NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème de M. Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 97-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__97_0>

THÉORÈME DE M. STURM.

I. La disparition inattendue, par des moyens simples, d'un obstacle contre lequel s'étaient heurtés les princes de la science était un événement considérable; de là, cette profonde sensation que produisit, en 1829, la découverte de M. Sturm, sur les géomètres de toute classe. L'un d'entre eux, M. Mayer-Dalembert (*), doué d'un grand esprit de spéculation, et sachant le prix de toute chose, acquit de l'auteur le droit de faire usage de son invention. Le théorème, devenu si célèbre, fut inséré, pour la première fois, dans les *Éléments d'algèbre* que publia en 1830 M. Dalembert, de concert avec M. Choquet. Exigé tacitement (**) pour l'admission à l'École polytechnique, ce théorème est devenu, depuis, obligatoire pour tous les auteurs d'éléments; maintenant, il est expliqué partout avec clarté et rigueur, et, toutefois, de nombreuses interrogations m'ont convaincu que les élèves savent très-bien le procédé des opérations, mais que beaucoup d'entre eux ne voient la théorie qu'à travers des nuages. J'ai cru m'apercevoir que cela tient aux propositions auxiliaires qui servent à établir la théorie et qui, n'étant pas assez détachées du fond, jettent quelque obscurité sur l'exposition. Il m'a donc semblé utile de donner, non une nouvelle démonstration, différente de celle qui est dans les traités, mais une démonstration plus développée, différem-

(*) Mayer (Mathias), né à Mutzig (Bas-Rhin), le 27 déc. 1786, élève de l'Ecole polyt. l'an XIV (1806), mort chef d'institution le 22 janvier 1841.

(**) Ce théorème si important n'est pas expressément énoncé dans le programme!

ment arrangée. Dans un autre numéro, nous donnerons la magnifique théorie des résidus, qu'on doit à l'illustre M. Cauchy, et où tous les théorèmes sur les équations découlent d'une source unique.

II. *Remarque essentielle.* Dans ce qui suit, il ne s'agit que de *fonctions algébriques entières à une seule variable et à coefficients numériques réels.*

La racine d'une fonction est un nombre qui, mis à la place de la variable, rend la fonction égale à zéro.

III. *Lemme I.* Si deux nombres substitués dans une fonction donnent des résultats de signes contraires, une variation, il y a un nombre impair de racines compris entre ces nombres, et au moins une; si les résultats de la substitution sont de mêmes signes, offrent une permanence, il y a un nombre pair de racines compris entre ces nombres, et il peut n'y en avoir aucune.

IV. *Lemme II.* Si deux nombres comprennent entre eux un nombre impair de racines, les résultats de la substitution offrent une variation; si les deux nombres comprennent un nombre pair de racines, les résultats offrent une permanence.

Remarque. Dans ces deux lemmes, les racines égales sont comptées selon leur degré de multiplicité.

V. *Lemme III.* $F(x)$ et $F_1(x)$ étant deux fonctions ; r une racine de la première fonction et non de la seconde, il existe toujours un nombre h tel, que $r-h$ et $r+h$ comprennent la seule racine r de $F(x)$ et aucune de $F_1(x)$.

En effet, concevons qu'on retranche r de toutes les racines de $F(x)$ et de $F_1(x)$, il suffit de prendre $2h$ moindre que la plus petite de ces différences.

VI. *Lemme IV.* $F(x)$ étant une fonction et $F'(x)$ la fonction dérivée première; r étant une racine, simple ou multiple, de $F(x)$; si $r-h$ et $r+h$ comprennent la racine r et aucune autre racine de $F(x)$ et de $F'(x)$, la substitution du nombre

$r-h$, dans les deux fonctions, donnera nécessairement une *variation*, et la substitution du nombre $r+h$, dans les deux fonctions, donnera nécessairement une *permanence*.

C'est le lemme fondamental sur lequel repose le théorème, objet de cette note.

Soit n le degré de multiplicité de la racine r; on aura :

$$F(r-h) = \frac{(-h)^n}{1.2.3\ldots n} F^{n)}(r) + \ldots\ldots$$

et
$$F'(r-h) = \frac{(-h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}(r) + \ldots.$$

ce qui donne toujours une variation.

F^n désigne la n^{eme} dérivée.

VII. *Lemme V.* Si, dans trois termes consécutifs, le premier et le troisième forment une permanence, les trois offrent ou deux permanences ou deux variations; si le premier et le troisième forment une variation, les trois offrent une variation et une permanence, ou une permanence et une variation.

