FERRIOT

Sur les centres de gravité

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__49_0>

SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ.

PAR M. FERRIOT,

Ancien recteur de l'Académie de Grenoble.

—

Je me propose de montrer, par quelques exemples simples, comment la règle de *Guldin* et la méthode des projections peuvent être employées, soit séparément, soit simultanément, à la recherche de certains centres de gravité, sans passer par le *calcul intégral*, et de faire descendre ainsi, dans les éléments, certaines propositions, qui, jusqu'ici, ont été regardées comme transcendantes.

Aujourd'hui que chaque branche des mathématiques a pris un développement immense et que les diverses propositions qui composent chacune d'elles sont éparses dans une infinité d'ouvrages, ou cachées dans des formules concentrées, si concentrées que personne ou presque personne ne les réduit en nombres, j'ai pensé que l'époque était peut-être arrivée, où il serait nécessaire de coordonner ces propositions, de les soumettre à un ordre systématique tel, que se rattachant à des propositions, non-seulement connues, mais élémentaires, elles soient entraînées à leur suite dans le torrent de la circulation des idées et forcées par là de devenir fécondes.

C'est donc pour indiquer le but, plutôt que pour l'atteindre, que je vais parcourir quelques exemples. J'emploierai la règle de Guldin (*) ou, ce qui est la même chose,

(*) Guldin (Paul), jesuite, ne à St-Gall en 1577, mort à Gratz en 1637. Le theorème qui porte son nom, mais qui était dejà enoncé par Pappus, se trouve la notion du centre des moyennes distances, parce que cette notion est élémentaire, comme l'ont fait voir plusieurs géomètres et notamment *Lhuilier* de Genève, et, quant à l'idée de projection, elle l'est plus encore, puisqu'un très-grand nombre de simples ouvriers, sans avoir fait d'études spéciales, en font souvent un usage très-fin et très-délicat.

1. *Centre de gravité d'un arc de cercle.*

La distance du centre de gravité d'un arc au centre du cercle est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont l'*arc*, la *corde* et le *rayon*. De sorte qu'on a toujours :

$$\text{arc} : \text{corde} :: \text{rayon} : og,$$

og étant la distance du centre du cercle au centre de gravité de l'arc.

En effet, soit *amb* un arc quelconque de cercle dont la corde *ab* est parallèle au diamètre *cd* (*fig.* 10).

Si on fait tourner cet arc autour de ce diamètre, comme axe, on obtiendra une zône dont la mesure est, comme on sait, égale à une circonférence de grand cercle multipliée par la hauteur de cette zone, donc

$$\text{zone } amb = 2r\pi \times \text{corde};$$

d'autre part, *og* étant la distance du centre de gravité de l'arc à l'axe de rotation, on aura, d'après la règle de Guldin,

$$\text{arc. } amb \times 2\pi . og = 2r\pi \times \text{corde}$$

d'où, distance cherchée, ou $og = \dfrac{r \times \text{corde}}{\text{arc}}$, ce qui justifie l'énoncé.

---

dans l'ouvrage : *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuæ*, lib. IV, Vienne, 1635-42, 2 vol. in-fol. Ces trois *species* sont les relations entre les figures, les centres de gravité, les aires et volumes.

Si l'arc *amb* est une demi-circonférence, on a

$$\text{corde} = 2r,\ \text{arc} = r\pi,\ \text{et par conséquent}\ og = \frac{2r}{\pi}. \quad (2)$$

Donc la circonférence décrite du rayon *og* est égale au double du diamètre du demi-cercle tournant.

II. *Centre de gravité d'un secteur de cercle.*

Soit *aob* un secteur quelconque (*fig.* 11); g', son centre de gravité qui se trouve évidemment sur le rayon qui partage l'angle *aob* en deux parties égales; enfin, soit $g'k$ la perpendiculaire abaissée sur l'axe *ob*, on aura

$$\text{secteur } aob = \frac{\text{arc } ab}{2} \times r$$

puis, solide engendré par ce secteur autour de l'axe de rotation *ob*, $= \frac{2}{3}\pi . r^2 h$, *h* étant la hauteur de l'arc *ab*.

