$A^B = C.$$

En effet, développant (1), il vient :

$$\left.\begin{array}{l}(A-\alpha)^{B+6}=A^{B+6}-(B+6)\alpha A^{B+6-1}+\dfrac{(B+6)(B+6-1)}{1.2}\alpha^2 A^{B+6-2}+\\ +\ldots\pm\dfrac{(B+6)(B+6-1)\ldots(B+6-n+1)}{1.2.3\ldots n}\alpha^n A^{B+6-n}+R_n,\end{array}\right\}$$

en nommant R_n le reste de la série. Or en prenant assez de termes, comme la série est convergente, R_n pourra devenir aussi petit que l'on voudra. D'un autre côté chacun des n termes renfermant α comme facteur, pourra aussi devenir plus petit que toute quantité donnée, et comme le degré de petitesse de α est indépendant du nombre n, on pourra toujours prendre α assez petit pour que la somme des n termes renfermant α soit aussi petite que l'on voudra. Donc la différence, le premier membre de (2) et le premier terme du deuxième membre, est une quantité variable à l'infini. En la représentant par δ on pourra poser :

$$(A-\alpha)^{B+6}=A^{B+6}-\delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$A^{B+6}-\delta=C, \qquad \text{d'où} \qquad A^{B+6}-C=\delta. \qquad (3)$$

Cela posé, si A^B n'était pas égal à C on aurait :

$$A^B-C=D,$$

D étant une quantité finie; mais on a évidemment $A^{B+6}>A^B$ d'où $A^{B+6}-C>A^B-C$; donc on aurait $A^{B+6}-C>D$; d'où à cause de (3),

$$\delta>D,$$

ce qui ne peut avoir lieu, puisque δ est variable à l'infini, et D constant, donc

$$A^B-C=D.$$

QUADRATURE DE L'HYPERBOLE.

Soit KEF (*fig.* 77) une hyperbole équilatère, rapportée à ses asymptotes, et ayant par conséquent pour équation :

$$yx=1.$$

Prenons sur OX, OA = 1, OB = x, divisons AB en un nombre quelconque de parties qui peuvent ne pas être égales, et construisons les rectangles indiqués par la figure. Il est évident d'abord que la différence entre la somme des rectangles extérieurs et l'aire hyperbolique EABI, peut devenir aussi petite que l'on veut en faisant croître successivement le nombre de ces rectangles; car la différence entre la somme des rectangles extérieurs et celle des rectangles intérieurs est égale à la somme des rectangles DMN, etc., lesquels ont pour expressions $(x'-1)(1-y')$, $(x''-x')(y'-y'')$, etc.,... soit $(y^{(p)}-y^{(p-1)})$, le plus grand des seconds facteurs de ces produits, la somme des rectangles EDMN, etc., sera plus petite que $(y^{(p)}-y^{(p-1)})[x'-1+x''-x'+x'''-x''+...+x-x^{(n-1)}]$, ou que $y^{(p)}-y^{(p-1)}(x-1)$, or le facteur $y^{(p)}-y^{(p-1)}$ peut devenir aussi petit qu'on le veut, tandis que le facteur $(x-1)$ est constant, donc la différence entre la somme des rectangles extérieurs et celle des rectangles intérieurs, décroît indéfiniment, donc à fortiori, etc...

Cela posé, si au lieu de prendre arbitrairement les points C, G, H, etc.; on les détermine de manière que les abscisses OA, OC, etc., soient en progression géométrique, ce qui se fera en intercalant un certain nombre de moyens géométriques entre 1 et x, ces abscisses pourront se représenter par

$$1,\quad x',\quad x'^2,\quad x'^3,\ldots\quad x'^n,$$

en nommant x' la raison, et les ordonnées tirées de l'équation de la courbe, seront

$$1,\quad \frac{1}{x'},\quad \frac{1}{x'^2},\quad \frac{1}{x'^3},\ldots\frac{1}{x'^n}.$$

Le premier rectangle extérieur sera alors exprimé par $(x'-1)\times 1 = x'-1$; le second aura pour valeur :

$(x'^2-x')\times\dfrac{1}{x'}=x'-1$; le 3^e sera $(x'^3-x'^2)\times\dfrac{1}{x'^2}=x'-1$, etc., c'est-à-dire qu'ils seront tous égaux à $x'-1$. Donc si on considère les sommes successives de rectangles terminés aux différentes abscisses, sommes que l'on obtiendra en prenant d'abord O, puis le premier rectangle, puis la somme des deux premiers, puis la somme des trois premiers, etc. Ces sommes formeront la progression arithmétique,

$$0,\quad x'-1,\quad 2(x'-1),\quad 3(x'-1),\quad n(x'-1).$$

Mais en intercalant assez de moyens géométriques entre 1 et x, on peut rendre la différence entre 1 et la raison x', aussi petite qu'on veut et en même temps, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, la différence entre l'aire hyperbolique EABI, et la somme de tous les rectangles extérieurs décroîtra indéfiniment. Si donc on représente par A l'aire hyperbolique, par S la somme des rectangles, et par z et α des quantités variables à l'infini, on pourra écrire :

$$x' = 1 + z, \qquad S = A + \alpha.$$

Cela posé, nous allonc démontrer que si on prend une abscisse quelconqne $OB = x$, il existe un nombre constant, c'est-à-dire indépendant de x, qui, élevé à une puissance égale à l'aire hyperbolique correspondante, reproduit l'abscisse proposée.

Pour cela cherchons le nombre qu'il faudrait élever à une puissance égale à $S = n(x'-1)$, pour reproduire l'abscisse correspondante $x = x'^n$. Si on nomme E ce nombre, il suffira de poser :

$$(1) \qquad E^S = x \text{ ou } E^{n(x'-1)} = x'^n \text{ d'où } E = x'^{\frac{1}{x'-1}},$$

ce qui donne en remplaçant x' par $1 + z$:

$$E = (1+z)^{\frac{1}{z}}.$$

Le deuxième membre développé donne :

$$E = 1 + \frac{1}{z}z + \frac{1}{z} \times \frac{1-z}{2z}.z^2 + \frac{1}{z} \times \frac{1-z}{2z} \times \frac{1-2z}{3z}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{z}.\frac{1-z}{2z}.\frac{1-2z}{3z}\ldots\frac{1-(n-1)z}{nz}z^n =$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2z}{3}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{n} - \frac{(n-1)z}{n}\right);$$

série convergente, car le rapport du $n^{ième}$ terme au précédent est $\frac{1-(n-1)z}{n}z = -\frac{(n-1)z-1}{n}z$, nombre plus petit que z, qui ici est supposé une fraction.

Cette série peut encore s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(2)\qquad E = \left[2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\right] +$$

une suite de termes tels que $-\frac{z}{2} - \frac{z}{2.3} - \frac{2.z}{2.3} + \frac{2z^2}{2.3}, \ldots$ renfermant tous z comme facteur, et dont le nombre sera limité quand n le sera, $+R_n$, en représentant par R_n le reste de la série, lequel pourra devenir plus petit que toute quantité donnée, puisque la série est convergente.

La partie $2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} +$ etc., est elle-même une autre série convergente dont la limite est généralement représentée par e, et si on nomme r_n le reste de cette série, r_n sera variable à l'infini. Or, si on ajoute et retranche r_n dans le deuxième membre de (2), il vient :

$$E = \left[2 + \frac{1}{1.2} + \ldots \frac{1}{1.2\ldots n}\right] + r_n +$$
$$+ \left[-\frac{z}{2} - \frac{1}{2.3} - \frac{2z}{2.3} + \frac{2z^3}{2.3} - \ldots \pm \frac{z^{n-1}}{n}\right] + R_n - r_n,$$

ou

$$E = e + \left[-\frac{z}{2} - \frac{z}{2.3} \ldots \pm \frac{z^{n-1}}{n}\right] + R_n - r_n;$$

or chacun des termes entre parenthèses renfermant z comme facteur pourra devenir plus petit que toute quantité donnée, et comme le degré de petitesse de z est indépendant du nombre de ces termes qui sera toujours limité pour une valeur déterminée de n, on pourra toujours, quel que soit n, prendre z assez petit pour que la somme des termes entre parenthèses soit aussi petite qu'on voudra. Quant à R_n et r_n, ce sont aussi des quantités variables à l'infini; donc

$$e = \text{lim. de } E$$

quand on augmente indéfiniment le nombre des moyens géométriques intercalés entre 1 et x. Donc si on représente par β une quantité variable à l'infini, on pourra poser :

$$E = e - \beta;$$

si on remplace maintenant dans (1), E par $e - \beta$, et S par $A + \alpha$, on aura :

$$(e - \beta)^{A+\alpha} = x.$$

Or e et A sont des constantes, tandis que β et α sont variables à l'infini; donc, en vertu du lemme démontré plus haut,

$$e^A = x.$$

Donc il existe un nombre constant e, qui, élevé à une puissance égale à une aire hyperbolique quelconque, reproduit l'abscisse correspondante. C'est-à-dire que les aires hyperboliques sont les logarithmes Népériens des abscisses.

LETTRE

Sur la sommation d'une série trigonométrique. (*V.* p. 519.)

—

Mon cher M. Terquem,

Le mémoire de M. Lecointe, contenu dans le dernier numéro de votre journal, renferme, il me semble, quelques inexactitudes. Permettez-moi, dans l'intérêt de la vérité *mathématique*, de les relever en peu de mots.

Je reproduis d'abord les paroles et les calculs de l'auteur :

« Maintenant si l'on remarque que

$$\begin{aligned}
\sin a &= \ldots\ldots\ldots \sin a \\
\sin 2a &= \sin a \cos a + \sin a \cos a \\
\sin 3a &= \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos a &= \ldots \cos a \\
\cos 2a &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\
\cos 3a &= \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
S &= S.\cos a + (1 + C)\sin a, \\
C &= (1 + C)\cos a - S\sin a. \text{ »} \qquad \text{(p. 519)}
\end{aligned}$$

Cette dernière conclusion est fausse, attendu que si l'on ajoute les équations ci-dessus, la somme des premiers membres ne sera pas égale à la quantité multipliée par $\sin a$ ou par $\cos a$ dans la somme des seconds membres. Dira-t-on, conformément à la *métaphysique* introduite dans certains livres, *un terme de plus ou de moins* ne fait rien à l'affaire, c'est-à-dire à la somme? Cette manière de raisonner est commode, elle abrége les discussions ; malheureusement, appliquée à la série infinie $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, elle donne, pour somme de cette série, la quantité $-\frac{1}{2}$!

Mais d'abord qu'appelle-t-on *somme* d'une série infinie. C'est probablement *la limite vers laquelle tend la somme*, S_n *des* n *premiers termes de cette série, lorsque le nombre entier* n *augmente indéfiniment*. Si donc il arrive que S_n augmente au delà de toute grandeur, ou que cette quantité, repassant périodiquement par les mêmes valeurs, n'ait pas de limite déterminée, la recherche que l'on se proposait n'a plus d'objet.

L'indétermination dont je parle existe dans les séries traitées par M. Lecointe. En effet, la somme S_n des quantités

$$\cos a,\quad \cos 2a,\quad \cos 3a,\quad \cos na,$$

a pour valeur :

$$\frac{\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\quad \text{(page 522)};$$

et il est évident que cette dernière expression ne tend pas vers une limite fixe, lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment. Si, par exemple, $a=\frac{\pi}{2}$, S_n prend successivement les valeurs

$$0,\quad -1,\quad -1,\quad 0.$$

Il est, du reste, évident *à priori*, qu'une somme de termes ne peut converger vers une limite fixe, si ces termes ne diminuent pas indéfiniment à partir de l'un d'eux. Or, pour une infinité de valeurs de n, la fonction $\cos na$ devient égale à ± 1, ou diffère très-peu de ces quantités ; donc il n'y a pas lieu à chercher la somme de la série *infinie*

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots$$

Les mêmes remarques s'appliquent aux autres séries infinies et périodiques.

Il y aurait encore bien des choses à dire sur ce sujet : mais cette lettre, qui ne devait contenir que peu de mots, est déjà fort longue ; permettez-moi donc d'en rester là pour cette fois.

Votre tout dévoué collaborateur.

E. CATALAN.

13 octobre 1844.

Note. La série trigonométrique dont il est ici question a déjà été le sujet d'une discussion entre quelques géomètres du dernier siècle, on peut consulter, à ce sujet, le *Traité de calcul différentiel* de Lacroix, t. III, p. 159, 2[e] édition, Euler considère ces suites comme des séries récurrentes à échelle de relation binôme ; et l'on trouve facilement le développement

$$\frac{\cos a - x}{1 - 2x\cos a + x^2} = \cos a + x\cos 2a + x^2\cos 3a + x^3\cos 3a + \ldots$$

Pour que la série soit convergente, il faut que $x < 1$; mais Euler fait $x=1$, alors on a le résultat fautif $-\frac{1}{2}$, que M. Catalan vient de signaler. Tm.