VIII. Soient $F(x)$, $F_1(x)$, deux fonctions n'ayant aucun facteur commun; on suppose la seconde fonction d'un degré moins élevé que la première. Faisons sur ces fonctions la recherche du plus grand commun diviseur, et désignons les restes successifs par $F_2(x)$, $F_3(x)$, etc., et les quotients correspondants par Q_1, Q_2, Q_3, etc.; on aura les identités :

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x).\ Q_1 + F_2(x) \\ F_1(x) &= F_2(x).\ Q_2 + F_3(x) \qquad\qquad (A) \\ F_2(x) &= F_3(x).\ Q_3 + F_4(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x) &= F_{n+1}(x) Q_n + F_{n+2}(x). \end{aligned}$$

Ecrivons les restes sur une ligne horizontale :

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x)\ldots,\ F_n(x),\ F_{(n+1}(x),\ F_{n+2)}(x)\ \ldots \quad (B)$$

Les deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ n'ayant par supposition aucun commun diviseur, on démontre, comme en arithmétique, que deux restes consécutifs ne peuvent avoir de commun diviseur ; en d'autres termes, il n'existe pas de nombres qui, substitués à la place de x dans deux fonctions consécutives, puissent les rendre toutes deux égales à zéro ; le dernier de ces restes, $F_m(x)$, est nécessairement un nombre différent de zéro.

IX. Soient a et b deux nombres non racines de la fonction $F(x)$ et $b > a$; si l'on substitue a à la place de x dans chacune des fonctions de la suite (B), supposons que l'on obtienne p permanences et ν variations, et que, si l'on substitue b, on obtienne $p \pm k$ permanences et $\nu \mp k$ variations.

k indique le nombre de permanences ou de variations gagnées ou perdues en passant de a à b.

Imaginons que a croisse par degrés insensibles jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur de b, à chaque accroissement correspond un certain état de la suite (B) qui présentera $p \pm k'$ permanences et $\nu \mp k'$ variations. Soit r une racine de la fonction $F_{(n+1)}(x)$, et comprise entre a et b; pour cette valeur, $F_{(n+1)}(x)$ s'anéantira ; et alors, d'après les identités (A), on aura $F_n(x) = F_{(n+2)}(x)$; ces deux fonctions étant égales, offrent donc une permanence, soient $r-h$ et $r+h$, deux valeurs qui ne renferment que la seule racine r et aucune racine des fonctions voisines ; $F_n(r-h)$, $F_{(n+2)}(r-h)$ forment donc aussi une permanence, ainsi que $F_n(r+h)$ et $F_{(n+2)}(r+h)$, puisque ces fonctions ne peuvent changer de signe (lemme I); mais, en vertu de ce même lemme, la fonction intermédiaire change de signe, en passant de $F_{(n+1)}(r-h)$ à $F_{(n+1)}(r+h)$; donc (lemme V) ou deux permanences seront changées en deux variations, ou bien deux variations seront changées en deux permanences. Il est donc impossible de savoir quels changements dans le nombre de permanences et de variations apportent les racines de la suite (B) comprises entre a et b; de sorte que le nombre k n'apprend rien sur le nombre de ces racines.

X. Pour remédier à cet inconvénient, M. Sturm a eu l'idée heureuse (*) de faire l'opération de la recherche du plus grand commun diviseur, mais en multipliant chaque reste par -1; ce qui ne donnant pas de nouveaux facteurs à ces restes, n'altère pas les propriétés ci-dessus énoncées (VIII). Les identités (A) prennent cette forme :

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x).\, q_1 - f_2(x) \\ F_1(x) &= f_2(x).\, q_2 - f_3(x) \\ f_2(x) &= f_3(x).\, q_3 - f_4(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (A')$$

Nous désignons par la lettre f les restes ainsi changés.

La suite (B) est remplacée par celle-ci :

$$F(x), F_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x), f_{(n+1)}(x), f_{(n+2)}(x), \ldots \quad (B')$$

Si r est une racine de $f_{(n+1)}(x)$, on aura en vertu des identités (A') :

$$f_n(r) = -f_{(n+2)}(r).$$

Ainsi $f_n(r-h)$, $f_{(n+2)}(r-h)$, présentent une variation, ainsi que $f_n(r+h)$ et $f_{(n+2)}(r+h)$; donc les trois fonctions consécutives $f_n(r-h)$, $f_{(n+1)}(r-h)$, $f_{(n+2)}(r-h)$ présentent ou une variation et une permanence ou l'inverse (lemme V) ; il en est de même pour $r+h$; ainsi dans le passage de $r-h$ à $r+h$, en cet endroit de la suite, une permanence sera remplacée par une variation et *vice versâ*; et la même chose a lieu pour toutes les fonctions qui s'annulent entre les deux voisines. Ainsi le nombre final k ne peut provenir que des changements de signe de la première fonction $F(x)$, qui n'a pas de fonction voisine à gauche ; supposons que l'on ait $k=0$; ceci peut annoncer ou que $F(x)$ n'a pas changé de signe ou

(*) Mémoire des Savants étrangers, tome VI, p. 271. 1835 qu'il a changé deux fois, quatre fois ;. ... en général, si k est un nombre pair, il y a un nombre pair de racines entre a et b; et si k est impair, il y a un nombre impair de racines, ce qui n'apprend rien sur le nombre des racines. D'ailleurs, pour obtenir ce résultat, on n'a pas besoin de la suite (A'); la substitution dans la première fonction $F(x)$ suffit (lemme I).