Connaissant le solide engendré par le secteur, ainsi que le secteur lui-même, la règle de *Guldin* donnera :

$$\frac{1}{2}\,\text{arc.}\ r \times 2\pi g'k = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

d'où

$$g'k = \frac{2}{3} . \frac{rh}{\text{arc}}\ (3).$$

Si le secteur devient un demi-cercle, $h = 2r$, $\text{arc} = r\pi$, le point *k* tombe en *o*, et $g'k$, rayon de la circonférence que décrit le centre de gravité du secteur, devient le rayon de la circonférence que décrit le centre de gravité du demi-cercle, de sorte que si ce dernier s'appelle og', on aura

$$og' = \frac{2}{3} \times \frac{2r}{\pi}\ (4).$$

Remarque I. Si on compare les expressions (2) et (4), on voit que $og' = \frac{2}{3}\,og$, ce qui signifie que la distance du centre de gravité du demi-cercle, au centre de ce cercle, n'est que les deux tiers de la distance du centre de gravité de la demi-circonférence au même centre.

Remarque II. On pourrait arriver autrement au résultat précédent : pour cela considérons le secteur *aob* comme formé par la somme d'une infinité de triangles isocèles dont le sommet commun est au centre et dont la hauteur est le rayon. Le centre de gravité de chacun de ces triangles étant aux $\frac{2}{3}$ du rayon, le centre de gravité du secteur n'est autre chose que le centre de gravité d'un arc semblable à celui qui sert de base au secteur proposé, et décrit d'un rayon égal aux $\frac{2}{3}$ du rayon r. Donc, quand la position d'un de ces centres est connue, l'autre l'est aussi, et même chacun de ces centres, peut se construire sans le secours de l'autre.

III. *Centre de gravité d'un segment de cercle.*

Le centre de gravité du segment *bmd* (*fig.* 12) peut évidemment se déduire du centre de gravité du secteur *bomd* combiné avec celui du triangle *bod*; mais l'emploi de la règle de Guldin le fournit plus rapidement et conduit à

$$gk = \frac{1}{12}\,\frac{c^2 h}{\text{segment}},$$

c représentant la corde *bd* et h la hauteur de l'arc *bmd*.

Je n'entrerai pas dans le détail du calcul relatif à ce troisième exemple, parce qu'il est tout à fait semblable à celui des deux premiers : seulement, je ferai remarquer que si le segment devient un demi-cercle, c devient $2r$, h devient aussi $2r$, et gk qui se change alors en go devient :

$$go = \frac{4r}{3\pi}$$

expression identique avec celle qui donne le centre de gravité d'un demi-cercle, comme cela devait être.

Connaissant le centre de gravité d'un arc, d'un secteur et d'un segment, on en déduira facilement le centre de gravité d'une partie quelconque du cercle, comprise entre des arcs et des lignes droites.

IV. *Centre de gravité d'un segment de parabole.*

Pour avoir le centre de gravité du segment amp de la parabole $y^2 = px$ (*fig.* 13), compris entre l'origine, l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de l'arc, appelez x et y les coordonnées de ce point, prenez les $\frac{3}{5}$ de x et les $\frac{3}{8}$ de y, et vous aurez les coordonnées du centre de gravité cherché.

Calcul.

Quand les axes sont rectangulaires, et qu'on fait $x = ap$, $y = mp$, on trouve les résultats suivants :

Segment amp connu par les éléments. . . . $\frac{2}{3}\,xy$

Rectangle fait sur les mêmes coordonnées. . . xy

Segment $amq = xy - \frac{2}{3}\,xy$. . . . . $\frac{1}{3}\,xy$

1. Le solide engendré par le segment amp tournant autour de l'axe ap, est $\frac{1}{2}p\pi x^2$ (*Voir* tome I, p. 383) (*).

2. Le solide engendré par le segment amq tournant autour de aq est $\frac{1}{5}\,\pi x^2 y$ (*Voir* ci-après le n° V de cet article).

De ces deux résultats il suit que le solide engendré par le segment amp autour de aq est $\frac{4}{5}\,\pi x^2 y$, et cela, parce que le solide engendré par le rectangle xy est $\pi x^2 y$.

