NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Des normales aux courbes du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 72-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__72_0>

DES

NORMALES AUX COURBES DU SECOND ORDRE (*).

—

5. La courbe GHG'H', représentée par l'équation $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$, a la forme indiquée (*fig.* 19). Lorsque $c > b$, elle coupe l'ellipse en quatre points. La tangente PD menée à cette courbe, en un point P dont les coordonnées sont x, y, fait avec l'axe des abscisses un angle PDX qui a pour tangente trigonométrique $-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$. C'est ce que l'on trouve facilement au moyen des méthodes ordinaires.

Si d'un point quelconque M, on veut mener une tangente MP à la courbe GH, on aura, en nommant α, β, les coordonnées de M, et x, y, les coordonnées inconnues du point de tangence P :

$$\sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4}, \qquad (1)$$

$$\beta - y = -\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}} \cdot (\alpha - x). \qquad (2)$$

L'équation (2) donne successivement :

$$\beta\sqrt[3]{b^2x} - y\sqrt[3]{b^2x} = -\alpha\sqrt[3]{a^2y} + x\sqrt[3]{a^2y},$$

$$x\sqrt[3]{a^2y} + y\sqrt[3]{b^2x} - \beta\sqrt[3]{b^2x} - \alpha\sqrt[3]{a^2y} = 0,$$

$$\sqrt[3]{xy}\left[\sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{b^2y^2}\right] - \beta\sqrt[3]{b^2x} - \alpha\sqrt[3]{a^2y} = 0,$$

(*) Pour la première partie de cette note, *voyez* pages 17-23, tome II.

d'où

$$\sqrt{c^4xy} - \beta\sqrt[3]{b^2x} - \alpha\sqrt[3]{a^2y} = 0. \qquad (3)$$

Si maintenant on pose $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$, les équations (1) et (3) deviendront :

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \qquad (4)$$

$$c^2x'y' + \beta b^2x' - \alpha a^2y' = 0. \qquad (5)$$

Or, les équations (4) et (5) sont précisément celles qu'il faut résoudre pour mener du point M une normale à l'ellipse lorsqu'on désigne par x', y', les coordonnées du point R auquel la normale rencontre l'ellipse. Ainsi, les coordonnées des points P et R, sont liées entre elles par les relations $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$. On en déduit $\frac{y}{x} = \frac{-a^4y'^3}{b^4x'^3}$; et par suite $-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}} = \frac{a^2y'}{b^2x'}$. Mais, la quantité $-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$, est la tangente de l'angle PDX, que la tangente PD forme avec l'axe des abscisses. D'ailleurs $\frac{a^2y'}{b^2x'}$ est la tangente de l'angle de la normale RM à l'ellipse et de l'axe des abscisses. Par conséquent, les droites MP, MR coïncident, c'est-à-dire que *les tangentes menées à la courbe,* $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$, *sont normales à l'ellipse* $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. *Et réciproquement.*

Les relations $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$, montrent que les points P et R, sont toujours situés d'un même côté de l'axe des y, et de différents côtés de l'axe des x. Lorsque le point R se trouve sur l'arc AB′ de l'ellipse, le point P appartient à la branche HG de l'autre courbe.

D'après cela, il est facile de voir comment sont dirigées les normales menées à l'ellipse par un point M du plan de cette courbe. Si l'on suppose que le point M est comme l'indique la figure 19, intérieur à la courbe $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}$, on pourra mener de ce point quatre normales à l'ellipse. Le point M étant, de plus, situé dans l'angle YOX, deux de ces normales seront tangentes à la branche HG. La troisième touchera la branche G'H, et la quatrième sera tangente à GH'. Par conséquent, les deux premières sont normales à l'ellipse en des points de l'arc AB'. La troisième, en un point situé sur l'arc A'B'; et la quatrième en un point de l'arc AB. Ces quatre points sont les intersections de l'ellipse et de l'hyperbole $c^2xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$.

Lorsque les coordonnées α, β, satisferont à l'équation $\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$; le point donné appartiendra à la courbe GHG'H'. S'il est situé, comme le point P, sur la branche GH, les deux tangentes à cette branche de la courbe coïncideront; et il en sera de même des normales à l'arc AB' de l'ellipse. Dans ce cas, il y aura seulement trois normales. L'hyperbole $c^2xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$, sera tangente à l'ellipse au point R.

Enfin, si l'on suppose que le point donné devienne extérieur à la courbe GHG'H', et soit, par exemple, en M' dans l'angle YOX; le nombre des normales se réduit à deux. Ces droites sont tangentes aux branches G'H, GH'. Les points auxquels elles seront normales à l'ellipse appartiendront: l'un d'eux à l'arc A'B', et l'autre à l'arc AB. Et alors, l'hyperbole $c^2xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$, coupe l'ellipse en ces deux points seulement.