XI. Dans tout ce qui précède, $F_1(x)$ est une fonction arbitraire ; supposons que ce soit la première dérivée de $F(x)$, qu'on ait $F_1(x) = F'(x)$; $F(x)$ et $F'(x)$ ne devant pas avoir de facteurs communs (VIII), il s'ensuit que $F(x)$ ne devra avoir que des racines simples ; soient α, β, γ,... les racines de $F(x)$, suivant l'ordre ascendant de grandeur, comprises entre a et b, et h un nombre remplissant les conditions du lemme III pour chaque racine. Substituons a dans la suite (A') et supposons qu'on compte p permanences et ν variations. Faisant croître a, depuis a jusqu'à $\alpha - h$, les permanences et les variations peuvent se déplacer, mais le nombre n'en changera pas; à $\alpha - h$, la tête de la suite présente une variation qui se change en permanence pour $\alpha + h$ (lemme IV), tandis que, pour les autres termes, il pourra y avoir déplacement, mais non changement dans le nombre (X); donc, en $\alpha + h$, il y aura $p+1$ permanences et $\nu - 1$ variations ; ce nombre se conservera, avec déplacement possible, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à $\beta + h$; alors on aura $p+2$ permanences et $\nu - 2$ variations, et ainsi de suite; donc, si, arrivé en b, on a $p+k$ permanences, le nombre k marque le nombre de racines comprises entre a et b, et c'est là le théorème de M. Sturm ; et l'on voit, d'après le lemme IV, qu'en allant de la limite inférieure a à la limite supérieure b, k est essentiellement positif.

Observation. Si une des limites, a ou b, ou toutes les deux étaient racines d'une des fonctions $f_n(x)$, on peut remplacer la fonction annulée par ± 0, ce qui, ayant lieu entre une variation, n'altère pas le résultat.

XII. En comparant les identités (A) et (A′), on en conclut que

$$f_2(x) = -F_2(x),\ f_3(x) = -F_3(x),\ f_4(x) = F_4(x),$$
$$f_5(x) = F_5(x),\ f_6(x) = -F_6(x),\ \text{etc.}$$

On déduit donc la suite (B′) de la suite (B), en multipliant par — 1, les troisième et quatrième termes, les sixième et septième, neuvième et dixième, etc., et sans changer les autres termes. On voit donc que, dans l'opération, on peut, si l'on veut, ne changer les signes que des premier, deuxième, cinquième, sixième, neuvième et dixième restes, etc.

XIII. Le dernier terme de la suite (B′) est un nombre; mais si F (x) et F′ (x) ont pour plus grand diviseur commun $f_t(x)$, le dernier terme de (B′) sera ce diviseur commun multiplié par un nombre N.

Considérons la suite :

$$\frac{F(x)}{f_t(x)},\ \frac{F'(x)}{f_t(x)},\ \frac{f_1(x)}{f_t(x)},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{Nf_t(x)}{f_t(x)}. \qquad (B'')$$

Ce sont évidemment des fonctions algébriques entières, où deux fonctions consécutives n'ont plus de diviseur commun; le lemme IV s'applique aux deux premières fonctions, et toutes les autres fonctions se déduisent aussi par la recherche du plus grand commun diviseur entre ces premières fonctions; le théorème de Sturm existe donc pour cette suite; mais elle présente le même nombre de permanences et de variations que les numérateurs; donc le théorème est aussi applicable à ces numérateurs. Ainsi la suite F (x), F′ (x), $f_1(x)$,.. $f_t(x)$, peut servir à connaître le nombre de racine distinctes comprises entre a et b, mais non pas le degré de multiplicité de ces racines.