OBSERVATIONS

Sur les notes (p. 403 et p. 465).

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collége de Strasbourg.

—

Monsieur le rédacteur,

I. Votre note, page 403, provoque une réponse de ma part. Vous prétendez que mes démonstrations sont insuffisantes. Je pense qu'en y regardant de plus près, vous changerez d'avis, quant à la dernière de chacun de mes deux paragraphes. En effet, dans le premier paragraphe, j'ai prouvé que si dans une courbe du second degré on prend deux tangentes *quelconques non parallèles* $p=0$, $q=0$, et la corde de contact $a=0$, l'équation de la courbe se met sous la forme $pq+a^2=0$. Le cas des tangentes parallèles est si simple, que je n'en ai pas parlé.

Dans le second paragraphe j'ai prouvé que si on prend un quadrilatère inscrit quelconque, dans une conique, et si

$p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, sont les équations des côtés, l'équation de la conique peut se mettre sous la forme $pq=\lambda rs$.

Chacune de ces démonstrations (je parle de celles où j'ai employé le calcul : les autres peuvent être combattues) se rapporte à un système d'axes déterminés, et peut être généralisée par une transformation de coordonnées. Ces démonstrations sont rigoureuses et complètes pour l'objet que j'avais en vue, les courbes du second degré. Rien n'empêche de démontrer les mêmes propriétés sans le secours des données sur lesquelles je me suis appuyé, et la discussion n'est ni très-longue, ni difficile, tant s'en faut.

Du reste, dans les limites où je me suis renfermé, je puis décliner l'obligation que vous m'imposez, de traiter les courbes de degré supérieur, cependant si vous et vos lecteurs, y trouvez de l'intérêt, je vous donnerai les courbes du troisième degré.

Sur la page 465.

Vous vous étonnez de ce que la théorie des polaires réciproques, n'ait pas trouvé place dans l'enseignement classique, vous en savez la raison et moi aussi. Toutefois pour ma part je n'accepte pas ce reproche, parce que je ne le mérite pas. Pour en être convaincu, on n'a qu'à ouvrir ma *Géométrie élémentaire*, 3e édition, p. 113, prop. 15, *Coroll.*, p. 121, remarque 3, p. 240, remarque, p. 290, remarque. Il me semble que j'en ai dit là, suffisamment quant à la *Géométrie élémentaire*, et *j'enseigne tout ce qui y est dit.* J'ajoute que la *Géométrie analytique* me fournit l'occasion de compléter cela.

Réponse de M. Terquem.

Note. Je n'ai jamais prétendu que par une transformation de coordonnées, on ne puisse généraliser la démonstration, et la rendre tout à fait rigoureuse ; mais j'ai dit que ces trois formations amènent de nouvelles constantes qui, se joignant aux constantes arbitraires, exigent de nouvelles distinctions, de nouvelles discussions ; de sorte que si l'on tient à la rigueur, il n'y a plus de brièveté, et si l'on tient à la brièveté il n'y a plus de rigueur. Quant au cas particulier des tangentes, je n'ai jamais mis en doute la légitimité des résultats ni les moyens employés pour les obtenir, mais ce genre de raisonnements est-il d'une application générale? J'avoue que je n'en ai nulle conviction, je m'explique.

Soient I_1, I_2, I_3,... I_m, m fonctions définies chacune par l'équation $I_p = d_p y + e_p x + f_p$; d_p, e_p, f_p sont des constantes données, et soit T le produit de toutes ces fonctions. Chacune de ces fonctions égalée à zéro représente une droite, le système de ces droites donne $\frac{m(m-1)}{2}$ points d'intersection. Écrivons l'équation

$$a_1 \frac{T}{I_1} + a_2 \frac{T}{I_2} + \ldots a_m \frac{T}{I_m} = 0; \qquad (1)$$

a_1, a_2, a_3,... a_m sont m constantes arbitraires ; cette équation représente une ligne du degré $m-1$ et passant par les $\frac{m(m-1)}{2}$ points d'intersection. Il est facile de construire la tangente à la courbe à un de ces points d'intersection ; p étant le coefficient angulaire de la tangente qui passe par l'intersection de I_1 et de I_2, on a :

$$p(a_1 d_2 + a_2 d_1) + a_1 e_2 + a_2 e_1 = 0,$$

ce que l'on obtient en prenant la dérivée de l'équation (1) ; on peut conclure d'autres propriétés communes à toutes ces courbes, et analogues à celle que M. Cayley vient d'indiquer au moyen de la même méthode, pour les lignes du troisième ordre (Journal de Liouville, août 1844, p. 285) ; mais toute ligne du degré $m-1$, peut-elle être mise sous la forme (1) à l'aide des m constantes arbitraires ? C'est là ce qu'il faudrait démontrer, nous reviendrons là-dessus à une autre occasion. Tm.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUE,

Proposée aux candidats à l'École normale (1844).

—

1° Exposer les règles qui servent à déterminer les limites supérieures des racines positives d'une équation numérique.

Lorsque l'on donne à l'inconnue x des valeurs croissantes d'une manière continue, à partir des diverses limites que ces règles assignent, le premier membre prend-il des valeurs continuellement croissantes ?

2° AT et AS sont deux droites qui touchent une section conique quelconque POQ aux points B et C ; on mène une troisième tangente quelconque DE, et par les points D et E où elle rencontre les deux premières, on trace des parallèles à ces mêmes tangentes. On propose : 1° de déterminer le lieu géométrique des points d'intersection M, de ces parallèles ; 2° de reconnaître que l'angle EFD, sous lequel on voit de l'un des foyers F de la section conique POQ, la tangente mobile ED, conserve une valeur constante dans toutes les positions de cette tangente ; 3° on examinera le cas particulier où la section conique POQ est une parabole, et on fera voir que dans ce cas, les segments interceptés sur les portions AB, AC, des tangentes fixes par la tangente mobile ED, sont réciproquement proportionnels.

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

(Fin, voir page 555.)

26. M. Gauss est le premier qui ait démontré qu'on peut de l'origine comme centre décrire un cercle de rayon fini sur lequel on a $E=2n$; n étant le degré de l'équation $f(z)=0$; par conséquent, il existe toujours dans l'intérieur de ce cercle n points-racines, en d'autres termes l'équation $f(z)=0$ a toujours n racines. La démonstration de M. Gauss suppose que les coefficients sont réels ; mais elle subsiste encore, lorsqu'ils ont la forme imaginaire ; alors sans rien changer aux raisonnements, il faut substituer aux coefficients leurs modules ; c'est ce qu'ont fait MM. Sturm et Liouville ; sauf cette légère modification, la démonstration de ces savants est complétement identique à celle de l'illustre analyste : s'ils ne l'ont pas cité, c'est que, comme nous l'avons dit, la dissertation latine est devenue extrêmement rare, même en Allemagne. Nous allons rapporter cette démonstration modifiée et précédée de quelques éclaircissements.

27. Problème. Soit la suite

$$P=r^m\cos\varphi+A_1r^{m-1}\cos\varphi_1+A_2r^{m-2}\cos\varphi_2+\ldots+A_m\cos\varphi_m;$$

m et n nombres entiers positifs; $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont des nombres essentiellement positifs ; $r>1$; $\cos^2\varphi>\frac{1}{2}$ ou $=\frac{1}{2}$, quelle valeur faut-il donner à r, pour que le premier terme devienne plus grand que la somme de tous les termes suivants?

Solution. On veut avoir

$$r^m \cos\varphi > A_1 r^{m-1} \cos\varphi_1 + \ldots A_m \cos\varphi_m\,;$$

$\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ etc., étant des fractions, et $r > 1$, on satisfera *à fortiori* à cette inégalité, si l'on pose :

$$r^m \cos\varphi > r^{m-1}(A_1 + A_2 + \ldots A_m),$$

$$\text{ou } r\cos\varphi > A_1 + A_2 + \ldots A_m.$$

Soit $A_1 + A_2 + \ldots A_m = K$; on aura donc $r > \frac{K}{\cos\varphi}$, ou bien $r > K\sqrt{2}$; si $K > \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors cette inégalité entraîne celle-ci $r > 1$; si $K < \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors de l'inégalité $r > 1$ on déduit $r > K\sqrt{2}$; ainsi il suffit de faire r plus grand que l'un des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$.

Corollaire 1. Ainsi, on peut toujours donner à r une telle valeur, que le signe de P soit le même que celui du premier terme.

Corollaire 2. On parvient aux mêmes conclusions en remplaçant partout les cosinus par des sinus.

28. Problème. Quels sont les arcs qui satisfont aux inégalités $\cos^2\varphi > \frac{1}{2}$ et $\sin^2\varphi > \frac{1}{2}$?

Solution. Les arcs compris entre

$$\frac{7\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{4},$$

satisfont à l'inégalité $\cos^2\varphi > \frac{1}{2}$.

Et les arcs compris entre

$$\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{5} \text{ et } \frac{7\pi}{4},$$

satisfont à l'inégalité $\sin^2\varphi > \frac{1}{2}$, et l'on peut augmenter chacun de ces arcs de π ; car

$$\cos^2(a+\pi) = \cos^2 a\,;\ \sin^2(a+\pi) = \sin^2 a.$$

29. Étant donnée l'équation

$$fz = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots\ldots = 0,$$

décrire s'il est possible, de l'origine comme centre, un cercle qui renferme tous les *points-racines?*

Solution. On peut toujours supposer le coefficient

$$A_p = \rho_p\left(\cos\alpha_p + \sin\alpha_p\sqrt{-1}\right),$$

ρ étant essentiellement positif ; si A_p est réel alors $\alpha_p = 0$; faisons

$$z = x + y\sqrt{-1} = r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}\right)\ ;$$

substituant dans l'équation $fz=0$, et égalant à part les expressions réelles et les imaginaires, on a :

$$P = f(x,y) = r^n\cos n\varphi + \rho_1 r^{n-1}\cos[(n-1)\varphi + \alpha_1] +$$
$$+ \rho_2 r^{n-2}\cos[(n-2)\varphi + \alpha_2] + \text{etc.},$$
$$Q = F(x,y) = r^n\sin n\varphi + \rho_1 r^{n-1}\sin[(n-1)\varphi + \alpha_1] +$$
$$+ \rho^2 r^{n-2}\cos[(n-2)\varphi + \alpha^2] + \text{etc.},$$

faisant

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \ldots\ldots + \rho_n = K.$$

Le cercle décrit d'un rayon plus grand que l'un des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$ satisfait au problème. En effet, marquons sur la circonférence les $4n$ points M_1, M_3, M_5.... $M8n-1$ pour lesquels on a successivement :

$$n\varphi = \frac{\pi}{4},\quad n\varphi = \frac{3\pi}{4},\quad n\varphi = \frac{5\pi}{4}\ldots.n\varphi = 8n-1\ .\ \frac{\pi}{4};$$

Tous ces points sont différents, et l'on a toujours $\sin^2 n\varphi = \cos^2 n\varphi = \frac{1}{2}$; par conséquent (Probl. 28), en ces points P et Q ont même signe que leurs premiers termes; donc $\frac{P}{Q}$ a même signe que $\cot n\varphi$; en M_1, ce signe est $+$; en M_3 ce signe est -1; en M_5, il est $+1$, et ainsi de suite; et en M_{8n-1} il sera $+$. Lorsque $\sin^2\varphi < \frac{1}{2}$, alors $\cos^2\varphi > \frac{1}{2}$; donc, une au moins des fonctions est toujours de même signe que son premier terme; or, de M_1 à M_3, de M_5 à M_7, de M_9 à M_{11}, etc., Q est de même signe que son premier terme et ne peut devenir nul, et, par conséquent, $\frac{P}{Q}$ ne peut devenir infini que dans les intervalles de M_3 à M_5, de M_7 à M_9, de M_{8n-1} à M_1; ainsi $\frac{P}{Q}$ devient $2n$ fois infini en passant de $-$ en $+$; c'est-à-dire l'excès est égal à $2n$; ainsi, comme dans le théorème de M. Cauchy, il y a donc n points-racines dans l'intérieur de la circonférence; en d'autres termes l'équation $f(z) = 0$ a toujours n racines; ce qu'il fallait démontrer. Tm.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN THÉORÈME DE NEWTON.

Sur un rapport entre des quantités différentielles. (V. p. 506.)

—

Théorème. Si l'on prend un point E sur le côté BC d'un triangle rectiligne ABC, et qu'on mène par ce point la transversale EFG, infiniment rapproché de EC et coupant AB en F et AC en G, on a l'équation $\frac{BF}{CG} = \frac{EB.AB}{EC.AC}$

Démonstration. La propriété connue de la transversale donne $\frac{BF}{CG} = \frac{EB}{EC} \cdot \frac{AF}{AG}$; or BF et CG étant infiniment petits, on a $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$, donc, etc.

Corollaire. Lorsque le point E s'éloigne à l'infini, on a $EB = EC$ et $\frac{BF}{CG} = \frac{AB}{AC}$; proposition vraie lors même que BF et CG sont des quantités finies.