(*) Cette évaluation est due à Archimède, qui l'a trouvée par la méthode d'*exhaution*, qui est aussi celle qu'emploie l'auteur de cet article. Le géomètre de Syracuse est le premier qui ait trouvé l'aire, le centre de gravité de la parabole et les volumes que cette courbe engendre. Tm.

Application de la règle de Guldin.

Si on continue d'appeler og la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, le segment amp tournant autour de ap donnera

$$\frac{2}{3}xy \times 2\pi.og = \frac{1}{2}p\pi x^2, \qquad \text{d'où} \qquad og = \frac{3}{8}y;$$

le même segment tournant autour de aq donnera :

$$\frac{2}{3}xy.2\pi eg = \frac{4}{5}\pi x^2 y, \qquad \text{d'où} \qquad eg' = \frac{3}{5}x;$$

de sorte que les deux coordonnées du centre de gravité cherché, sont, comme on l'a annoncé, $\frac{3}{5}x$ et $\frac{3}{8}y$.

Donc, si on prend $ao = \frac{3}{5}\,ap$ et $ae = \frac{3}{8}$ de mp, et que par ces points on mène des parallèles aux axes, le problème sera résolu.

Si la parabole est rapportée à des axes obliques, comme on voit (*fig.* 14), la construction pour trouver le centre de gravité ne changera pas; car, on peut toujours projeter cette figure de manière que le parallélogramme devienne un rectangle, sans que pour cela cette parabole cesse d'être du second degré; or, la propriété dont il s'agit ayant lieu dans cette dernière figure, prouve qu'elle a lieu dans la première, et de plus les rapports entre les parties d'une même droite ne changeant pas, il en résulte que la construction pour avoir le centre de gravité est la même dans les deux figures.

Le segment parabolique d'une parabole quelconque $y^n = px^m$, étant algébrique, comme l'enseigne le calcul intégral, de même que le volume engendré par ce segment, il en résulte que les deux coordonnées du centre de gravité de ce segment sont algébriques, mais on ne peut disconvenir que la règle de *Guldin* ne les offre bien plus simplement que l'emploi des formules :

$$\lambda = \int_{\alpha}^{6} \frac{-}{} y\,dx\,,\quad \lambda x_1 = \int_{\alpha}^{6} \frac{-}{} yx\,dx\,,\quad \lambda y_1 = \int_{\alpha}^{6} \frac{-}{} \frac{1}{2} y^2 dx\,;$$

et même que les valeurs $x_1 = \frac{3}{5} x$ et $y_1 = \frac{3}{8} y$ ne soient demeurées jusqu'ici cachées dans les symboles précédents (*).

V. *Comment on démontre que le solide engendré par le segment* amp, *tournant autour de l'axe des* y *a pour expression* $\frac{1}{5} \pi x^2 y$.

Considérons les rectangles PP′pm' et QQ′qm'.. .. (*fig.* 15). Le premier engendre, par sa révolution, un solide $P = \pi (x^2 - x'^2)\, y'$, comme étant la différence de deux cylindres dont les solidités respectives sont $\pi x^2 y'$ et $\pi x'^2 y'$; le second fournit directement $p = \pi (y - y')\, x'^2$, et le rapport du premier au second est $\frac{P}{p} = \frac{(x^2 - x'^2) y'}{(y - y')\, x'^2}$.

Pour avoir la valeur numérique de ce rapport, posons $y - y' = \omega y'$, $y' - y'' = \omega y''$...... ce qui est permis, puisqu'on peut espacer les sommets m, m', m''.. .. de maniere qu'il règne telle loi qu'on voudra, entre leurs ordonnées, puis, éliminant y, y', x, x' entre les équations $y - y' = \omega y$ $\frac{(x^2 - x'^2) y'}{(y - y')\, x'^2} = \frac{P}{p}$ et les deux suivantes $y^2 = px$, $y'^2 = px'$, qui sont évidentes d'elles-mêmes, on a pour resultat $\frac{P}{p} = \frac{4 - 6\omega + 4\omega^2 - \omega^3}{(1 - \omega)^3}$; or, ω peut être aussi petit qu'on voudra, et même doit devenir nul pour passer du polygone à la courbe, donc $\frac{P}{p} = \frac{4}{1}$.

