COURTOIS

Questions relatives à l'ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 90-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__90_0>

QUESTIONS RELATIVES A L'ELLIPSOÏDE.

PAR M. COURTOIS,
Professeur.

I.

Problème.— *Par le centre d'un ellipsoïde, on mène des plans qui interceptent des ellipses d'aire constante, et, par le même point, des normales à chacun de ces plans :* et on propose de trouver *la surface, lieu géométrique de ces normales.*

1. Avant de résoudre cette question je cherche, en fonction des coefficients, l'expression de l'aire d'une ellipse rapportée à son centre. L'équation de cette courbe sera

$$My^2 + 2Pxy + Nx^2 = 1. \qquad (1)$$

Pour la ramener à la forme $Qy^2 + Rx^2 = 1$, il faut poser

$$Q = \frac{1}{2}\left\{ M + N - \sqrt{4P^2 + (M-N)^2}, \right\}$$

$$R = \frac{1}{2}\left\{ M + N + \sqrt{4P^2 + (M-N)^2}. \right\}$$

Or, si l'on désigne par $2h$ la moyenne entre les deux axes de l'ellipse, l'aire sera ϖh^2, et l'on aura

$$h^2 = \frac{1}{Q.R} = \frac{1}{M.N - P^2}. \qquad (2)$$

2. L'équation de l'ellipsoïde rapportée à son centre et à ses axes étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (3)$$

je coupe cet ellipsoïde par un plan, passant par le centre, et dont l'équation sera $z = \alpha x + 6y.$ (4)

Si je désigne par θ l'inclinaison de ce plan sur le plan des xy; par ψ l'angle que fait, avec l'axe des x, l'intersection des deux plans, ces angles seront déterminés en fonction de α et 6, par les relations :

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{\alpha}{6}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 6^2 + 1}}. \qquad (5)$$

Pour avoir l'équation de la section faite dans l'ellipsoïde, rapportée à des axes pris dans le plan sécant, je fais usage des formules de transformation suivantes :

$$z = y'\sin\theta, \quad y = x'\sin\psi - y'\cos\theta\cos\psi, \quad x = x'\cos\psi + y'\cos\theta\sin\psi.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (1), donnent pour l'équation de cette section :

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{-b^2}\right) + 2x'y'\sin\psi\cos\psi\cos\theta\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$
$$+ y'^2\left(\frac{\sin^2\psi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\psi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right) = 1.$$

3. Pour avoir l'aire de la section, je compare cette dernière équation avec (1) ; je substitue dans (2) les valeurs de M, P, N, déduites de cette comparaison, et je trouve ainsi, toute réduction faite :

$$h^4 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2\sin^2\theta\sin^2\psi + b^2\sin^2\theta\cos^2\psi + c^2\cos^2\theta}. \qquad (6)$$

Telle est la relation constante qui doit exister en θ et ψ, pour que la section ait une aire constante égale à ϖh^2.

On peut exprimer cette relation au moyen des coefficients α, 6 de l'équation du plan sécant. Il suffit de remplacer les lignes trigonométriques de θ et ψ par leurs valeurs tirées des équations (5) ; il vient alors

$$h^4 = \frac{a^2b^2c^2(\alpha^2 + 6^2 + 1)}{a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2}. \qquad (7)$$

4. Les équations de la normale au plan sécant menée par le centre de l'ellipsoïde, sont :

$$x = -\alpha z, \quad y = -\beta z. \qquad (8)$$

Si on substitue les valeurs de α, β, tirées de ces équations dans la relation (7), on trouve

$$x^2\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{b^2c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{a^2b^2}\right)=0, \quad (9)$$

équation du lieu cherché. C'est un cône du deuxième degré dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipsoïde.

La discussion de cette équation est facile.

Si on suppose $a > b > c$,

on reconnaît que l'on ne peut poser $h^2 > ab$ ou $h^2 < bc$; d'où l'on conclut que les sections maximum ou minimum sont perpendiculaires au petit axe ou grand axe. On aurait pu d'ailleurs trouver ce résultat en cherchant les valeurs de α et β qui rendent maximum ou minimum la valeur de h^2.

On reconnaît ensuite que : 1° si $h^2 = ab$, le cône se réduit à l'axe des z ; 2° si $h^2 = bc$, le cône se réduit à l'axe des x ; 3° si $h^2 = ac$, le cône se réduit à deux plans passant par l'axe moyen, leurs traces sur le plan des zx font, avec l'axe des z, des angles dont la tangente trigonométrique est donnée par la relation

$$\theta = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{(h^2-ab)(h^2+ab)}{(h^2-bc)(h^2+bc)}}.$$

4° Si h^2 est compris entre ab et ac, le cône elliptique a pour axe transverse l'axe des z.

5° Si h^2 est compris entre ac et bc, le cône a pour axe transverse l'axe des x.

6° Enfin, il est facile de voir que ce cône serait de révolution, si l'ellipsoïde était lui-même de révolution, aplati ou allongé.

II.