Observation. On démontre en géométrie que la parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés proportionnellement; quelque rapprochée que soit cette parallèle du sommet, les deux segments infiniment petits, partant de ce sommet, ont toujours pour rapport fini celui des côtés; il en est de même lorsque la parallèle s'éloigne à l'infini du sommet. C'est ici l'occasion de donner aux élèves une première notion de la théorie différentielle qui ne consiste qu'à trouver les rapports finis entre des quantités infiniment petites ou infiniment grandes. Il y a près d'un siècle qu'un géomètre français bien connu faisait voir combien il serait important d'introduire le calcul différentiel, d'une facilité si vulgaire, dans l'enseignement élémentaire; mais comme cette introduction faciliterait et abrégerait beaucoup la science, l'appauvrirait de phrases et l'enrichirait de faits, il est à croire que la proposition de ce géomètre, récemment renouvelée par feu M. de Coriolis, restera encore longtemps parmi les *pia desideria*. Pourquoi? C'est ce que je me garderai bien de dire. Le géomètre bien connu avait nom Jean Lerond d'Alembert.

On devrait aussi ajouter quelques notions de Dynamique aux théories de la statique. Euler a déjà remarqué que l'enseignement isolé de cette science propage une foule d'erreurs. L'introduction de la doctrine si séduisante des couples a encore augmenté cette source d'idées fausses chez les élèves qui n'entrent pas à l'École polytechnique. Dans le mois prochain nous donnerons quelques considérations nullement neuves et pourtant utiles sur les unités en mécanique. Tm.

NOTE

SUR LA RECHERCHE ÉLÉMENTAIRE DU NOMBRE π.

PAR M. ARMAND FARCY,
ancien élève de l'École polytechnique.

—

I. Les méthodes élémentaires pour le calcul du nombre π sont au nombre de quatre : deux directes et deux indirectes ; deux fondées sur la formule $C=2\pi R$, ne faisant dépendre π que de la notion des longueurs ; deux fondées sur la formule $S=\pi R^2$, faisant dépendre π de la notion des surfaces, ce qui est moins conforme à sa définition habituelle.

La première (méthode directe fondée sur la formule $C=2\pi R$), dont Archimède est le premier auteur, consiste à chercher la longueur d'une circonférence d'un diamètre connu, spécialement d'un diamètre 1, comme limite commune des périmètres réguliers inscrits et circonscrits, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La seconde (méthode directe fondée sur la formule $S=\pi R^2$), introduite par Jacques Gregory, géomètre anglais, consiste à chercher la surface d'un cercle de rayon connu, spécialement de rayon 1, comme limite commune des polygones réguliers inscrits et circonscrits, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La troisième (méthode indirecte fondée sur la formule $C=2\pi R$), dont Schwab est le premier auteur, consiste à chercher le rayon d'une circonférence de longueur connue, comme limite commune des rayons et des apothèmes, d'un périmètre régulier de longueur constante, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La quatrième (méthode indirecte fondée sur la formule $S=\pi R^2$), et dont je ne trouve de trace que dans Legendre (liv. IV, prop. XVI), consiste à chercher le rayon d'un cercle de surface connue, comme limite commune des rayons et des apothèmes d'un polygone régulier de surface constante, dont on double continuellement le nombre des côtés.

Sans exposer ici ces méthodes, et sans discuter leur supériorité relative, ce qui serait assez épineux, vu les exigences contraires du point de vue géométrique et de la pratique du calcul, nous renverrons, pour la première, aux *Éléments de géométrie* de M. Lionnet, où elle nous a paru d'une exposition plus élégante et plus heureuse que partout ailleurs; pour la seconde et la quatrième, à la *Géométrie* de Legendre; pour la troisième, à celle de M. Vincent.

II. M. Vincent tire de la méthode de Schwab cet élégant théorème : « *Une suite de nombres commençant par* 0 *et* 1, *et dont les suivants sont alternativement, à partir du troisième inclusivement, moyens différentiels et moyens proportionnels entre les deux qui les précèdent immédiatement, converge vers la valeur de* $\frac{2}{\pi}$; » et le but de cette note est de montrer que ce théorème résulte également des deux premières méthodes (*).

1° M. Lionnet désignant par p et P deux périmètres réguliers semblables inscrits et circonscrits, par p' et P' ceux d'un nombre double de côtés, parvient aux formules $P'=\frac{2Pp}{P+p}$; $p'=\sqrt{P'p}$. Mais si au calcul des périmètres

(*) L'énoncé de ce théorème appartient aussi à Schwab. Tm.

successifs on substitue celui des nombres réciproques, on trouve : $\frac{1}{P'} = \frac{\frac{1}{P}+\frac{1}{p}}{2}$; $\frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{P'} \cdot \frac{1}{p}}$ C'est-à-dire que ces nombres se succèdent alternativement, moyens différentiels et moyens proportionnels entre les deux qui précèdent. — Prenant alors pour premier polygone le quarré circonscrit de côté $\frac{1}{2}$, on a : $P = 2$, $p = \sqrt{2}$, et pour la série des nombres réciproques : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$, etc..... ou bien, prenant pour premiers termes 0 et 1, ce qui ne change rien à la loi, puisque $\frac{1}{2}$ est moyenne différentielle entre 0 et 1, et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ moyenne proportionnelle entre 1 et $\frac{1}{2}$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+1}{4},\ \text{etc....};$$

d'où le théorème de M. Vincent.

2° Legendre désignant par A et B la surface de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit, par A' et B' celles des polygones d'un nombre double de côtés, parvient aux formules $A' = \sqrt{A \cdot B}$; $B' = \frac{2AB}{A+A'}$. Mais si au calcul des surfaces on substitue celui des nombres réciproques, on trouve : $\frac{1}{A'} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}}$ et $\frac{1}{B'} = \frac{\frac{1}{B}+\frac{1}{A'}}{2}$, c'est-à-dire que ces nombres se succèdent alternativement, moyens proportionnels et moyens différentiels, entre les deux qui précèdent. Prenant alors pour premier polygone le quarré inscrit de côté 1, on a : $A = 1$, $B = 2$, et pour la série des nombres réciproques : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}$, etc..... ou bien, prenant pour premier terme 0, ce qui ne change point la loi, puisque $\frac{1}{2}$ est moyenne différentielle entre 0 et 1 :

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}, \text{ etc.}\dots;$$

d'où le théorème de M. Vincent.

Quant à la quatrième méthode, en désignant par R et r le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, par R′ et r' ceux du polygone régulier de même surface, mais d'un nombre double de côtés, on a, suivant Legendre, les formules : $R' = \sqrt{R.r}$, $r' = \sqrt{r\frac{R+r}{2}}$ qui, en partant de $R = 1$ et $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ rayon et apothème du quarré de surface égale à 2, permet d'approcher indéfiniment de $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, d'où l'on peut tirer un théorème analogue à celui de M. Vincent, mais fondée sur une série dont la marche est moins régulière et le point de départ moins caractérisé, par l'impossibilité d'y introduire le terme zéro.

Note. On déduit de $B' = \frac{2AB}{A+A'}$ cette autre formule $B' = \frac{2BA'}{B+A'}$, que Saurin a démontré directement (*Mémoires de l'Académie*, 1723, p. 10); elle donne cet énoncé élégant et mnémonique : A′ est une moyenne géométrique entre B et A, et B′ une moyenne harmonique entre B et A′ ; il serait intéressant, mais très-difficile, de trouver la limite de la série de Schwab par un moyen direct, purement analytique.

Tm.

NOTE SUR LE RAPPORT D'ARCHIMÈDE.

1. Nous croyons qu'il y a quelque utilité à faire connaître aux élèves studieux la manière dont l'illustre Syracusain est parvenu à ce rapport. Nous faisons usage des notations modernes en conservant la méthode d'Archimède ; car, en toute chose, l'idée est le point important, le signe est un accessoire d'une importance secondaire. Mais nulle part l'adoration des signes, la *seméiolatrie* n'est portée si loin que dans la science mathématique. Tel géomètre admettra votre démonstration si vous désignez une certaine idée par les sept lettres *rapport*, et il la repoussera si vous vous avisez de représenter la même idée par les cinq lettres *sinus*. Si les Euclide, les Archimède, les Apollonius revenaient, ils riraient de nos superstitions, adopteraient nos systèmes de notation, se mettraient au courant de nos progrès et se placeraient encore au premier rang.

2. Sept ouvrages d'Archimède sont restés. Le second porte pour suscription Κύκλου μέτρησισ, *Mesure du cercle*. Il ne contient qu'un livre et trois théorèmes.

1^er^ Théorème.

L'aire d'un cercle quelconque est équivalent à l'aire d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence du cercle.

Démonstration. *L'aire du cercle n'est pas plus grande que celle du triangle rectangle.*

Si l'aire du cercle était plus grande, soit D^2 la différence entre les deux aires. Inscrivons dans le cercle un polygone régulier tel que la différence entre son aire et celle du cercle soit moindre que D^2 ; ce qui est toujours possible. L'aire du polygone est donc supérieure à l'aire du triangle, c'est-à-dire, le périmètre du polygone, multiplié par son demi-apothème, serait plus grand que la circonférence multipliée par la moitié du rayon, ce qui est impossible; donc *l'aire du cercle ne saurait être plus grande que celle du triangle rectangle.*

Si l'aire du cercle était moindre, soit D^2 la différence; circonscrivons un polygone régulier tel que la différence entre son aire et celle du cercle soit moindre que D^2 ; ce qui est toujours possible ; l'aire du polygone est donc plus petite que celle du triangle ; c'est-à-dire, que le perimètre du polygone, circonscrit, multiplié par la moitié du rayon, est plus petit que la circonférence par la moitié du rayon; ce qui est impossible, donc ces deux hypothèses étant exclues, le théorème est démontré.

Observation. Euclide démontre (lib. X, Prop. 1) que si, d'une quantité, on retranche plus que la moitié et ensuite on retranche encore du reste plus que la moitié de ce reste, et ainsi de suite, on peut parvenir à un reste plus petit qu'une quantité donnée; on établit aussi facilement cette seconde proposition qu'on ne rencontre ni dans Euclide, ni dans Archimède : La différence entre l'aire du cercle et celle d'un polygone régulier inscrit est plus grande que le double de la différence entre l'aire du cercle et celle d'un polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés. Au moyen de ces deux propositions, il devient évident qu'on peut inscrire dans un cercle un polygone régulier dont l'aire diffère de celle du cercle, d'une quantité moindre qu'une quantité donnée. Archimède énonce cette proposition comme généralement connue.

Théorème II.

L'aire du cercle est au carré du diamètre comme 11 est à 14.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent et du suivant.

Observation. Il semble que ce théorème devrait être placé après le suivant, et, contre son habitude, Archimède énonce comme un rapport absolu, une simple approximation.

Théorème III.

Une circonférence de cercle est égale à trois fois son diamètre, plus une partie moindre qu'un septième du diamètre, et plus grande que dix soixante et onzièmes du diamètre.

Démonstration. 1re Partie. La circonférence est plus petite que trois fois le diamètre plus un septième du diamètre.

Soit le triangle ECF rectangle en C, et ayant l'angle FEC égal au $\frac{1}{12}$ de quatre angles droits; menons 1° la droite EG bissectrice de l'angle FEC; 2° la droite EH bissectrice de l'angle GEC; 3° la droite EK, bissectrice de l'angle HEC; 4° la droite EL, bissectrice de l'angle KEC; de sorte que l'angle

$$\mathrm{GEC} = \frac{4q}{24};\ \mathrm{HEC} = \frac{4q}{48};\ \mathrm{KEC} = \frac{4q}{96};\ \mathrm{LEC} = \frac{4q}{192};$$

faisons FE $= 306$; alors FC $= 153$.

$\overline{\mathrm{FE}}^2 = 93636$; $\overline{\mathrm{FC}}^2 = 23409$; donc $\overline{\mathrm{EC}}^2 = 70227$; EC > 265;

$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CF}} > \frac{265}{153}$; la bissectrice GE donne :

$$\frac{\mathrm{FE}+\mathrm{EC}}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{GC}} > \frac{571}{153};$$

de là, on déduit :

$$\frac{\overline{EC}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GC}^2}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{GC}^2}>\frac{326041}{23409};\ \frac{EG}{GC}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

On connaît donc les trois côtés du triangle rectangle GCE ; et GH étant une bissectrice de l'angle GEK, on en déduit, en suivant la même marche que ci-dessus :

$$\frac{EC}{CH}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153};\ \frac{HE}{HC}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

et passant aux deux autres bissectrices :

$$\frac{EC}{KC}>\frac{2334\frac{1}{4}}{153};\ \frac{KE}{KC}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153};\ \frac{EC}{LC}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Si du point E comme centre et du rayon EC, on décrit une circonférence, 2EC est le diamètre de cette circonférence et 2LC est le côté d'un polygone régulier de 96 côtés circonscrit à ce cercle.

