A. VACHETTE

Solutions des problèmes 27 (p. 247), 15 et 18 (p. 351), 38 (p. 395), t. Ier

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 508-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__508_0>

SOLUTIONS DES PROBLÈMES 27 (p. 247), 15 et 18 (p. 351), 38 (p. 395), t. Ier.

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences.

Problème 27.

Soit la première équation $f(x)=0$ du degré m,
la deuxième $\varphi(y)=0$ du degré n,
l'équation cherchée $\psi(\zeta)=0$ sera du degré mn.

Désignons par S les sommes de $f(x)$, S' celles de $\varphi(y)$, S'' celles de $\psi(\zeta)$.

Cherchons généralement S''_{2p} et S''_{2p+1}

$$S''_{2p}=(y-x)^{2p}+\ldots=mn(S'_{2p}+S_{2p})-$$
$$-\frac{2p}{1}\Sigma(y^{2p-1}x+yx^{2p-1})+\frac{2p(2p-1)}{1\,.\,2}\Sigma(y^{2p-2}x^2+y^2x^{2p-2})-$$
$$-\ldots\pm\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1\,.\,2\,.\quad p}\Sigma\, x^py^p.$$

On a $\pm$ suivant que p est pair ou impair

$$S''_{2p+1}=(y-x)^{2p+1}+\ldots=mn(S'_{2p+1}+S_{2p+1})-$$
$$-\frac{2p+1}{1}\Sigma(y^{2p}x-yx^{2p})+\frac{(2p+1)2p}{1\,.\,2}\Sigma(y^{2p-1}x^2-y^2x^{2p-1})-$$
$$-\ldots\frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1\,.\,2\,.\quad p}\Sigma\,(y^px-yx^p).$$

On a $\pm$ suivant que p est pair ou impair,

ou remarquant que $\Sigma(y^kx^{k'}+y^{k'}x^k)=mn(S'_kS_{k'}+S'_{k'}S_k)$, on aura

$$S''_{2p} = mn \left\{ (S_{2p} + S'_{2p}) - \frac{2p}{1} (S'_{2p-1} S_1 + S'_1 S_{2p-1}) + \right.$$

$$+ \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} (S'_{2p-2}S_2 + S'_2S_{2p-2}) -$$

$$\left. - \ldots \pm \frac{2p(2p-1)..(p+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot p} S'_pS_p \right\}$$

$$S''_{2p+1} = mn \left\{ (S'_{2p+1} - S_{2p+1}) - \frac{2p+1}{1} (S'_{2p} S^1 - S'_1S_{2p}) + \right.$$

$$+ \frac{(2p+1)2p}{1 \cdot 2} (S'_{2p-1}S_2 - S'_2S_{2p-1}) -$$

$$\left. - \ldots \pm \frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1 \cdot 2 \ldots p} (S'_{p+1}S_p - S'_pS_{p+1}) \right\}$$

Problème 15.

Appliquons à $\begin{array}{ll} f(x) = x^2 - px + q & m = 2 \\ \varphi(y) = y^3 - ay^2 + by - c & n = 3 \end{array}$

le degré de $\psi(\zeta)$ sera 6

$S''_1 = 6 (S'_1 - S_1)$

$S''_2 = 6 \{(S'_2 + S_2) - 2S'_1S_1\}$

$S''_3 = 6 \{(S'_3 - S_3) - 3(S'_2S_1 - S'_1S_2)\}$

$S''_4 = 6 \{(S'_4 + S_4) - 4(S'_3S_1 + S'_1S_3) + 6S'_2S_2\}$

$S''_5 = 6 \{(S'_5 - S_5) - 5(S'_4S_1 - S'_4S_4) + 10 (S'_3S_2 - S'_2S_3)\}$

$S''_6 = 6 \{(S'_6 + S_6) - 6(S'_5S_1 + S'_1S_5) + 15(S'_4S_2 + S'_2S_4) -$

$- 40S'_3S_3\}$

Si $f(x) = 0$ et $\varphi(y) = 0$ ont K racines communes, l'équation $\psi\zeta = 0$ a K racines nulles; on a donc ainsi un moyen de trouver le degré du plus grand commun diviseur entre deux polynômes d'une lettre, à coefficients numériques.

Problème 18.

Proposons-nous de chercher les sommes, deux à deux, des racines de la première avec celles de la deuxième ; on aura

$$S''_{2p} = mn \left\{ (S_{2p} + S'_{2p}) + \frac{2p}{1}(S_{2p-1}S'_1 + S'_{2p-1}S_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{2p(2p-1)}{1\ .\ 2}(S_{2p-2}S'_2 + S'_{2p-2}S^2) + \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ p} S_p S'_p \right\}$$

$$S''_{2p+1} = mn \left\{ \left(S_{2p+1} + S'_{2p+1}) + \frac{2p+1}{1} \right) S_{2p}S'_1 + S'_{2p}S_1) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1\ .\ 2\ .\ p}(S_{p+1}S'_p + S'_{p+1}S_p) \right\}$$

Solution du problème 38 (p. 395).

L'équation

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^{n-3} - \text{etc.} - a^n = 0$$

revient à

$$x^n = (x+a)^n - x^n,$$

ou

$$2x^n = (x+a)^n,$$

extrayant les racines n^{iemes} on aura

$$x\sqrt[n]{2} = x + a \qquad x = \frac{a}{\sqrt[n]{2} - 1}$$

mais $\sqrt[n]{2}$ a n valeurs que l'on obtient en multipliant $\sqrt[n]{2}$ prise arithmétiquement par les n racines $n^{ièmes}$ de 1, donc les n valeurs de 2 seront

$$x = \frac{a}{\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{u\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{u\pi}{n}\right) - 1},$$

u ayant les valeurs 0, 1, 2,....(n—1