THÉORÈME. *Chaque plan tangent à l'ellipsoïde, parallèle à l'un des plans diamétraux qui forment une section d'aire constante, est situé à une distance constante du centre de l'ellipsoïde.*

L'équation du plan tangent est, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point de contact :

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1. \qquad (10)$$

Pour exprimer que ce plan est parallèle au plan dont l'équation est $z=\alpha x+\beta y$, il faut poser :

$$\alpha=-\frac{c^2x'}{a^2y'},\quad \beta=-\frac{c^2y'}{b^2x'}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), donnent, en observant que les coordonnées x', y', z', sastisfont à l'équation de l'ellipsoïde :

$$h^4=a^2b^2c^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}\right).$$

Or, si l'on désigne par δ la distance du centre au plan tangent en $x'\,y'\,z'$, on a la relation

$$\frac{1}{\delta^2}=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}. \qquad (11)$$

Donc, enfin : $$\delta^2=\frac{a^2b^2c^2}{h^4}. \qquad (12)$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

6. Il résulte de cette proposition que le cône décrit par les perpendiculaires abaissées du centre, sur les plans tangents équidistants de ce centre, doit être identique avec celui que nous avons déjà trouvé. C'est, en effet, ce qu'il est facile de vérifier, en cherchant directement le lieu des perpendicu-

laires abaissées sur ces plans tangents équidistants du centre. On trouve ainsi l'équation :

$$x^2(a^2-\delta^2)+y^2(b^2-\delta^2)+z^2(c^2-\delta^2)=0, \qquad (13)$$

et il est facile de faire voir, en se servant de la relation (12), que cette équation (13) est identique avec l'équation (9).

7. On conclut encore de là, que les plans tangents parallèles aux sections d'aire constante, sont tangents à une sphère concentrique à l'ellipsoïde et de rayon δ. Ces plans touchent la sphère en une suite de points donnés par l'intersection de cette surface avec celle du cône trouvé. Les équations de cette intersection seront donc :

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=\delta^2 \\ x^2(a^2-\delta^2)+y^2(b^2-\delta^2)+z^2(c^2-\delta^2)=0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

En éliminant successivement x^2, y^2, z^2 on trouve pour les équations des projections sur les trois plans coordonnés :

$$\left.\begin{array}{l} y^2(a^2-b^2)+z^2(a^2-c^2)=\delta^2(a^2-\delta^2) \\ z^2(b^2-c^2)+x^2(a^2-b^2)=\delta^2(b^2-\delta^2) \\ x^2(a^2-c^2)+y^2(b^2-c^2)=\delta^2(\delta^2-c^2) \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Ces équations nous apprennent que les projections sur les deux plans perpendiculaires au grand et au petit axe sont des ellipses, et que la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe moyen est une hyperbole dont l'axe transverse est dirigé suivant le grand ou le petit axe selon que δ est plus petit, ou plus grand que l'axe moyen.

III.

8. Je me proposerai encore de trouver l'équation de la surface, lieu des rayons menés du centre aux points de contact des plans tangents à l'ellipsoïde, satisfaisant aux conditions précédentes.

Les équations d'un de ces rayons seront : $y=\frac{y'}{z'}z$; $x=\frac{x'}{z'}z$.
Ces équations, jointes à la relation exprimant que le point $(x', y', z',)$ est situé sur l'ellipsoïde, permettent de déterminer pour x', y', z', des valeurs qui, substituées dans la relation (11), conduisent à

$$x^2\frac{\delta^2-a^2}{a^4}+y^2\frac{\delta^2-b^2}{b^4}+z^2\frac{\delta^2-c^2}{c^4}=0. \tag{16}$$

La surface est un cône qui a même axe transverse que le précédent. Si l'on cherche les projections de l'intersection de ce cône avec la sphère de rayon δ, on trouvera des résultats tout à fait analogues à ceux qui ont été trouvés n° 7.

Il en serait encore de même si l'on cherchait les projections de l'intersection du cône avec l'ellipsoïde.

9. Enfin, si l'on cherche le lieu des intersections successives des plans diamétraux qui font une section d'aire constante, on trouve encore un cône du 2e degré. Pour trouver ce lieu, on élimine, entre les équations (4) et (7), β, par exemple; puis, entre l'équation résultante (renfermant $x, y, z, \alpha,$) et sa dérivée par rapport à α, on élimine ce dernier coefficient. On arrive ainsi à l'équation cherchée,

$$x^2.\frac{1}{\delta^2-a^2}+y^2\frac{1}{\delta^2-b^2}+z^2\frac{1}{\delta^2-c^2}=0. \tag{17}$$

On peut donc considérer le plan sécant mobile comme roulant autour de ce cône, en lui restant toujours tangent. Ce dernier cône et le premier que nous avons trouvé, ont entre eux cette relation remarquable, que les génératrices de l'un sont perpendiculaires aux plans tangents à l'autre, et réciproquement. Cela résulte de la définition même qui nous a conduit à trouver ces surfaces. Mais cette conséquence peut aussi être mise facilement en évidence par un calcul direct, si l'on observe que, dans les équations (13) et (17), les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont réciproques l'un de l'autre.

N. B. Les propriétés que nous venons d'examiner deviennent bien plus intéressantes qu'un simple calcul, lorsqu'on sait que l'emploi de ces mêmes propriétés, considérées dans l'ellipsoïde central d'un corps, mobile autour d'un point fixe, a permis à M. *Poinsot* de donner une image si claire et si nette du mouvement de ce corps.