NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUGUSTE DELADÉRÉERE

Note sur l'erreur commise en prenant un arc pour son sinus

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 494-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__494_0>

NOTE

sur l'erreur commise en prenant un arc pour son sinus.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Je me propose de prouver que $a - \sin a > \frac{1}{10}a^3$, quand $a < 90^0$.

Pour cela je pars de la relation connue $a > \sin a$ qui me donne : en changeant a en $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2} > \sin\frac{a}{2}$; $a > 2 \sin \frac{a}{2}$

$a \cos\frac{a}{2} > 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a$. Donc puisque $a\cos\frac{a}{2} >$ $\sin a$, j'aurai

(1) $a - \sin a > a\left(1 - \cos\frac{a}{2}\right) = a \times 2\sin^2\frac{a}{4}$: mais dans le premier quadrant, à mesure que l'arc diminue le cosinus augmente, on a donc la relation $\cos\frac{a}{4} > \cos\frac{90}{4} = \cos\frac{1}{4}45 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, pour $a < 90^0$; et comme $\sin\frac{1}{4}a = \cos\frac{1}{2}a$

$$\text{tang.}\ \frac{1}{4}a\text{, on a } \sin\frac{1}{4}a > \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\ \text{tang.}\ \frac{1}{4}a\ ;$$

$$\sin^2\frac{1}{4}a > \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\text{tang.}^2\frac{1}{4}a$$

$$2\sin^2\frac{1}{4}a > \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\text{tang.}^2\frac{1}{4}a > \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{1}{4^2}a^2 =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{32}a^2.$$ Substituant dans (1), on trouve

$$a - \sin a > a \times \frac{2+\sqrt{2}}{32}a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{32}a^3 > \frac{3{,}2}{32}a^3 = \frac{1}{10}a^3$$

car $\sqrt{2} > 1{,}2$ et $2 + \sqrt{2} > 3{,}2$.

On obtient aussi une limite inférieure de l'erreur commise en prenant l'arc pour le sinus, à l'aide d'une démonstration qui n'est pas beaucoup plus compliquée, pour prouver que

$$a - \sin a < \frac{1}{4} a^3.$$

Si nous voulons appliquer au calcul de l'arc 10″, nous aurons

$$\text{arc } 10'' - \sin 10'' \begin{cases} < \frac{1}{4} (0{,}000049)^3 < 0{,}00000000000003 \\ > \frac{1}{10} (0{,}000048)^3 > 0{,}00000000000001 \end{cases}$$

Ainsi la dernière limite montre qu'on ne peut pas compter sur la quatorzième décimale, ou, en d'autres termes, que arc 10″ et sin 10″ n'ont que les treize premières décimales communes.

C'est tout ce que l'on peut se demander en trigonométrie élémentaire, où l'on veut seulement prouver la possibilité de onstruire les tables; d'ailleurs la valeur de sin a en série donne immédiatement le moyen de calculer les deux limites.

En effet on a

$$\sin a = a - \frac{1}{1.2.3} a^3 + \frac{1}{1.2.3.4\,5} a^5 - \ldots \text{ d'où}$$

$$a - \sin a = \frac{1}{6} a^3 \left(1 - \frac{1}{20} a^2 + \frac{1}{740} a^4 \ldots\ldots\right)$$

donc à cause que la serie est convergente pour

$a < 1$, $a - \sin a < \frac{1}{6} a^3$ et à fortiori $a - \sin a < \frac{1}{4} a^3$ (*)

On a aussi, puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs,

$a - \sin a > \frac{1}{6} a^3 \left(1 - \frac{1}{20} a^2\right)$, et comme dans le premier

(*) V. t. 1, p. 27.

quadrant $a < 1{,}6$, on aura

$$a - \sin a > \frac{1}{6} a^3 \left\{ 1 - \frac{1}{20} (1{,}6)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} a^3 \left(1 - \frac{256}{2000} \right) > \frac{1}{6} a^3 \left(1 - \frac{13}{100} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{87}{100} a^3 > \frac{1}{7} a^3.$$

Ainsi, par cette méthode, on trouve que l'erreur est plus grande que $\frac{1}{7}$ du cube de l'arc, pour $a < 1$.

Ceci prouve qu'en général, on ne pourra trouver une fraction plus grande que $\frac{1}{7} a^3$ pour la limite supérieure, puisque $\frac{1}{6} a^3$ est plus petit, comme l'a démontré M. Lyonnet, pour un arc quelconque (t. II de ces annales, p. 218).