Or $\frac{96.2LC}{2EC}<\frac{96.153}{4673\frac{1}{2}}=\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}=\frac{29376}{9347}=3+\frac{1}{7}\cdot\frac{9345}{9347}$;

donc, à fortiori, la circonférence divisée par le diamètre est moindre que $3\frac{1}{7}$.

2e Partie. La circonférence est plus grande que trois fois le diamètre plus $\frac{10}{71}$ du diamètre.

Soit AC le diamètre d'une demi-circonférence, et CBA un triangle inscrit, ayant l'angle BAC $=\frac{4q}{12}$, menez les quatre cordes bissectrices successives AG, AH, AK, AL ; AG bissectrice de BAC ; AH bissectrice de GAC ; AK bissectrice de HAC ; enfin AL bissectrice de KAC.

Prenons AC $=1560$; alors BC $=780$ et AB $=1351$ moins une fraction ; donc $\frac{AB}{BC}<\frac{1351}{780}$.

Soit F le point où la bissectrice AG coupe la corde BC ;

on aura $\frac{AC+AB}{BC}=\frac{AC}{CF}$; mais les deux triangles rectangles CGF et CGA sont équiangles ; donc

$$\frac{AC}{CF}=\frac{AG}{GC}\text{ ; donc }\frac{AG}{GC}=\frac{AC+AB}{BC}<\frac{2911}{780}\text{ ; }\frac{\overline{AG}^2}{\overline{GC}^2}<\frac{84\,73921}{780^2}\text{ ;}$$

$$\frac{\overline{AG}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GC}^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{GC}^2}<\frac{9082321}{780^2}\text{ ; }\frac{AC}{GC}<\frac{3013\frac{3}{4}}{780}\text{ ;}$$

en opérant de la même manière sur les quatre triangles AGC, AHC, AKC, ALC, on trouve successivement :

$$\frac{AC}{CH}<\frac{1838\frac{9}{11}}{240}\text{ ; }\frac{AC}{CK}<\frac{1009\frac{1}{6}}{66}\text{ , }\frac{AC}{CL}<\frac{2017\frac{1}{4}}{66}\text{ ; donc }\frac{CL}{AC}>\frac{66}{2017\frac{1}{4}}\text{ ;}$$

or, la corde LC est le côté du polygone régulier inscrit de 96 côtés ; et

$$\frac{96.CL}{AC}>\frac{63\,36}{2017\frac{1}{4}}=\frac{25344}{8069}=3\,\frac{1137}{8071}\text{ ;}$$

$$\frac{1137}{8071}=10.\,\frac{1137}{80710}=10.\,\frac{1}{70+\frac{1120}{1137}}>\frac{10}{71}\text{ ;}$$

donc le périmètre du polygone de 96 côtés divisé par le diamètre, et à fortiori la circonférence divisée par le diamètre, donne un rapport plus grand que $3\frac{10}{71}$. C. Q. F. D.

Observation 1^re^. Archimède se contente de donner les résultats, mais n'effectue pas les calculs ; ce qui est à regretter. Dans les extractions des racines, il prend pour approximation le reste divisé par le double de la racine, comme ont fait aussi les Arabes. On sait que les approximations décimales ne datent que du 17^e^ siècle. Il est certain que ce genre d'approximation n'aurait pas échappé au génie de l'auteur de l'*Arénaire* (*V*. t. I, 515), si les anciens avaient eu la moindre notion de notre procédé graphique de numération. Il serait instructif de savoir ce qui a déterminé Archimède à adopter pour nombre arbitraire dans la première partie $306=2.3^2.17$; et dans la seconde partie, $1560=2^3.3.5.13$:

il y a été probablement conduit par quelques ingénieuses considérations d'arithmétique.

Observation 2. Archimède a donc ramené la recherche du rapport de la circonférence au diamètre à ce problème : Connaissant numériquement deux côtés d'un triangle rectangle, calculer les longueurs de la bissectrice d'un angle aigu et des deux segments formés sur le côté opposé à cet angle ; il applique successivement cette solution aux polygones réguliers circonscrits et inscrits de 12, 24, 48, 96 côtés. De nos jours, la théorie des polygones réguliers est un cas particulier de la théorie trigonométrique et forme double emploi dans les éléments de géométrie, ce qui n'a rien de surprenant. Toute la science ne renferme peut-être qu'une dizaine de propositions, mais que les auteurs ont le talent de présenter chacune vingt fois sous vingt énoncés différents, ce qui donne plus d'ampleur à la science et aux livres.

Observation 3. Selon Archimède, π est compris entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{10}{70}$.

Or, $3\frac{10}{71} = 3,14084$; $3\frac{10}{70} = 3,14285$; comparant à la première tranche du rapport de Ludolph 3,14159, on voit que la grande limite d'Archimède est moins approchée de π que la petite limite. Ainsi, pour un diamètre de 497 mètres, la circonférence est comprise entre 1561 et 1562 mètres ; en prenant 1561, l'erreur n'est pas d'un demi-mètre ; aussi le rapport d'Archimède suffit dans les travaux industriels, et serait une source d'erreurs dans les calculs géodésiques et astronomiques.

Observation 4. Eudoce, dans son commentaire sur ce livre d'Archimède, dit qu'Apollonius a trouvé un rapport plus approché que celui d'Archimède (voy. page 474), et de même aussi Claude Ptolomée ; mais, observe Eudoce, cela n'ôte rien au mérite d'Archimède, car il est le premier qui ait indiqué un rapport, et ce qu'il y a d'admirable, le rapport le plus simple et nécessaire aux besoins de la vie, πρὸς τὰς τοῦ Βιου Χρέιας αναγκαῖον.

Le rapport d'Appolonius ne nous est pas parvenu.

Celui de Ptolémée est 3,1416666 ; trop fort à partir de la quatrième décimale. Dans sa table des cordes (*Almageste*, liv. II), il donne pour corde à l'arc de 30 minutes 0.31'.25'', c'est-à-dire $\frac{1}{120}\left(\frac{31}{60}+\frac{25}{60^2}\right)$ du diamètre; réduisant et multipliant par 120, on trouve le rapport indiqué, car Ptolémée divise le diamètre en 120 parties égales; chaque partie en 60 primes, chaque prime en 60 secondes, etc., etc. Viète, dans son célèbre mémoire *Ad Angulares sectiones*, expose le premier une suite de théorèmes sur les cordes des arcs multiples, d'où l'on peut conclure les formules connues sur les lignes trigonométriques des arcs multiples; appliquant ces théorèmes aux polygones réguliers, il en conclut les limites suivantes : 3,1415926535 et 3,1415926537.

(*Opera Mathematica*, p. 392, édit. Schooten, 1646.)

SOLUTION DU PROBLÈME 90.

PAR M. HENRI FAURE,
Élève en spéciale.

—

1° (*Fig.* 59.) Les trois points GAD sont sur une droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A. Car les angles DAC, FAG étant égaux, et de plus la ligne FAC étant droite, GAD l'est aussi. Si l'on joint FB, cette ligne est perpendiculaire à GAD; or la bissectrice de l'angle A étant parallèle à FB, est aussi perpendiculaire à GAD.

2° AL est perpendiculaire à GC comme AM à BD. Les angles BAL, CGB étant égaux, les triangles GOB, AOK ayant d'ailleurs les angles en O égaux, il doit en être de même des angles OBG, et AKO; donc ce dernier est droit.

Même démonstration pour prouver que AM est perpendiculaire à BD.

3° AO = AR. Les deux triangles GBD, ARD étant semblables, on a la proportion

$$(1)\quad BG : AR :: GD : AD.$$

Les triangles semblables CGF, CAO donnent aussi

$$(2)\quad FG \text{ ou } BG : AO :: FC : AC,$$

mais au moyen des triangles semblables GFA, ACD on obtient successivement

$$AD : AG :: AC : AF,$$

d'où

$$AD + AG : AD :: AC + AF : AC,$$

ou

$$GD : AD :: CF : AC.$$

Comparant cette proportion aux précédentes, on en déduit l'égalité de AO et AR.

4° $\dfrac{AM}{AL} = \dfrac{AB \,.\, DR}{AC \,.\, OG}$. Joignons OR. Le triangle AOR étant isocèle, il s'ensuit que OR est parallèle à GD; donc on a les proportions :

$$BD \text{ ou } AM : RD :: AB : AO.$$
$$GO : GC \text{ ou } AL :: AR \text{ ou } AO : AC,$$

multipliant ces proportions membre à membre

$$AM \,.\, GO : RD \,.\, AL :: AB : AC,$$

d'où $$AM \,.\, GO \,.\, AC = AL \,.\, AB \,.\, DR,$$

ce qui revient à l'égalité ci-dessus.

5° $\frac{AN}{AK} = \frac{AC \cdot GO}{AB \cdot DR}$. Joignons KN. Si l'on inscrivait le quadrilatère AKIN dans une circonférence (ce qui est possible d'après ce que l'on a vu plus haut), l'angle KNI serait égal à l'angle KAI comme ayant même mesure; or il est aussi égal à BLA, donc le quadrilatère LKNM est inscriptible. Traçant la circonférence, les deux sécantes AL, AM, issues du même point A, donnent le rapport

$$\frac{AN}{AK} = \frac{AL}{AM} = \frac{AC \cdot GO}{AB \cdot DR},$$

d'ailleurs on peut aussi le prouver de la manière suivante : au moyen des triangles semblables AOK, GOB on a

$$AK : GB :: AO : GO,$$

et de même par les triangles semblables ANR, DRC

$$AC : AN :: DR : AR = AO;$$

multipliant ces deux proportions membres à membres, on arrive à la solution.

6° Les droites AIH, BD, GC se coupent au même point. Si je prouve que les six segments AO, BO, BS, SC, CR, RA jouissent de cette propriété que le produit (*)

$$AO \cdot BS \cdot RC = BO \cdot SC \cdot AR,$$

les lignes AS, BR, DC se couperont au même point d'après un théorème connu des transversales. Or, AO = AR; donc il faut prouver l'exactitude de l'égalité

$$BO \cdot SC = BS \cdot RC,$$

les triangles semblables GOB, AOC donnent

$$GB \text{ ou } AB : AC :: BO : AO,$$

de même les triangles ARB, RCD donnent

$$AB : CD = AR : RC = AO : RC;$$

(*) La lettre S manque dans la figure.

multipliant ces deux proportions terme à terme, on a

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BO : RC,$$

or on a aussi

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BS : CS,$$

donc

$$BO : RC :: BS : CS$$

et
$$BO \,.\, CS = RC \,.\, BS.$$

Si l'on construisait les carrés dans le sens inverse on verrait que la même propriété a encore lieu.

Si l'on prolonge AH, GF, ED, ces trois droites se couperont en un même point. Car soit P le point de rencontre de GF avec ED; joignons AP; l'angle PAF = CAH d'après l'égalité des triangles ABC, PAF. De plus l'on voit que AP = BC = SH. Si, au lieu de carrés, on construisait sur les trois côtés du triangle ABC des rectangles semblables, les mêmes propriétés subsisteraient encore.

CONSTRUCTION DU RAYON DE COURBURE DE L'ELLIPSE
(à démontrer).

PAR M. ABEL TRANSON.

On sait que l'ellipse est engendrée par le sommet T d'un triangle TAB, lorsqu'on fait glisser les extrémités de la base sur deux axes fixes. Ce mode de description est souvent employé dans la construction des épures; mais alors on réduit le triangle à sa ligne de base AB, en plaçant le sommet T en un point quelconque de cette ligne.

Dans tous les cas, on sait que si on élève en A et B deux lignes perpendiculaires respectivement aux axes directeurs, ces lignes se rencontrent en O; la ligne TO est à chaque instant la normale de l'ellipse pour la situation actuelle du point décrivant.

Dans tous les cas aussi, on pourra construire le rayon de courbure à l'aide de la remarque suivante : Abaissez du centre de la courbe (point de rencontre des axes) une perpendiculaire sur la normale. Soit C le pied de cette perpendiculaire. Le rayon de courbure est une troisième proportionnelle aux lignes TC et TO; c'est-à-dire qu'on a

$$R = \frac{\overline{TO}^2}{\overline{TC}};$$

expression très-facile à construire (*).

QUESTION D'EXAMENS.

De tous les triangles inscrits dans une ellipse et dont un côté passe par un foyer, quel est le triangle maximum?

PAR M. E. DESMARETS,
ancien élève de l'École polytechnique.

(*Fig.* 79.) Soient 1° F le foyer, 2° GN la direction que doit prendre le côté cherché, il est clair que la condition de maximum imposée au triangle exige que la tangente à l'ellipse au point M soit parallèle à la ligne GN.

