NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUGUSTE BLUM

Note sur une construction mécanique des trois coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 60-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__60_1>

NOTE

SUR UNE

CONSTRUCTION MÉCANIQUE DES TROIS CONIQUES,

PAR M. BLUM (AUGUSTE),
Professeur de mathématiques.

Tout ce qui peut montrer l'analogie entre les trois courbes du second degré est utile à faire connaître ; aussi n'a-t-on pas manqué de faire voir fréquemment qu'une parabole est, ou bien une ellipse dont le grand axe est infini, ou bien une hyperbole dont l'axe transverse est infini. Une remarque consignée dans tous les traités sur les sections coniques, m'a fait rencontrer un moyen de montrer l'identité de trois courbes par une construction mécanique.

Si je cherche le lieu des points également distants d'un point fixe et d'une circonférence donnée, je trouve l'ellipse ou l'hyperbole, suivant que le point donné est intérieur au cercle ou extérieur ; on retrouve, en effet, cette condition que la somme des distances d'un point particulier du lieu au point donné et au centre du cercle, est égale à une constante qui est le rayon du cercle, ou bien que la différence de ces distances est égale au rayon du cercle donné. Si la circonférence donnée a un rayon infini, on trouve la parabole. Ainsi, je puis dire qu'une section du cône est le lieu des points également distants d'un point et d'une circonférence. Tout cela est connu depuis longtemps, mais ce qui me semble nouveau, ou du moins inédit jusqu'ici, c'est une conséquence simple qu'on peut en déduire pour la construction mécanique de l'ellipse et de l'hyperbole d'un mouvement continu.

On sait que la parabole peut être construite au moyen d'une équerre qu'on fait *diriger* dans son mouvement, par une droite qui est la *directrice*, l'extrémité d'un fil étant attachée au foyer, et un style tendant ce fil dont l'autre extrémité est attachée à un point du côté de l'équerre perpendiculaire à la directrice. C'est de là assurément que le nom de directrice est venu à la droite, ainsi nommée pour la parabole. Maintenant pour l'ellipse (*fig.* 4), soit F'A, le rayon d'un cercle enlevé dans une planche ; soit PQR, une équerre mixtiligne dont l'arc QR est de même rayon que celui du cercle donné. Si j'attache un fil au point F que je tendrai, après l'avoir placé de manière que le point M soit également distant de Q et de F, qu'ensuite l'autre extrémité du fil soit attachée au point P; en faisant mouvoir l'équerre de manière qu'elle s'appuie sur la circonférence, le fil étant toujours tendu, il est évident que le style placé au point variable M décrira l'ellipse.

Pour l'hyperbole (*fig.* 17), même construction et même remarque, l'équerre est mixtiligne concave, tandis que dans le premier cas elle est mixtiligne convexe.

On justifie par ces constructions les dénominations de directrices circulaires qui ont été données aux circonférences décrites d'un foyer comme centre, avec le grand axe ou l'axe transverse pour rayon.

La fig. 18 donne la relation qui existe entre une ellipse, une parabole et une hyperbole qui ont même sommet et même foyer. Pour passer de l'ellipse à l'hyperbole, il faut passer d'un rayon positif à un rayon négatif, et en construisant les trois courbes avec leurs trois directrices, on voit que la parabole, est une sorte de moyenne entre l'ellipse et l'hyperbole pour les parties voisines du sommet, c'est-à-dire, pour la première moitié de l'ellipse.

En déplaçant le foyer F (*fig.* 4), on peut obtenir toutes les ellipses, ayant même grand axe depuis une ligne droite jusqu'au cercle ; ainsi, avec une seule directrice circulaire et une seule équerre mixtiligne, on peut construire une ellipse semblable à toute ellipse donnée.

Cette construction mécanique me semble prouver qu'on ne peut pas dire qu'une parabole a deux centres, et même elle fait voir qu'elle n'en a point, puisqu'il faut que le rayon du cercle directeur devienne infini pour que l'ellipse devienne une parabole.

Il y aurait d'autres remarques à faire, mais nous dépasserions alors les limites d'une simple note.

Observation. Un sommet et le foyer voisin d'une ellipse ou d'une hyperbole restant fixes, et le centre s'éloignant, la parabole est une limite commune à l'ellipse se dilatant, à l'hyperbole se rétrécissant ; c'est dans ce sens qu'on dit, légitimement, que la parabole a un centre à l'infini, soit positif, soit négatif ; locution abrégée dont la science offre une foule d'exemples. Prises dans un sens complet, sans faire attention aux idées sous-entendues, ces locutions tournent facilement à l'absurde ; c'est ainsi qu'on sait que lorsque les n premiers coefficients d'une équation s'approchent de zéro, autant de racines grandissent. On exprime ce fait en disant que lorsque n coefficients deviennent nuls, n racines deviennent infinies. Or, une équation du premier degré peut être considérée comme une équation du millième degré, dont les 999 premiers termes se sont évanouis ; donc toute équation du premier degré a mille racines, dont une racine finie et 999 infinies. Conclusion extravagante, tirée d'une locution juste.

Tm.