(*) L'utilite du theoreme du P. Guldin est assez limitee Tres souvent l'aire de la surface est plus facile a determiner directement que le centre de gravite du perimètre generateur. Où est le centre de gravite du perimetre d une demi-ellipse? Les perimetres sont la pierre d'achoppement de la geometrie, qui ne nous apprend rien sur aucune ligne courbe, la circonference et les helices exceptees. Tm.

Par les mêmes raisons que ci-dessus :

$$\frac{P'}{p'}=\frac{4}{1},\ \frac{P''}{p''}=\frac{4}{1}\ldots;\text{et par suite, }\frac{P+P'+P''+\ldots}{p+p'+p''+\ldots}=\frac{P}{p}=\frac{4}{1};$$

donc $P+P'+P''+$ etc., ou le solide engendré par le segment AmP, est au solide engendré par AmQ, ou

$$p+p'+p''+\text{etc.}\ldots\ldots :: 4:1;$$

enfin, si on remarque que les deux solides dont il s'agit font ensemble le cylindre engendré par le rectangle $APQm$ dont la solidité est $\pi x^2 y$, on verra que le solide engendré par le segment AmQ, autour de l'axe des y, a pour expression

$$\frac{1}{5}\pi x^2 y,$$

résultat conforme à celui que fournit le calcul intégral.

VI. *Centre de gravité d'une demi-ellipse ayant pour base un diamètre quelconque.*

Observation préliminaire. Lorsqu'on connaît le centre de gravité d'une surface plane, on connaît également le centre de gravité de toutes les projections planes de cette surface, formées par des lignes parallèles, et cela tient à ce que tous les éléments de la première étant chargés de poids égaux et également inclinés sur la seconde, tous les points de la seconde sont aussi chargés de poids égaux; ainsi, par exemple, le centre de gravité d'un triangle équilatéral étant placé à l'intersection des lignes qui joignent les sommets et les milieux des côtés opposés, le centre de gravité de toute projection de ce triangle, c'est-à-dire d'un triangle quelconque, est aussi à l'intersection des lignes qui joignent les sommets et les milieux des côtés opposés dans ce nouveau triangle; de même, si c'est une ligne droite qu'on projette sur un plan ou sur une autre ligne, la projection du centre de gravité de cette ligne est elle-même le centre de gravité de la projection, et cela, parce que tous les éléments étant chargés de poids égaux, et de plus également inclinés sur la ligne de projection, tous les éléments de la projection sont aussi chargés de poids égaux, et également espacés sur la ligne de projection.

Mais, si c'est une ligne qu'on projette, une circonférence de cercle, par exemple, le périmètre de l'ellipse projection ne sera pas chargé de poids égaux en chacun de ses points ou de ses éléments linéaires, quoique ceux de la circonférence le soient; et cela parce que ces derniers étant diversement inclinés, leurs projections ne sont point égales et ne peuvent par conséquent représenter des poids égaux. cependant, si la courbe que l'on considère est à double courbure, il peut arriver que tous ses éléments soient également inclinés sur le plan horizontal, comme cela a effectivement lieu dans les hélices, par rapport au plan de la base. (*Voyez* les pages 201 et suivantes des *Nouvelles Annales* où elles offrent le premier exemple du centre de gravité d'une courbe à double courbure, ainsi que d'une portion de surface gauche, comprise entre deux positions de la génératrice.)

Cela posé, revenons à l'objet du paragraphe VI, c'est-à-dire au centre de gravité d'une demi-ellipse quelconque.

Pour cela, soit un cercle de rayon $OC = a$, dans lequel G est le centre de gravité du demi-cercle ACB (*fig.* 16). Si on projette ce cercle sur un plan passant par le diamètre PQ, les diamètres AB et CD qui sont à angles droits, et par conséquent conjugués dans le cercle, formeront dans l'ellipse projection, un système de diamètres conjugués A'B', C'D'.