XIV. Le tableau suivant (*) met en évidence le mouvement

(*) On trouve plusieurs de ces tableaux dans le mémoire de M. Midi (E.). du théorème de M. Sturm et de ses Applications numériques. 1836, in-4° de 37 pages Bachelier, lib.

des signes, dans l'intervalle de la limite inférieure à la limite supérieure; nous supposons une équation du quatrième degré ayant les racines réelles α, β, γ, δ, comprises entre les nombres a et b.

a.	$+ - + - +$
$\alpha - h$.	$+ - + - +$
α.	$0 - + - +$
$\alpha + h$.	$- - + - +$
$\beta - h$.	$- + + - +$
β.	$0 + + - +$
$\beta + h$.	$+ + + - +$
$\gamma - h$.	$+ - - + +$
γ.	$0 - - + +$
$\gamma + h$.	$- - - + +$
$\delta - h$.	$- + + + +$
δ.	$0 + + + +$
$\delta + h$.	$+ + + + +$
b.	$+ + + + +$

On voit que les limites a et b comprennent 4 racines de $F(x)$, 3 racines de $F'(x)$, 2 racines de $f_2(x)$, et une racine de $f_3(x)$; de semblables conclusions peuvent se déduire pour des équations de tous les degrés; on voit aussi par là que le théorème de Rolle est une conséquence du théorème de Sturm.

XV. Il y a une infinité de manières de former des fonctions auxiliaires $f_2(x)$, $f_3(x)$, etc., dans la suite (B'), et qui peuvent servir également à trouver le nombre des racines, pourvu que les deux premières fonctions soient la fonction donnée et sa dérivée. Voici un moyen très-simple indiqué par M. Sturm, dans le mémoire cité (*page* 317); soient les deux fonctions consécutives $f_n(x)$, $f_{(n+1)}(x)$, de la suite (B'); au lieu d'ordonner les polynômes suivant les puissances décroissantes de x, comme on le fait d'ordinaire, on les ordonne suivant les puissances croissantes ; la division donnera un quotient $p+qx$ et un reste divisible par x^2 ; multipliant ce reste par -1, prenons pour $f_{(n+2)}(x)$, ce produit divisé par x^2 ; on aura l'identité : $f_n(x)=f_{(n+1)}(x)(px+q)-x^2 f_{(n+2)}(x)$.

Lorsque la fonction intermédiaire s'annule, les deux fonctions voisines donnent une variation ; donc les fonctions ainsi obtenues remplissent les conditions exigées.

On peut donc former les fonctions auxiliaires par deux procédés de division différents ; en les combinant, on obtient plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires. On peut même écrire en général :

$$f_n(x)=f_{(n+1)}(x).(px+q)-(ax^2+bx+c)f_{(n+2)}(x).$$

On peut se donner a, b, c, à volonté, pourvu que le trinôme conserve une valeur positive pour une valeur quelconque de x ; on divise $f_n(x)-(px+q)f_{(n+1)}(x)$ par ax^2+bx+c ; il vient un quotient qu'on prend pour $f_{(n+2)}(x)$ et un reste de la forme $Kx+L$; égalant à zéro K et L, qui renferment p et q au premier degré, on aura les valeurs de ces deux constantes. On suppose ici que le degré de $f_{(n+1)}(x)$ est moindre d'une unité que le degré de $f_n(x)$; s'il était moindre de deux unités, il faudrait prendre pour multiplicateur le trinôme $p+qx+rx^2$, etc. ; on voit donc qu'à partir de $F'(x)$, il existe une infinité de systèmes de fonctions auxiliaires. On peut même substituer à la fonction $F'(x)$, la fonction $F'(x+k)$, pourvu que k soit plus petit que la plus petite différence entre les racines de $F(x)$ et de $F'(x)$.

XVI. $F'(x)$ est, comme on sait, la somme des combinaisons des facteurs simples de $F(x)$ (du degré m), pris $m-1$ à $m-1$; $f_2(x)$ a de même une certaine relation avec ces mêmes facteurs pris $m-2$ à $m-2$; et, en général, $f_n(x)$ a une certaine relation avec ces facteurs pris $m-n$ à $m-n$; c'est le théorème de M. Sylvester (t. 1, page 166) que

M. Sturm a récemment démontré (*Journal de Liouville* 1842). Nous possédons, depuis longtemps, une autre démonstration; nous les donnerons l'une et l'autre, dans notre article sur l'élimination.

XVII. Nous n'insistons pas sur les divers usages du théorème; on les trouve partout; mais, avant de finir, nous croyons de la justice de rappeler que, dès 1815, M. Cauchy avait donné une règle sûre pour trouver le nombre de racines réelles d'une équation, à l'aide des alternances de signe d'une suite de fonctions, mais d'un calcul long et laborieux. Le théorème de Sturm est donc remarquable, non pas tant par la nouveauté du sujet que par l'extrême simplicité du procédé. L'auteur y est parvenu, en méditant sur une certaine équation différentielle du second ordre; c'est ce que nous lisons dans son mémoire de 1833, publié en 1836 (*Journal de Liouville*, tome I, p. 186), et où le célèbre analyste s'est élevé à la hauteur de Lagrange. Tm.