Soient 1° oX le diamètre parallèle à la direction GN; 2° oY

(*) C'est une belle généralisation du théorème de M. Dupin (*Développements de Géométrie*, p. 31), TO est égal au demi-diamètre conjugué à celui qui passe par T; le point T décrit une portion de droite, lorsque les trois points A, B, T et le centre sont sur un même cercle. Le lien du point O est une circonférence. Tm.

le diamètre conjugué du précédent; 3° α, α' les angles de ces diamètres avec le grand axe; 4° $oF = c = \sqrt{a^2 - b^2}$, on aura :

$a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2 = a_1^2 b_1^2$ pour l'équation de l'ellipse;

VN $\times$ NM $\sin(\alpha' - \alpha)$ pour la mesure du triangle cherché.

1° Le facteur VN sera obtenu en remplaçant, dans l'équation de l'ellipse, y par la valeur $\dfrac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}$ qui appartient à oV ; on a donc :

$$\overline{VN}^2 = \frac{a_1^2 b_1^2 \overline{\sin}^2(\alpha' - \alpha) - a_1^2 c_1^2 \overline{\sin}^2 \alpha}{b_1^2 \overline{\sin}^2(\alpha' - \alpha)}.$$

Si, dans cette expression, on remplace $a'b' \sin(\alpha' - \alpha)$ par leurs valeurs déduites des relations connues

$$a_1^2 b_1^2 \overline{\sin}^2(\alpha' - \alpha) = a^2 b^2, \quad a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \overline{\sin}^2 \alpha + b^2}, \qquad \text{(A)}$$

on obtient la valeur de VN en fonction des quantités connues a, b, c et de l'indéterminée $\sin\alpha$,

$$VN = \frac{ab^2}{c^2 \overline{\sin}^2 \alpha + b^2}.$$

2° Le produit VN $\sin(\alpha' - \alpha)$ sera obtenu en se servant de l'égalité

$$VM = b' + \frac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Cette égalité est transformée par l'intervention des relations (A) en

$$VM \sin(\alpha' - \alpha) = c \sin\alpha + \sqrt{c^2 \overline{\sin}^2 \alpha + b^2} ;$$

la surface du triangle est donc, après avoir représenté $\sin\alpha$ par z,

$$GNM = ab^2 \left(\frac{cz + \sqrt{c^2 z^2 + b^2}}{c^2 z^2 + b^2} \right),$$

et on doit chercher le maximum de l'expression

$$\frac{cz + \sqrt{c^2z^2 + b^2}}{c^2z^2 + b^2}. \tag{C}$$

La dérivée est

$$\frac{(c^2z^2 + b^2)\left(c + \dfrac{c^2z}{\sqrt{c^2z^2 + b^2}}\right) - \left(cz + \sqrt{c^2z^2 + b^2}\right)2cz}{(c^2z^2 + b^2)^2};$$

ou, après réduction,

$$\frac{c}{(c^2z^2 + b^2)^2}\left(- c^2z^2 + b^2 - cz\sqrt{c^2z^2 + b^2}\right). \tag{D}$$

Le polynôme $- c^2z^2 + b^2 - cz\sqrt{c^2z^2 + b^2}$ égalé à zéro donne

$$z \text{ ou } \sin\alpha = \pm \frac{b}{c\sqrt{3}}.$$

Or l'ellipse donnée peut présenter trois circonstances :

$$b < c\sqrt{3}, \quad b = c\sqrt{3}, \quad b > c\sqrt{3}.$$

1° Si on a $b < c\sqrt{3}$, ou $c > \frac{a}{2}$, l'ellipse est sensiblement allongée, et la valeur analytique qui donne le maximum étant inférieure à l'unité, l'angle α existe ; et la valeur de $\sin\alpha$, substituée dans la mesure (B) du triangle, donne :

$$\text{GNM} = \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Or cette valeur est celle du triangle maximum général inscrit dans l'ellipse : on peut, en effet, reconnaître que la droite GN est le côté de ce dernier triangle ; cette droite, menée avec l'inclinaison caractérisée par la condition $\sin\alpha = \frac{b}{c\sqrt{3}}$, partage en deux parties égales le demi-diamètre conjugué de celui qui est parallèle à cette droite : on a alors, en effet,

$$oV = \frac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \frac{b_1}{2},$$

ou, par l'emploi des relations (A),

$$2c\sin\alpha = \sqrt{c^2\sin^2\alpha + b^2},$$

égalité exacte, si on remplace $\sin\alpha$ par $\frac{b}{c\sqrt{3}}$: ainsi dans les ellipses éloignées de l'état circulaire, le triangle cherché est le triangle maximum général inscrit. La même circonstance se reproduit lorsque l'on a $b = c\sqrt{3}$, et la ligne GN est alors perpendiculaire au grand axe.

2° Si l'on a $b > c\sqrt{3}$, l'ellipse donnée se rapproche de l'état circulaire, la condition analytique du maximum $z = \frac{b}{c\sqrt{3}}$ est étrangère à la question ; or le maximum relatif est alors donné par la condition $z = 1$ ou $\alpha = 90°$; il suffit, en effet, de démontrer que la fonction (C) *croît* pour toutes les valeurs de z inférieures à l'unité, ou que la dérivée (D) de cette fonction reste positive pour les valeurs $z < 1$. Or on a toujours :

$$-c^2z^2 + b^2 - cz\sqrt{c^2z^2 + b^2} > 0, \qquad \text{(E)}$$

inégalité qui peut être mise sous la forme

$$cz\sqrt{c^2z^2 - b^2} < b^2 - c^2z^2 ;$$

or, lorsque l'on a $z < 1$ et $b > c\sqrt{3}$, les deux membres de cette inégalité étant positifs, on peut élever au carré, et on a, après réduction :

$$3c^2z^2 < b^2,$$

inégalité qui est vérifiée dans les conditions actuelles.

Ainsi, lorsque l'on a $b > c\sqrt{3}$, la droite qui donne le triangle maximum relatif est perpendiculaire au grand axe, et la mesure de ce triangle est :

$$\frac{b^2(c + a)}{a}. \qquad \text{(F)}$$

On peut d'ailleurs démontrer que ce maximum relatif tend à devenir égal, mais est toujours inférieur au maximum général $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$. En effet, la condition

c ou $\sqrt{a^2-b^2} =$ ou $< \frac{a}{2}$ qui correspond à $b > c\sqrt{3}$,

donne le résultat suivant :

$$b^2 => 3c^2,$$

ou
$$b^2 => \frac{3a^2}{4},$$

$$b => \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{b\left(\frac{a}{2}+a\right)}{a} => \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

Or, puisque l'on a $c =$ ou $< \frac{a}{2}$, si on remplace dans le premier membre de cette dernière inégalité $\frac{a}{2}$ par c, ce premier membre doit devenir inférieur ou, au plus, égal au deuxième ; on a donc :

$$b\left(\frac{c+a}{a}\right) =< \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

De là,

$$b^2\left(\frac{c+a}{a}\right) =< \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

On pourrait examiner les conditions nécessaires pour que le triangle inscrit, dont deux côtés passent par les foyers, soit maximum ; mais il est clair que ce triangle est celui que l'on obtient en unissant le sommet du petit axe aux deux foyers.

Note. Un polygone d'aire maximum absolu, d'un nombre de côtés donné, inscrit dans une ellipse, est la projection du polygone régulier d'un même nombre de côtés et inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection ; les côtés du polygone inscrit dans l'ellipse touchent donc une seconde ellipse concentrique semblable et semblablement placée. Si le côté du polygone doit passer par un point fixe, il y a trois cas à distinguer ; si le point fixe est hors de la seconde ellipse, il y a deux solutions ; si ce point est sur l'ellipse, les deux solutions se réduisent à une seule ; si le point est dans l'intérieur de l'ellipse, le problème est impossible pour le maximum absolu ; mais dans ce cas la question peut être ramenée à la question analogue pour le cercle. Tm.

QUESTIONS D'EXAMEN, en 1844 (*).

Algèbre.

1. Faire voir que dans l'extraction de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme entier par rapport à x, les degrés des restes successifs vont toujours en s'abaissant.

2. $f(x)$ est un polynôme entier et rationnel par rapport à x, l est la limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x)=0$; si dans le polynôme $f(x)$ on substitue à la place de x une suite de nombres l', l'', l''', etc., croissant et plus grands que l, les résultats $f(l')$, $f(l'')$, $f(l''')$, etc., de ces substitutions, seront-ils aussi croissants ?

3. Soient a, b, c les trois racines de l'équation

$$x^3-px^2+qx-r=0.$$

(*) M. le professeur Léon Anne a bien voulu nous communiquer ces questions On en donnera les solutions dans le courant de 1845, ainsi que celles des questions pour l'admission à l'École normale et pour l'agrégation.

Calculer la somme $a^2 + b^2 + c^2$; cette somme peut-elle donner une limite supérieure des racines positives de l'équation ?

4. Trouver le nombre qui substitué à la place de x rend à la fois les deux fractions $\frac{7x-1}{4}$ et $\frac{5x+3}{12}$ entières; peut-on voir *à priori* que le problème est impossible ?

5. Un nombre peut-il être à la fois un quarré et un cube parfait, sans être une sixième puissance ?

6. Discuter par la résolution directe et par le théorème de M. Sturm, l'équation $ax^{2m} + bx^m + c = 0$. Montrer l'identité des conséquences de ces deux modes.

Géométrie analytique.

1. Conditions pour que les deux tangentes menées d'un même point à une parabole, soient égales.

2. Étant donnés en grandeur et en direction les axes d'une ellipse ou d'une hyperbole, déterminer graphiquement en grandeur et en direction, et sans tracer la courbe, un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.

3. On mène à une parabole une suite de cordes parallèles que l'on partage dans un rapport donné, trouver le lieu des points de division.

4. Trouver le lieu des centres des cercles tangents à une parabole et à sa directrice.

5. Le point de division d'une droite de longueur $(a+b)$, qui glisse dans un angle droit, décrit une ellipse dont les axes sont $2a$, $2b$; en quelle position cette droite est-elle tangente à cette ellipse ?

6. D'un point donné mener à une parabole, une sécante dont la corde d'intersection soit d'une longueur donnée, et

trouver le lieu du sommet de l'angle circonscrit à cette parabole et ayant cette corde pour corde de contact.

7. Trouver le lieu des milieux des tangentes à une conique terminées au point de contact et à l'axe.

8. Déterminer une ellipse passant par un point donné d'une hyperbole et ayant les mêmes foyers qu'elle.

9. Sur le grand axe d'une ellipse, et des deux côtés du centre, on prend des distances égales à une longueur donnée, exprimer la somme des distances de ces deux points à un point quelconque de l'ellipse ; conditions pour que cette somme soit rationnelle.

10. De ce que la somme ou la différence des quarrés de deux demi-diamètres d'une ellipse ou d'une hyperbole, est égale à la somme ou à la différence des quarrés des axes, peut-on conclure que ces diamètres sont conjugués ?

De ce que la surface d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse ou à une hyperbole est équivalente à la surface du rectangle des axes, peut-on conclure que les côtés de ce parallélogramme sont parallèles à un système de diamètres conjugués ?

11. Déterminer graphiquement et par l'analyse une parabole tangente en deux points donnés à deux droites données.

12. En quel point de l'ellipse la tangente fait-elle avec le rayon vecteur mené au point de contact un angle de 45° ?

13. Trouver sur la circonférence d'une ellipse le point le plus éloigné de l'extrémité du petit axe.

Remarquer pour la discussion qu'il faut non-seulement que l'ordonnée du point soit réelle, mais encore qu'elle soit plus petite que b.

Statique.

1. Lieu des centres de gravité des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole.

2. En appuyant la pointe d'un crayon contre un fil dont les deux extrémités sont fixées, le crayon décrit une ellipse; quelle est en chaque point de la courbe la tension du fil, et en quel point est-elle la plus grande ou la plus faible? Trouver le lieu décrit par le centre de gravité du fil.

3. Trouver la résultante de deux forces concourantes; mais dont on n'a pas le point de rencontre.

4. Trouver les tensions horizontales de deux clous auxquels est attaché un cordon tendu à angle droit par une force verticale.

Géométrie descriptive.

1. Étant donnée la projection horizontale d'un point d'une surface cylindrique à base quelconque, trouver la projection verticale.

2. Plan tangent à la sphère en un point de cette surface, donné en projection horizontale.

3. Construire un trièdre dont on donne un angle dièdre, et les deux faces qui le comprennent; une des faces est un angle droit.

4. Construction des polyèdres réguliers.

5. Inscrire une sphère dans un tétraèdre.

6. On donne un plan et la projection horizontale d'une droite; déterminer sa projection verticale, connaissant l'angle que cette droite fait avec le plan.

