Nouvelles annales de mathématiques

Jacob

Questions d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 63-65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__63_1>

QUESTIONS D'EXAMEN.

PAR M. JACOB,

Capitaine d'artillerie.

I. « Comment faut-il placer un triangle par rapport à un » axe qui passe dans son plan par son sommet, pour que le » volume engendré par la révolution de ce triangle soit égal » à celui d'une sphère donnée? »

Soient b et h, les dimensions du triangle (*fig.* 3 *bis*); AG, la distance du centre de gravité au sommet A : du point G j'abaisse sur l'axe une perpendiculaire $\mathrm{GK} = \mathrm{AG} \sin \alpha$.

Le volume V engendré par le triangle est égal à sa surface multipliée par la circonférence qui décrit le centre de gravité :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\, bh \times 2\pi \mathrm{GK}\,;$$

et puisque ce volume doit être égal à celui d'une sphère d'un rayon donné a

$$\frac{1}{2}\, bh.\, 2\pi.\, \mathrm{GK} = \frac{4}{3}\, \pi a^3,$$

d'où

$$\mathrm{GK} = \frac{4a^3}{3bh}.$$

Dès lors, pour placer le triangle, j'élève sur AB une perpendiculaire CH$=$GK qui est connu. Par le point H, je mène une parallèle à AB. Du point A comme centre avec AG comme rayon, je décris un arc de cercle qui coupe cette parallèle en G, et le point G est la position du centre de gravité qui satisfait au problème.

On peut voir quand le volume sera un maximum, car

$$V = \frac{1}{2} bh . 2\pi GK = \pi . b . h AG \sin \alpha.$$

Le volume croît avec $\sin \alpha$; il sera donc maximum quand $\sin \alpha = 1$, ou quand la droite AG sera perpendiculaire à AB. Le problème ne sera donc plus possible quand

$$\frac{4}{3} \pi a^3 > \pi bh . AG,$$

quand

$$AG < \frac{4a^3}{3bh}.$$

Observation 1. L'arc de cercle coupe la parallèle HG en deux points; le triangle a donc, généralement parlant, deux positions qui satisfont au problème; et toutes les fois qu'un problème a un nombre pair de solutions, il peut y avoir des cas d'impossibilité.

2. Le même genre de solution s'applique à un polygone tournant, lors même que l'axe de rotation n'est pas dans le plan du polygone.

II. « Lieu des points de rencontre des normales à la para- » bole se coupant à angle droit. »

L'équation de la parabole est $y^2 = 2px$ (1).

Soient

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ (2); \ y - y'' = -\frac{y''}{p}(x - x'') \ (3)$$

les équations de deux normales. Pour que ces normales se coupent à angle droit, il faut que l'on ait la relation

$$\frac{y'y''}{p^2} = -1 \ (4).$$

Mais on a aussi

$$y'^2 = 2px' \ (5) \qquad y''^2 = 2px'' \ (6)$$

ces deux dernières relations exprimant que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur la courbe. Si maintenant on se sert des relations (2) (3) (4) (5) (6) pour éliminer $x'y'$, $x''y''$, il nous restera une relation en x et y, ce sera l'équation du lieu.

De (5) on tire $x' = \frac{y'^2}{2p}$, je reporte cette valeur dans (2);

$$y - y' = -\frac{y'}{p}\left(x - \frac{y'^2}{2p}\right) \text{ ou } y'^3 + y'(2p^2 - 2px) - 2p^2y = 0. \ (7)$$

Éliminons de même x'' entre (3) et (6), il vient

$$y''^3 + y''(2p^2 - 2px) - 2p^2y = 0. \ (8)$$

Cette équation étant identique avec (7), on en conclut que y' et y'' sont les racines d'une même équation. Or, dans (7), le produit des trois racines est égal au coefficient du dernier terme pris en signe contraire. Si donc nous divisons ce coefficient par le produit des deux racines y' et y'', produit qui nous est donné par la relation (4), on aura la troisième racine qui est $-2y$.

Remplaçons donc dans (7) l'inconnue y' par cette valeur ; l'équation sera satisfaite, d'où

$$8y^3 + 2y(2p^2 - 2px) + 2p^2y = 0,$$
$$4y^2 + 3p^2 - 2px = 0,$$
$$y^2 = \frac{1}{2}px - \frac{3}{4}p^2.$$

C'est l'équation d'une parabole rapportée à son axe principal. Pour la construire, il suffit de changer x en $x + \frac{3p}{2}$; l'équation du lieu rapporté aux nouveaux axes sera $y^2 = \frac{1}{2}px$. Cette parabole se construit aisément.

La suite prochainement.