Le centre de gravité G du demi-cercle ACB se projettera au centre de gravité g de la demi-ellipse, et ce dernier point partagera le demi-diamètre OC' comme le point G partage

le demi-diamètre OC; or, nous savons que $OG = \frac{4}{3\pi} . OC$,
donc on aura $Og = \frac{3}{4\pi} Oc'$; ce qui se traduit ainsi :

« Pour avoir le centre de gravité d'une demi-ellipse ayant
» pour base le diamètre a', menez son conjugué b', prenez
» à partir du centre, une partie $og = \frac{4}{3\pi} . b'$, et le problème
» sera résolu. »

Les centres de gravité de tous les demi-cercles qu'on peut faire dans un cercle, étant évidemment eux-mêmes sur un autre cercle de rayon OG, il en résulte que les centres de gravité de toutes les demi-ellipses qu'on peut faire dans une ellipse, sont sur une autre ellipse concentrique et semblable à la première et qu'on obtient en projetant le cercle de rayon OG.

Non-seulement on peut obtenir le centre de gravité d'une demi-ellipse quelconque, mais on parvient encore avec autant de facilité au centre de gravité d'un secteur, d'un segment elliptique. Il suffit pour cela de projeter les parties correspondantes du cercle, et les projections des centres de gravité de ces derniers objets seront les centres de gravité des premiers.

VII. *Ellipsoïde de révolution autour d'un diamètre quelconque.*

Toutes les moitiés d'une même ellipse étant équivalentes, quel que soit le diamètre qui leur serve de base, chacune d'elles a pour expression de sa surface $\frac{1}{2}\pi ab$, a et b étant les demi-axes.

Mais parce que le rectangle $ab = a'b' . \sin(\alpha' - \alpha)$, il en résulte que la demi-ellipse construite sur les demi-diamètres a', b', a pour expression $\frac{1}{2}\pi a'b' \sin(\alpha' - \alpha)$, et peut par conséquent se prendre sur la figure même, sans avoir recours aux axes.

Cela posé : pour avoir l'ellipsoïde autour de A'B', abaissez gp perpendiculaire sur l'axe, et vous aurez $gp = og.\sin gop$ ou $gp = \frac{4}{3\pi} b'.\sin(\alpha' - \alpha)$, en remplaçant go par sa valeur $\frac{4}{3\pi}.b'$, comme on a vu dans l'article précédent; puis, appliquant la règle de Guldin, il vient :

$$\frac{1}{2}\pi a'b'.\sin(\alpha' - \alpha') \times \frac{4}{3\pi}b'.\sin(\alpha' - \alpha).2\pi =$$

$$\text{Ellipsoïde} = \frac{4}{3}\pi.a'b'^2.\sin^2(\alpha' - \alpha).$$

Si l'on met l'expression précédente sous la forme $\frac{4}{3}\pi a'b'.\sin(\alpha' - \alpha) \times b'\sin(\alpha' - \alpha)$, on remarquera que le premier facteur $\frac{4}{3}\pi a'b'.\sin(\alpha' - \alpha)$ est constant puisqu'il est égal à $\frac{4}{3}\pi ab$, et que l'ellipsoïde varie avec le second facteur $b'\sin(\alpha' - \alpha)$, qui n'est lui-même autre chose que $\frac{ab}{a'}$; ce qui signifie que l'ellipsoïde va croissant à mesure que le diamètre a' va en diminuant; qu'il atteint son *maximum* quand le diamètre a' se confond avec b, et qu'il atteint son *minimum*, quand a' se confond avec a.

Dans chacun de ces cas extrêmes, $\sin(\alpha' - \alpha) = 1$, parce que les diamètres conjugués sont alors les axes, et l'expression générale de l'ellipsoïde devient successivement $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ et $\frac{4}{3}\pi ab^2$. Enfin, si on suppose $a = b$, on a $\frac{4}{3}\pi a^3$, qui est la solidité de la sphère, comme on devait s'y attendre.

Conclusion. On voit donc, par ce qui précède, et sans qu'il soit nécessaire de multiplier davantage les exemples, combien la règle de Guldin et l'emploi des projections facilitent, dans certains cas, la recherche des vérités mathématiques; aussi, est-ce sous ce point de vue que je crois qu'on doit principalement les considérer.