6. Pour démontrer encore une autre propriété remarquable de la courbe dont l'équation est $\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, nous rappellerons ici une proposition relative aux différents cercles tangents à une ellipse en un même point.

Soit la droite RM normale à l'ellipse au point R (*fig.* 20). Supposons que, du point M pris sur cette droite, comme centre, on décrive une circonférence tangente à l'ellipse au point R, et qui coupe l'ellipse en deux autres points C, D. *La corde d'intersection* CD *conservera la même direction, quel que soit le point* M *sur la normale.* C'est à-dire que *les différentes cordes d'intersection obtenues, en changeant la position du centre* M*, sur la normale, seront parallèles entre elles.*

En effet, menez au point R une tangente GRS à l'ellipse (*fig.* 20), et prolongez la corde CD jusqu'à la rencontre de GRS, au point G. La circonférence passant par les trois points C, D, R, et qui a son centre au point M, étant supposée tangente à GS, en R; on aura $\overline{GR}^2 = GC \times GD$. Si, maintenant, on mène par le centre O de l'ellipse, les diamètres L'OL, H'OH, respectivement parallèles aux droites GRS, GDC, on aura encore d'après un principe connu: $\frac{\overline{GR}^2}{GC \times GD} = \frac{OL \times OL'}{OH \times OH'} = \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OH}^2}$. Donc OH = OL. Ainsi, le diamètre H'OH formera avec le grand axe A'A de l'ellipse, un angle H'OX, supplémentaire de l'angle LOX que le diamètre LOL' fait avec le même axe. Et par conséquent, quelle que soit la position du point M, sur la normale, l'angle que la corde CD fait avec l'axe OX, est toujours supplémentaire de l'angle GSX, formé par la tangente au point R avec l'axe OX.

Réciproquement, si l'on inscrit dans l'ellipse une droite CD parallèle au diamètre H'OH qui est égal à L'OL. La circonférence passant par les points C, D, R, sera tangente à la droite GRS au point R. Car, l'égalité $\frac{\overline{GR}^2}{GC \times GD} = \frac{OL \times OL'}{OH \times OH'}$, donnera $\overline{GR}^2 = GC \times GD$. C'est la proposition que nous voulions d'abord établir.

Cela posé, nous pouvons concevoir que la corde CD, restant parallèle au diamètre H'OH, s'approche de plus en plus du point de tangence R. Les circonférences qui passent par les points C, D, R, restent tangentes à l'ellipse au point R, et coupent cette courbe en deux autres points D, C; l'un d'eux, D, se rapproche continuellement du point de tangence R. Enfin, lorsque la corde CD, passe par le point R, un des points d'intersection, D, se confond avec le point de tangence R, et le second point C coïncide avec l'extrémité E de la corde RE, parallèle à H'OH. Alors, la circonférence est considérée comme ayant avec l'ellipse trois points communs qui se confondent en un seul, R; le quatrième point qui appartient à la fois à ces deux courbes, se trouve à l'extrémité E, de la corde RE parallèle au diamètre HOH'. Dans ce cas particulier, on dit que le cercle est *osculateur* à l'ellipse, *au point* R. Pour déterminer le centre P, de ce cercle il suffira d'élever une perpendiculaire QP, sur le milieu de la corde RE, et de prolonger cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la normale RM. Nous allons faire voir que le point P, ainsi obtenu, appartient à la courbe dont l'équation est

$$\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}.$$

Je nommerai x', y', les coordonnées du point R. La tangente RS à l'ellipse, fait avec l'axe OX, un angle dont la tangente trigonométrique a pour expression $\frac{-b^2x'}{a^2y'}$. La corde RE fait avec l'axe OX un angle dont la tangente est $\frac{b^2x'}{a^2y'}$; car les angles que les droites RS, RE forment avec l'axe OX sont supplémentaires. Ainsi, l'équation de la droite

RE est $y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x')$. L'équation de l'ellipse à laquelle le point R appartient, peut être mise sous la forme $a^2(y^2-y'^2)+b^2(x^2-x'^2)=0$, ou $\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{-b^2.(x+x')}{a^2(y+y')}$.
Les coordonnées du point E devront satisfaire à la fois aux équations $\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{b^2x'}{a^2y'}$, et $\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{-b^2(x+x')}{a^2(y+y')}$. On en déduit immédiatement $\frac{x+x'}{y+y'}=-\frac{x'}{y'}$. La résolution des deux équations du premier degré

$$\frac{x+x'}{y+y'}=-\frac{x'}{y'},\quad y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'),$$

donne pour les coordonnées du point E :

$$x=\frac{4x'^3}{a^2}-3x',\quad y=\frac{4y'^3}{b^2}-3y'.$$

Les coordonnées du point Q, milieu de RE, seront donc :