Courbes à construire.

$$y^2 = \frac{1}{x+1},$$

$$y^2 = \frac{1}{x-1},$$

$$y = \frac{1}{1-x^2},$$

$$y = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \frac{x}{x^2-1},$$

$$y = \frac{1}{x^2-x},$$

$$y^2 = \frac{x}{1+x},$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$y = \frac{2x-1}{x^2+1},$$

$$y = \frac{x+1}{x^2+1},$$

$$y^2 = \frac{x^2-x}{1+x},$$

$$y = \frac{2-x}{x^2 \pm 1},$$

$$y = \frac{1}{x^2-x+1},$$

$$y = \frac{2x-x^2}{x^2-1},$$

$$y = \frac{1-x^3}{x^2},$$

$$y = x^3 - 1,$$

$$(y-1)x^2 + x - 2 = 0,$$

$$y^2 = \frac{1-x^3}{x},$$

$$y = x \pm x\sqrt{x},$$

$$y = \pm(x-2)\sqrt{x-1},$$

$$y = x \pm \sqrt{5x^2 - 6x + x^3},$$

$$xy^2 - 2xy + 4y + x^3 = 0,$$

$$y = -1 + \frac{2x-1}{x^2-1},$$

$$y = x - 1 + \frac{x}{x^2+1},$$

$$y = x - 1 + \frac{x}{x^2-1},$$

$$y = x - 1 \pm \sqrt{1 - x^3}.$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2+1},$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2-1},$$

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x^2},$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2+x},$$

$$y^2 = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$y^2 = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

$$y^3 = \frac{x^2+1}{x},$$

$$y^3 = \frac{x}{x^2+1},$$

$$y = \frac{2-x}{1+x^3},$$

$$y = \frac{3x-1}{x^3},$$

$$y^2 = \frac{x^2}{1-x^2},$$

$$y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{1-x},$$

$$y = x \pm \sqrt{x^4+4x},$$

$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^2 - x},$$

$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^3 - 6x + 4},$$

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^3 - 4x},$$

$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 1},$$

$$y = \frac{x}{1 \pm \sqrt{1 - x^2}},$$

$$y^2 = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x(x-1)},$$

$$y = \frac{1}{x+1} \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y^2 = x^4 + x,$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1}{x^2 - x}},$$

$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}},$$

$$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

$$y = x^2 \pm \frac{1}{x^2},$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1},$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x}{1 - x^2}},$$

$$y^2 = \frac{1}{1 - x^3},$$

$$y = x^2 \pm \sqrt{\frac{1}{1 - x}},$$

$$y = x \pm \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}},$$

$$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}},$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x}{1 - x^2}},$$

$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{4x - x^2}},$$

$$y = x \pm \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^4}},$$

$$\rho = \frac{1}{1 + \sin \omega - \cos \omega},$$

$$\rho = \cos \omega + 2 \sin \omega ,$$

$$\rho = \frac{1}{3 \operatorname{tang} \omega},$$

$$\rho = \frac{2}{1 + \operatorname{tang} \omega},$$

$$\rho^2 = \frac{1}{\sin 2\omega},$$

$$\rho = \operatorname{tang} \omega ,$$

$$\rho = 1 + 2 \cos \omega ,$$

$$\rho = \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega},$$

$$\rho = \frac{1}{\sin \omega + \cos \omega},$$

$$\rho = \frac{1}{3 \sin \omega - 2 \cos \omega},$$

$$\rho = \frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega},$$

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

$$a = \log \sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x - c)^2 + y^2}},$$

$$b = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x - c} - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x + c}.$$

TABLE ALPHABÉTIQUE.

DES AUTEURS (*).

(*) Nous devons ces tables à l'extrême obligeance de M. le profess. Anne (Léon).

(*) Pseudonyme.

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie rectiligne.

VI. Géométrie analytique à deux dimensions.

VII. Géométrie analytique à trois dimensions.

VIII. Statique.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS CE VOLUME.

I. Algèbre élémentaire.

II. Algèbre supérieure.

III. Géométrie élémentaire.

VI. Géométrie analytique à deux dimensions.

QUESTIONS D'EXAMEN.

I. Algèbre élémentaire.

II. Algèbre supérieure.

III. Géométrie élémentaire.

IV. Géométrie analytique à deux dimensions.

V. Physique.

VI. Analyses d'ouvrages.

VII. Matières diverses.

VIII. Théorèmes et problèmes non résolus.

ERRATA.

TOME I. (*Second supplément.*)

Page 298, ligne 14, en descendant, 64, *lisez:* 68.
Page 490, ligne 13, en descendant, $2ky + l^2$, *lisez :* $2k'y + l'^2$.
Page 494, ligne 10, en descendant, $\sin^2 \gamma$, *lisez :* $\sin^4 \gamma$.

TOME II. (*Supplément*).

Page 110, ligne 5, en remontant, AC, *lisez :* AB.

Page 123, ligne 20, en descendant, s'y trouve cependant, *lisez :* s'y retrouve cependant.

Page 227, ligne 12, en remontant, après les mots sont rectangulaires, *ajoutez :* et la somme $\xi^2 + \gamma^2$ est constante.

Page 236, ligne 4, en remontant, vous en, *lisez :* en.

Page 313, ligne 11, en remontant, $y = \xi \sin^3\psi$, *lisez :* $y = \gamma^3 \sin \psi$.

Page 406, ligne 2, en descendant, *lisez* : effacez.

Page 426, ligne 9, en descendant, $\cos \gamma$, *lisez ;* $\cos \varphi$.

Page 454, ligne 13, en descendant, point, *ajoutez :* quelconque du plan.

Page 548, ligne dernière, en descendant, rayon de la, *ajoutez :* sphère.

Page 552, ligne 12, en remontant, Courrier, *lisez :* Courier.

Page 562, ligne 19, en remontant, 510, *lisez :* 519.

TOME III.

Page 27, ligne 17, en descendant, Lilatte, *lisez :* Pilatte.
Page 40, ligne dernière, en descendant, expliuer, *lisez :* expliquer.
Page 58, ligne 11, en descendant, $f^{(n-1)}$, *lisez :* $f^{n-1}(a)$.
Page 77, ligne 11, en remontant, -1, *lisez :* 1.
Page 85, ligne 10, en descendant, H′, *lisez partout* A′.
Page 116, ligne 6, en descendant, BE, *lisez :* BD.
Page 116, ligne 10, en descendant, BG, *lisez :* BD.
Page 147, ligne 2, en remontant, équation, *ajoutez :* du second degré.
Page 216, ligne 10, en remontant, $b+p$, *lisez :* $b=p$.
Page 219, ligne 2, en descendant, 1358, *lisez :* 056.
Page 232, ligne 10, en remontant, cycloïde, *ajoutez :* problème.
Page 256, ligne 10, en remontant, Fodot, *lisez :* Faudot.
Page 268, ligne 12, en remontant, fig. 1, *lisez :* fig. 31
Page 317, ligne 7, en descendant, Fink, *lisez :* Finck.
Page 324, dernière ligne, en descendant, 1760, *lisez :* + 760.
Page 342, ligne 12, en remontant, *effacez :* est.
Page 406, ligne 2, en descendant, *supprimez :* et.
Page 414, ligne 11, en descendant, ils désignent, *lisez :* il désigne.
Page 424, ligne 6, en remontant, $\frac{AB}{AC}$, *lisez :* $\frac{AB}{AC} \times \frac{DR}{GO}$.
Page 426, en remontant, $\frac{AK}{AM} = \frac{AC}{AB}$, *lisez :* $\frac{AK}{AN} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{GO}{DR}$.
Page 575, première ligne, en remontant, trois, *lisez :* trans-.
Page 575, ligne 6, en remontant, a_2d_2, *lisez :* a_1d_1.

FIGURES.

Fig. 15, H′, *lisez partout* A′.
Fig. 16, la lettre *b* est omise.

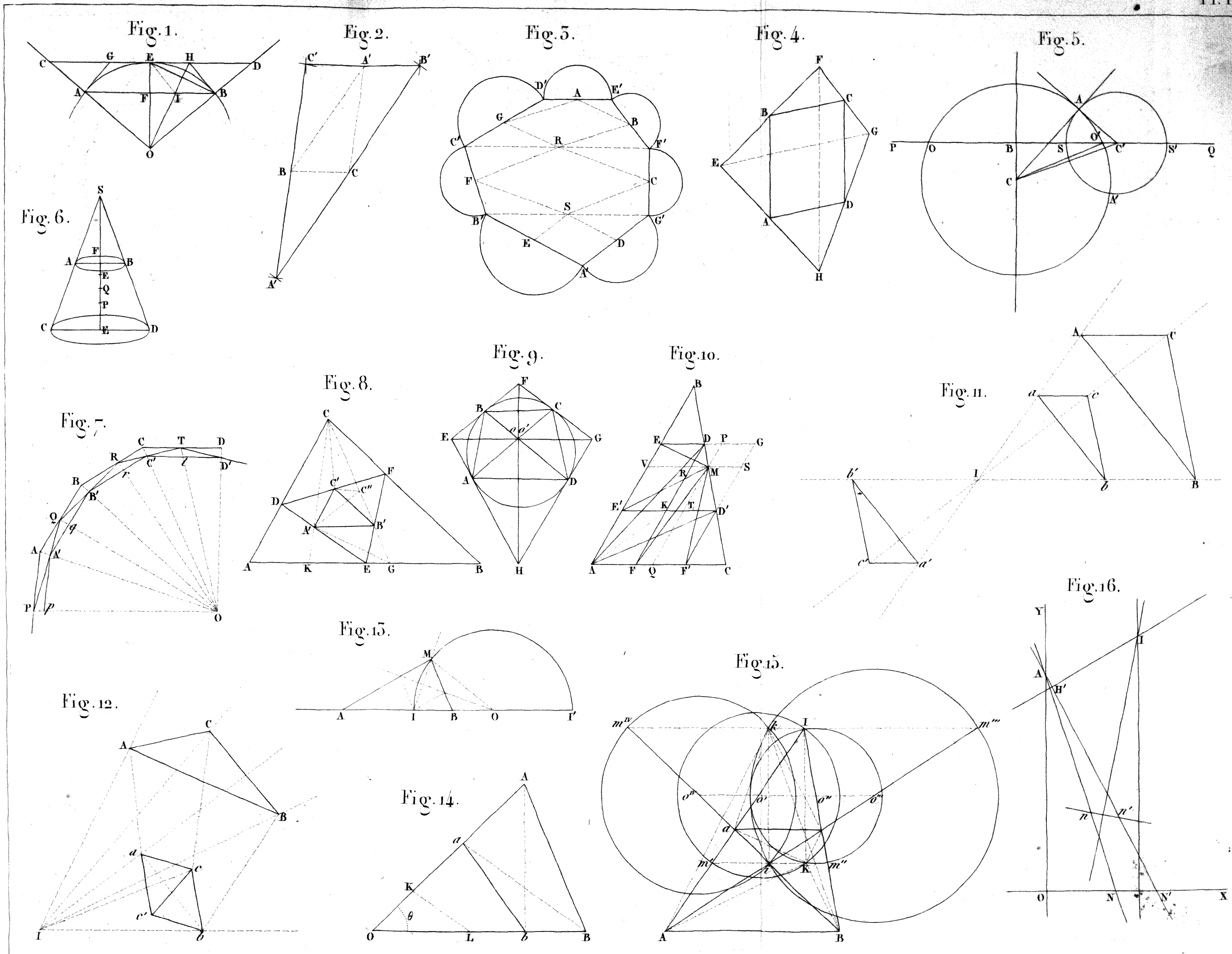
QUESTIONS RÉSOLUES ET NON RÉSOLUES

dans les tomes I, II et III.

N°.	Tome.	Page.	Auteurs.	
1	I	138	Rougevin.	p. 57
2	*id.*	147	Rédacteurs.	
2	*id.*	311	Grout de Saint-Paer.	
3	*id.*	142	Huet.	
3	*id.*	429	Vidal.	
4	II	268	Terquem.	
5	I	57	*id.*	
6	*id.*	243	Pury.	
7	*id*	143	Merlieux.	
8	*id.*	139	Levylier.	
9	*id.*			
10	*id.*	236	Beausacq.	
11	*id.*	148	Gérono.	
12	*id.*	265	Merlieux.	p. 59
1	*id.*	428	Louis Roux.	p. 122
2				
3	*id.*	470	Bertot.	
4				
5	*id.*	240	Merlieux.	
6				
7	II	43	Vidal.	
8	*id.*	422	Louis Roux.	
23	*id.*	360	Merlieux.	p. 246
24	*id.*	471	Merlieux.	
25				
26	*id.*	357	Pury.	
27	II	508	Vachette.	
28				
29	I	356	Pury.	
30	I	345	Vachette.	
31	I	474	Roche.	p. 394
32	III	232	Peyronny.	
33	II	115	de Sailly.	
34				
35				
36	II	237	Yvon (Louis).	
36	I	507	Vachette.	
37				
38	II	511	Vachette.	
39	II	312	Breton de Champ.	
39	II	496	Vidal.	
40	III		Ritt.	
41				
42	III	172	Vidal.	p. 519
43	II	365	Vidal.	
44	III	365	Faure.	
45				

N°.	Tome.	Page.	Auteurs.	
46				
47				
48				
48				
49	II	244	Roche.	
50	II	145	Vidal.	
51				
52				
53				
54	II	37	Roche.	
55				
56				
57				
58				p. 48, t. II
59				
60				
61				
62				p. 96
63	III	19	Prouhet.	p. 137, t. II
64	II	314	Merlieux.	228
65	III	226	Rispal.	326
66				
67				
68	III	22	Colombier.	
69				
70				
71	III	170	Faure.	
72	II	468	Colombier.	
72	III	76	Arcas Trebert.	
73	III	121	Mathieu (Auguste).	
74				
75				p. 416
76				
77	III	226	Rispal.	p. 454, t. II
78				
79				
80				p. 40, t. III
81				
82				
83				p. 194
84				256
85	III		Coupy (Émile).	
85				
87				376
88				*id.*
89				*id.*
90	III		Faure.	p. 592. 424

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.



