NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. A. LE COINTE

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 505-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__505_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTION D'EXAMEN,

PAR M. L. A LE COINTE.

Théorème. Démontrer que la ligne qui passe par les milieux des cordes concourantes à l'origine, et appartenant à la courbe ayant pour équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

cette courbe est supposée rapportée à des axes rectangulaires, et $F\left(\frac{y}{x}\right)$ est une fonction d'un degré quelconque en $\frac{y}{x}$ est un cercle dont le centre est sur l'axe des x, a une distance de l'origine égale à $\frac{a}{2}$, et qui est tangent à l'axe des y.

Soit $y = mx$ l'équation d'une des cordes concourantes à l'origine, si nous remplaçons dans l'équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

* Cette belle solution renferme la théorie des caustiques. Tm.

y par mx, nous aurons l'équation

$$(m^2+1)\,x^2 - 2ax + \mathrm{F}\,(m) = 0, \qquad (1)$$

qui est simplement du second degré en x; mais cette équation nous donnant les abscisses des points de rencontre de la corde $y = mx$ avec la courbe, il en résulte que toute droite concourante à l'origine ne rencontre la courbe dont l'équation est $y^2 + x^2 - 2ax + \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, qu'en deux points.

Désignons par x' l'une des racines de l'équation (1), ou l'abscisse de l'un des points de rencontre de la corde $y = mx$ avec la courbe, et par x'' l'autre racine, ou l'abscisse du second point d'intersection de la même corde avec la courbe; alors, les coordonnées du premier point d'intersection, seront : x' pour l'abscisse, mx' pour l'ordonnée, et celles du second seront : x'' pour l'abscisse, mx'' pour l'ordonnée.

Cela posé, désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point milieu de la corde dont l'équation est $y = mx$, on aura

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2},$$

mais d'après l'équation (1), on a

$$x' + x'' = \frac{2a}{m^2+1}, \text{ par conséquent } x_1 = \frac{a}{m^2+1};$$

$$\text{on a ensuite } y_1 = mx_1 = \frac{ma}{m^2+1},$$

de la valeur d'x_1, on déduit $m = \pm\sqrt{\frac{a - x_1}{x_1}}$,

et substituant cette valeur de m dans celle de y_1, on aura

$$y_1 = \pm\sqrt{(a - x_1)\,x_1}, \text{ d'où } y_1^2 + x_1^2 = ax_1,$$

telle est l'équation qui représente le lieu géométrique des points milieux des cordes concourantes à l'origine.

On voit de suite que ce lieu géométrique est un cercle passant par l'origine, et ensuite en remarquant que l'équation $y_1^2 + x_1^2 = ax_1$ peut se mettre sous la forme

$$y_1^2 + \left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

on reconnaît immédiatement que ce cercle a son centre sur l'axe des x, que son rayon est égal à $\frac{a}{2}$, et qu'il est tangent à l'axe des y en vertu de ce qu'il passe par l'origine.

(C.Q.F.D.)

Application. Supposons que $F\left(\frac{y}{x}\right)$ se réduise à $\frac{y_0}{x_0}$ ou à 1, alors l'équation $y^2 + x^2 - 2ax + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ deviendra $y^2 + x^2 - 2ax + 1 = 0$, ou bien $y^2 + (x-a)^2 = a^2 - 1$, équation qui représente un cercle.

Si l'on construit le cercle représenté par cette équation, et celui représenté par celle-ci : $y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$; on verra facilement que ce dernier cercle est le lieu des points milieux des cordes concourantes à l'origine et appartenant à la courbe.

Remarque. Le second cercle passe par le centre du premier, puisque son équation est satisfaite par $x = a, y = 0$.

Observation. Cette question peut être considérée comme faisant suite à celle que M. Midy a donnée dans les Nouvelles Annales, tome I$^{\text{er}}$, page 481