$$x=\frac{2x'^3}{a^2}-x',\quad y=\frac{2y'^3}{b^2}-y'.$$

L'équation de la droite QP, perpendiculaire sur le milieu de RE, est

$$a^2y'x+b^2x'y=y'x'(2y'^2+2x'^2-a^2-b^2).$$

La normale RM a pour équation

$$a^2y'x-b^2x'y=c^2x'y'.$$

Ajoutant membre à membre ces deux équations, on trouv
$2a^2y'x=y'x'[2x'^2+2y'^2-2b^2]$, d'où $x=\frac{(x'^2+y'^2-b^2)x'}{a^2}$.
Mais de l'équation $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, on tire

$$y'^2-b^2=-\frac{b^2x'^2}{a^2}\ ;\ \text{donc}\ x=\frac{\left(x'^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2\right)x'}{a^2}=\frac{c^2x'^3}{a^4}.$$

En substituant à x, la valeur $\frac{c^2x'^3}{a^4}$, dans l'équation $a^2y'x-b^2x'y=c^2x'y'$, on trouve $y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}$. Ainsi les coordonnées du centre P, du cercle osculateur, sont

$$x=\frac{c^2x'^3}{a^4},\quad y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}.$$

L'élimination de x', y', entre les trois équations $x=\frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}$, $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, donne :

$$\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}.$$

On voit donc que le lieu géométrique des centres des cercles *osculateurs* à l'ellipse, est celui des points par lesquels on peut mener précisément trois normales à cette courbe.

Il est facile d'exprimer, en fonction des coordonnées du point R, la longueur de la droite RP, qu'on appelle le *rayon de courbure* de l'ellipse au point R. En effet, on a

$$\overline{\mathrm{RP}}^2=(y-y')^2+(x-x')^2=(x-x')^2\left[\frac{(y-y')^2}{(x-x')^2}+1\right].$$

Mais $x-x'=\frac{c^2x'^3}{a^4}-x'=x'\left(\frac{c^2x'^2-a^4}{a^4}\right)$. D'ailleurs, puisque le point P est sur la normale RM, $\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{a^2y'}{b^2x'}$; donc

$$\overline{\mathrm{RP}}^2=x'^2\left(\frac{c^2x'^2-a^4}{a^4}\right)^2\left(\frac{a^4y'^2}{b^4x'^2}+1\right)$$
$$=\frac{x'^2(c^2x'^2-a^4)^2(a^4-c^2x'^2)}{a^8b^2x'^2}=\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}.$$

L'égalité $\overline{\mathrm{RP}}^2=\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}$, montre que le rayon de courbure diminue, lorsque x' augmente depuis zéro jusqu'à

la valeur a. Si l'on suppose $x'=0$, il viendra $\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}=\frac{a^4}{b^2}$.
Le centre du cercle osculateur est alors au point H (*fig.* 19), le rayon de ce cercle est HB'. Par conséquent $\overline{HB'}^2=\frac{a^4}{b^2}$; d'où $HB'=\frac{a^2}{b}$.

Si $x'=a$, on aura $\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}=\frac{(a^2-c^2)^3}{a^2b^2}=\frac{b^4}{a^2}$. Dans ce cas, le point R est en A; et le point P en G (*fig.* 19). Ainsi $\overline{GA}^2=\frac{b^4}{a^2}$. Ou, $GA=\frac{b^2}{a}$.

Les rayons de courbure HB', GA, aux sommets B', A de l'ellipse sont en raison inverse des cubes des axes B'B, AA', menés par ces points ; car les égalités $HB'=\frac{a^2}{b}$, $GA=\frac{b^2}{a}$, donnent $\frac{HB'}{GA}=\frac{a^3}{b^3}$.

Les distances OG, OH (*fig.* 19), ayant respectivement pour valeurs $\frac{c^2}{a}$, $\frac{c^2}{b}$, l'équation de la droite HG, est $by+ax=c^2$. Cette équation est satisfaite lorsqu'on y remplace y et x, par $-b$ et $+a$. Donc, la droite HG passe par *un des sommets*, N, *du rectangle construit sur les axes de l'ellipse*. De plus, le coefficient angulaire de la droite HG est $\frac{-a}{b}$; celui de la corde AB' est $\frac{b}{a}$: la droite HG est donc perpendiculaire sur B'A. D'où l'on conclura que pour obtenir les centres des cercles osculateurs aux sommets B', A, de l'ellipse, il suffit d'abaisser du point N, une perpendiculaire sur la corde B'A, et de prolonger cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle coupe les axes de l'ellipse. Les points G, H, d'intersection seront les centres cherchés. G.

(*La fin prochainement*).