NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIDAL

Démonstration du théorème 39

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 496-499
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__496_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DEMONSTRATION DU THEORÈME 39 (*p.* 395, *t.* I)

PAR M. VIDAL,

Elève au collége de Montpellier.

Démontrer que la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande (*fig.* 92).

Pour arriver à la démonstration de ce théorème, je vais chercher l'équation de l'épicycloïde engendrée par une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande; ensuite je verrai si on peut l'identifier avec l'équation de la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit. équation que M. Merlieux a trouvé être, à la p. 266 du t. I^er^.

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{l^2} \quad \ldots \quad (1)$$

l désignant la droite dont la longueur est constante. Soit o le centre de la circonférence fixe, dont je désignerai le rayon par $4a$, le rayon de la petite circonférence sera donc alors a. Soit A la position première du point qui décrit l'épicycloïde, je prendrai pour axe des y la droite oA, et pour axe des x une perpendiculaire à cette droite menée par le centre du cercle fixe. Supposons qu'au bout d'un certain temps le centre du cercle mobile se soit transporté en o', alors le point A se sera mû, de telle manière que la longueur de l'arc AG sera égale à la longueur de l'arc GM ; désignons par α la longueur de ces deux arcs. Nous savons qu'on peut mesurer un angle par le rapport de l'arc qu'il intercepte sur la circonférence au rayon, nous aurions donc

$$\mathrm{A}o\mathrm{G} = \frac{\alpha}{4a},$$

et

$$\mathrm{M}o'\mathrm{G} = \frac{\alpha}{a}.$$

Je mène les coordonnées du point M que je désignerai par x et y. Ensuite par le centre o' du cercle mobile je mène o'E parallèle à l'axe des y jusqu'à la rencontre de MC prolongé ; nous aurons alors

$$\mathrm{MC} = x = o'\mathrm{D} - \mathrm{ME}$$
$$\mathrm{MP} = y = o\mathrm{D} - o'\mathrm{E},$$

puisque o'E est parallèle à oD, l'angle Fo'E sera égal à AoG, et par suite à $\frac{\alpha}{4a}$. Je joins o'M, nous aurons

$$\mathrm{M}o'\mathrm{F} = \pi - \frac{\alpha}{a},$$

on aura par conséquent

$$\mathrm{M}o'\mathrm{E} = \pi - \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{4a} = \pi - \frac{3\alpha}{4a}$$

Dans le triangle rectangle $oo'\mathrm{D}$ on a

$$o'\mathrm{D} = 3a \sin \frac{\alpha}{4a},$$

$$o\mathrm{D} = 3a \cos \frac{\alpha}{4a}.$$

On a de même dans le triangle OME :

$$\mathrm{ME} = a \sin \frac{3\alpha}{4a},$$

$$o'\mathrm{E} = a \cos \frac{3\alpha}{4a}.$$

Nous aurons donc en définitive :

$$x = 3a \sin \frac{\alpha}{4a} - a \sin \frac{3\alpha}{4a},$$

$$y = 3a \cos \frac{\alpha}{4a} + a \cos \frac{3\alpha}{4a}.$$

Mais nous savons que l'on a :

$$\sin \frac{3\alpha}{4a} = 3 \sin \frac{\alpha}{4a} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{4a}.$$

$$\cos \frac{3\alpha}{4a} = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{4a} - 3 \cos \frac{\alpha}{4a}.$$

En remplaçant dans la valeur de x et y, il vient :

$$x = 4a \sin \frac{3\alpha}{4a},$$

$$y = 4a \cos \frac{3\alpha}{4a}.$$

De la première je tire .

$$\sin \frac{\alpha}{4a} = \sqrt[3]{\frac{x}{4a}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{4a} = \sqrt[3]{\frac{y}{4a}},$$

faisons la somme des carrés de ces deux valeurs, et il vient

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{16a^2}} = 1,$$

d'où

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16a^2}.$$

Voilà l'équation de l'épicycloïde ; nous voyons que cette équation devient identique avec l'équation (1) si on pose

$$l = 4a\,;$$

l'épicycloïde décrite est donc la courbe enveloppe d'une droite s'appuyant sur les côtés d'un angle droit dont la longueur serait égale au rayon du cercle fixe. C. Q. F. D.

Nota. Si le diamètre de la circonférence mobile devenait égal au rayon du cercle fixe, on trouvera facilement ce théorème de Lahire, que la courbe droite décrite est une ligne droite passant par le centre et par le point A.

La méthode que j'ai donnée pour trouver l'équation de l'épicycloïde n'est qu'un cas particulier de celle que donne Euler dans son introduction à l'analyse des infiniment petits (l. 11, § 523), méthode qui conduit à l'équation générale de l'épicycloïde tant rallongée que raccourcie.