Lemaitre sculp.

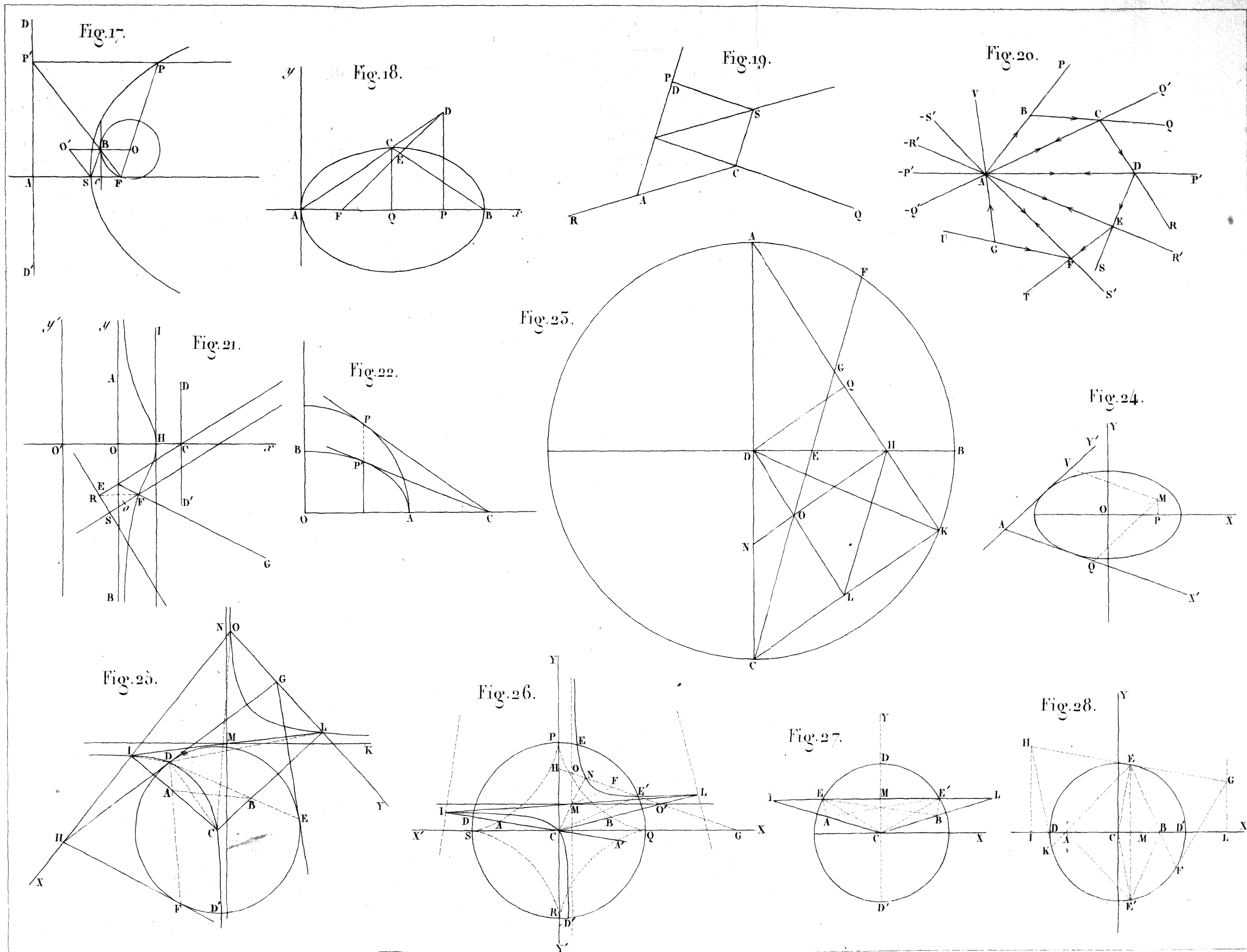


Fig.17.
Fig.18.
Fig.19.
Fig.20.
Fig.21.
Fig.22.
Fig.23.
Fig.24.
Fig.25.
Fig.26.
Fig.27.
Fig.28.

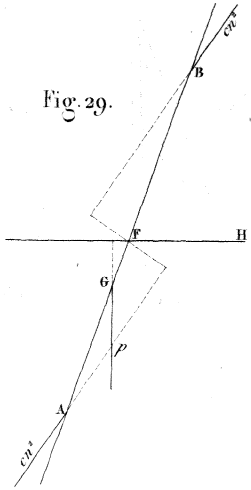


Fig. 29.

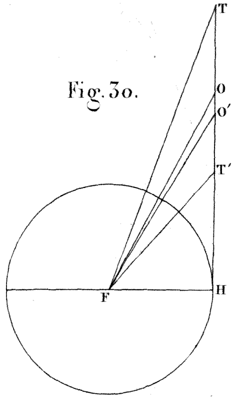


Fig. 30.

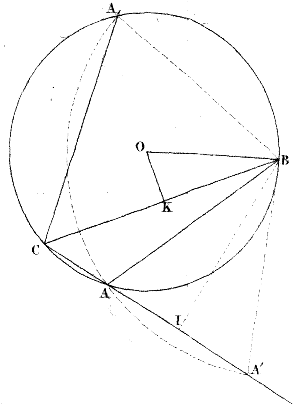


Fig. 31.

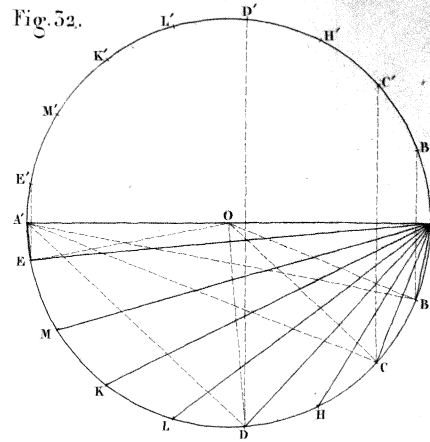


Fig. 32.

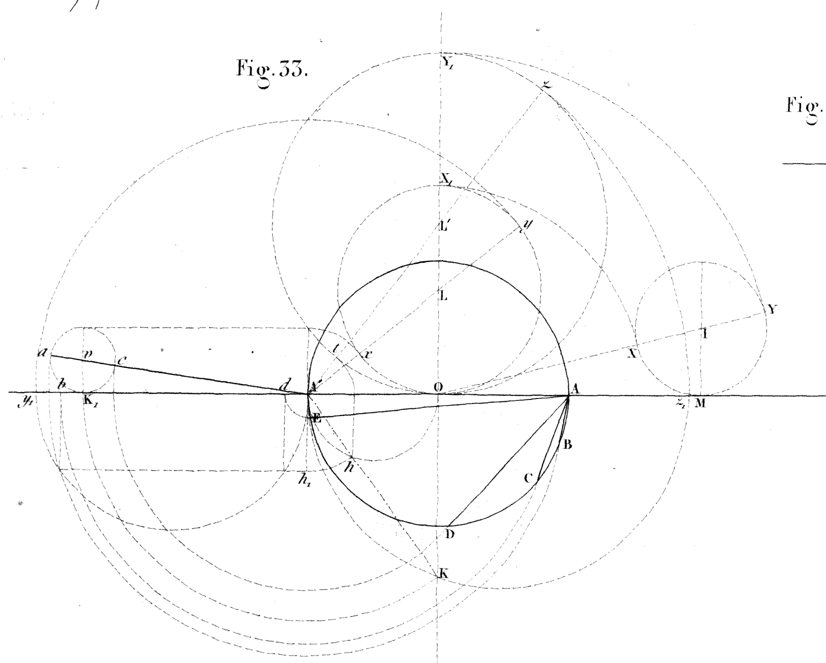


Fig. 33.

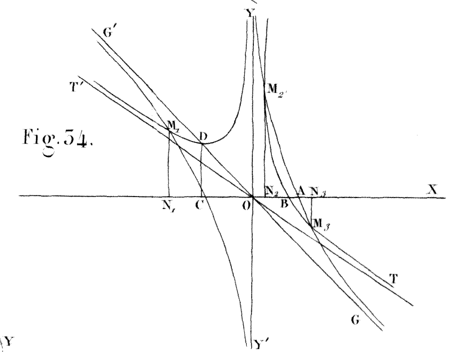


Fig. 34.

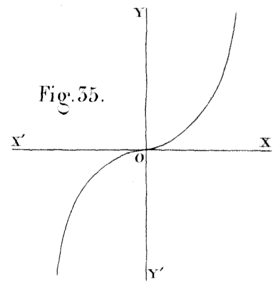


Fig. 35.

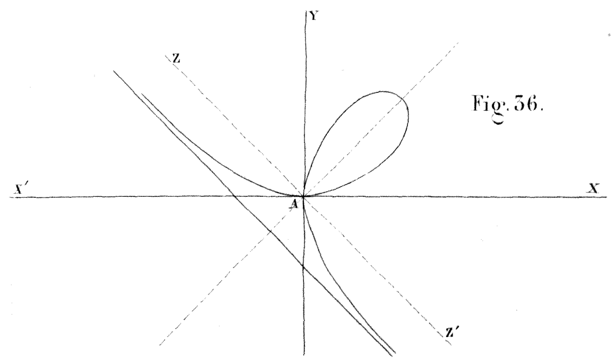


Fig. 36.

Lemaitre sc.

Fig. 37.

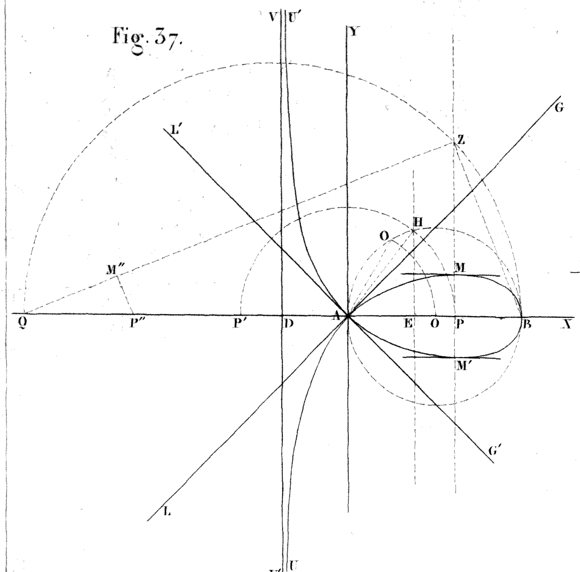


Fig. 38.

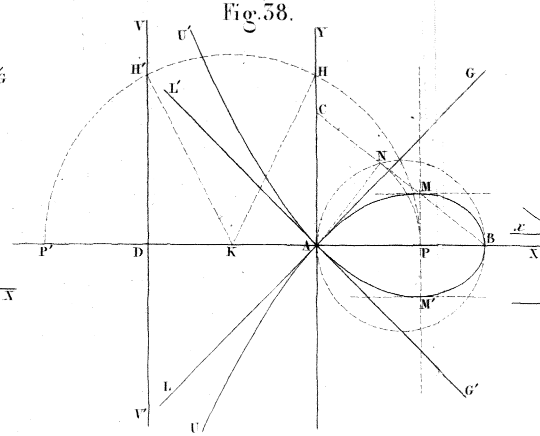


Fig. 39.

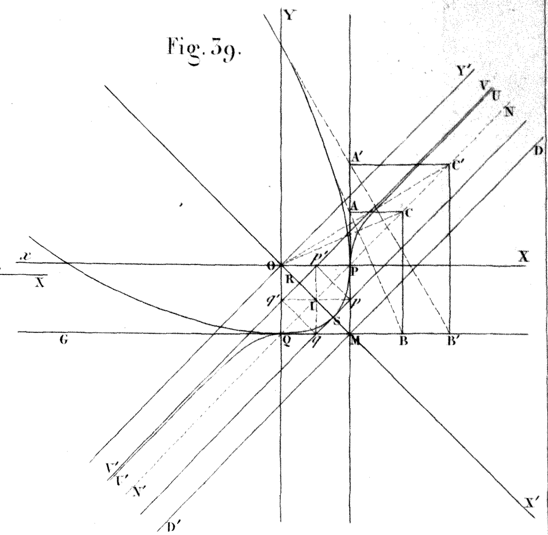


Fig. 40.

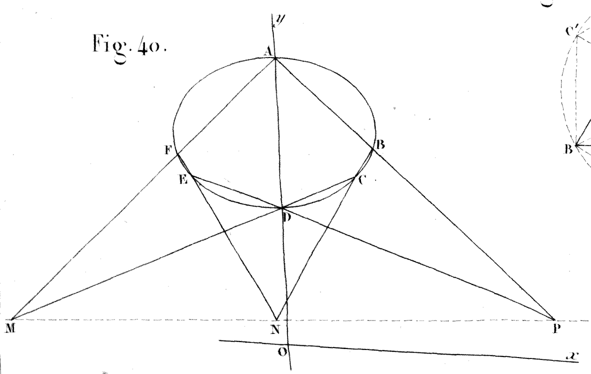


Fig. 41.

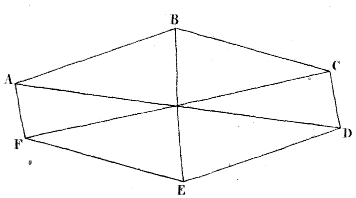


Fig. 42.

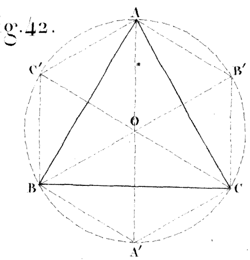


Fig. 43.

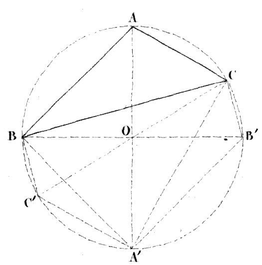


Fig. 44.

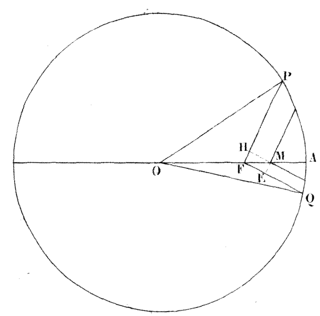


Fig. 45.

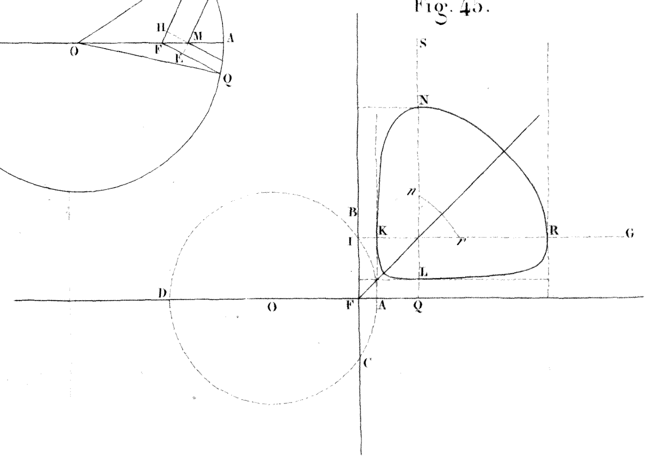


Fig. 46.

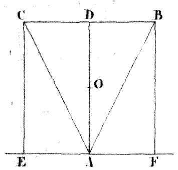


Fig. 47.

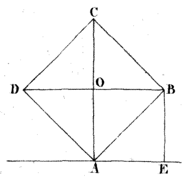


Fig. 48.

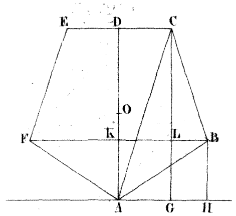


Fig. 49.

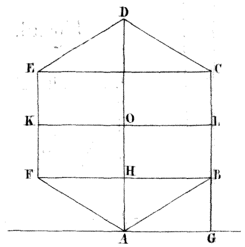


Fig. 50.

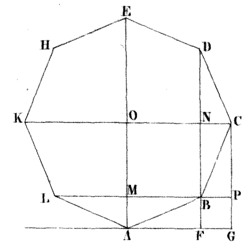


Fig. 51.

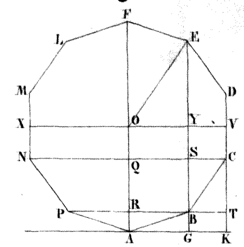


Fig. 52.

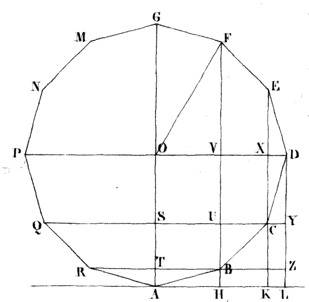


Fig. 53.

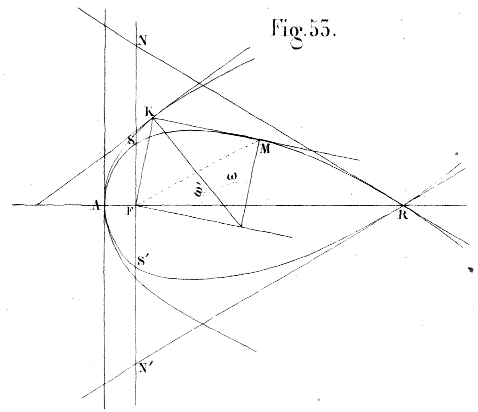


Fig. 54.

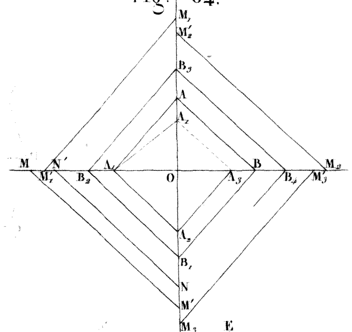


Fig. 55.

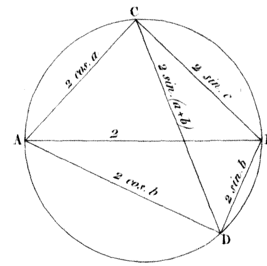


Fig. 56.

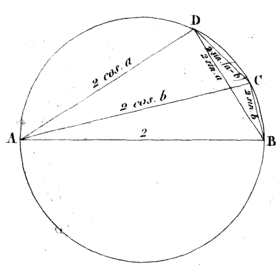


Fig. 57.

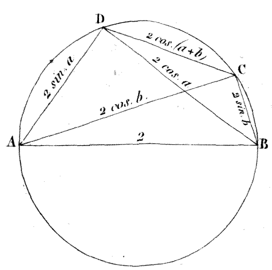


Fig. 58.

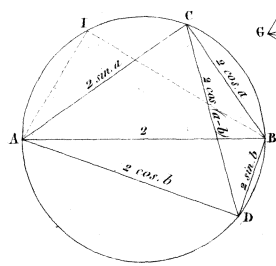


Fig. 59.

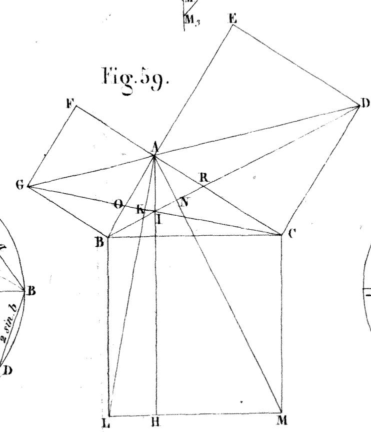
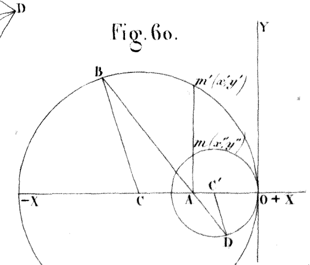


Fig. 60.



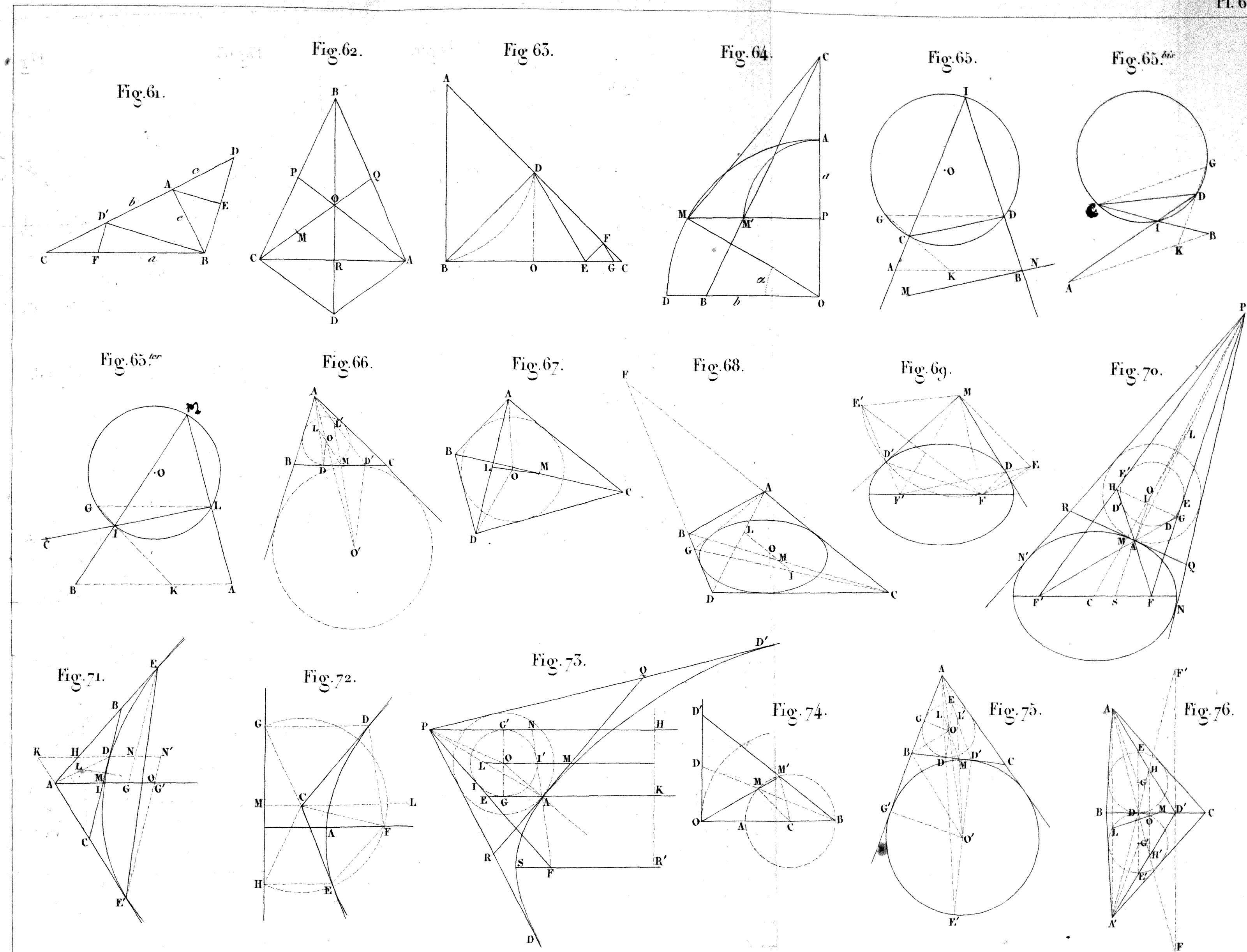


Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 65.bis
Fig. 65.ter
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.

Lemaitre sc.

Fig. 77.

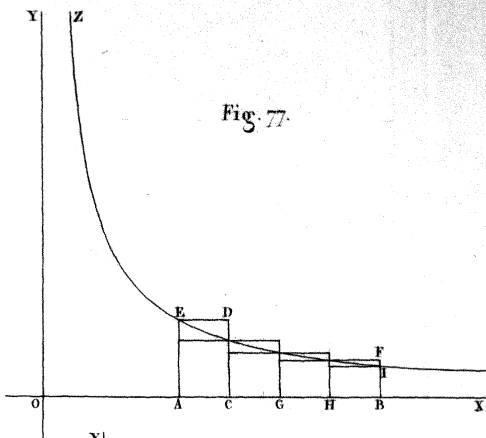


Fig. 78.

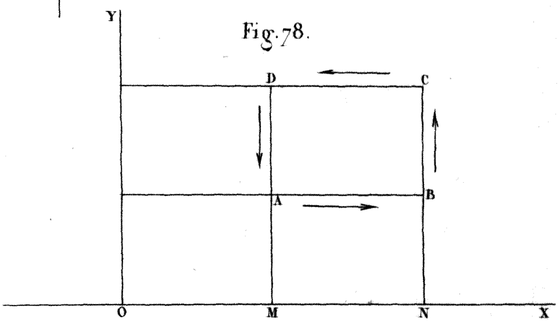


Fig. 79.