NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MARCOU

Théorème sur la cissoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 486-488

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__486_1>

THÉORÈME SUR LA CISSOIDE.

PAR M. MARCOU (J.),
Élève au collége de Besançon.

Deux circonférences sont tangentes extérieurement l'une à l'autre, on mène à ces deux circonférences, une tangente commune; le rayon de la première étant constant et celui de la seconde étant variable, le point de tangence de cette dernière circonférence décrit une cissoïde (*fig.* 91).

Je prends pour axe des y, la perpendiculaire au point de contact des deux cercles, et la ligne des centres pour l'axe des x; soit $CO = R$; $C'O = \alpha$, R est constant et α est variable.

L'équation du cercle C est $y^2 + x^2 + 2Rx = 0$.

L'équation du cercle C' est $y^2 + x^2 - 2\alpha x = 0$.

Les points (x', y'), (x'', y'') étant sur les cercles, on a les relations

$$y'^2 + x'^2 + 2Rx' = 0, \qquad (1)$$

$$y''^2 + x''^2 + 2\alpha x'' = 0. \qquad (2)$$

Pour exprimer que les deux cercles ont une tangente commune, j'égale les deux coefficients d'inclinaison, et j'exprime qu'elles coupent l'axe des y au même point A.

Ce qui me donne les deux relations

$$\frac{x'+\mathrm{R}}{y'}=\frac{x''-\alpha}{y''}, \qquad (3)$$

$$-\frac{\mathrm{R}\,x'}{y'}=\frac{\alpha\,x''}{y''}. \qquad (4)$$

Éliminant entre les 4 équations (1), (2), (3), (4) x', y' et α, on aura l'équation du lieu des points (x'', y''). De (3) je tire $x'=\dfrac{y'(x''-\alpha)-\mathrm{R}y''}{y'}$;

de (4) je tire $x'=-\dfrac{\alpha x'' y'}{\mathrm{R}y''}$, égalant ces deux valeurs, on en déduit

$$y'=\frac{\mathrm{R}^2 y''}{\mathrm{R}(x''-\alpha)+\alpha x''},$$

$$\text{et } x'=\frac{-\alpha\mathrm{R}x''}{\mathrm{R}(x''-\alpha)+\alpha x''}.$$

Remplaçant y' et x' par ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\mathrm{R}^2y''^2-2\alpha\mathrm{R}x''^2+2\alpha^2\mathrm{R}x''-\alpha^2x''^2=0,$$

$$\text{ou } \alpha^2(2\mathrm{R}\,x''-x''^2)-2\mathrm{R}\,x''^2\alpha+\mathrm{R}^2y''^2=0$$

De l'équation (2) je tire $\alpha=\dfrac{y''^2+x''^2}{\alpha\,x''}$, remplaçant α par cette valeur dans la dernière équation, il vient

$$\frac{(y''^2+x''^2)^2}{4x''^2}(2\mathrm{R}-x'')-\frac{2\mathrm{R}x''^2(y''^2+x''^2)}{2x''}+\mathrm{R}^2y''^2=0$$

ou, supprimant les accents.

$$(y^2+x^2)(2\mathrm{R}y^2-2\mathrm{R}x^2-xy^2-x^3)+4\mathrm{R}^2y^2x=0.$$

$$(y^2+x^2+2\mathrm{R}x)\,2\mathrm{R}y^2-x(y^2+x^2)(2\mathrm{R}x+y^2+x^2)=0.$$

$$\text{ou enfin } (y^2+x^2+2\mathrm{R}x)(2\mathrm{R}y^2-xy^2-x^3)=0.$$

Le premier facteur égale à zéro, représente le cercle C dont le rayon est constant et le second facteur est l'équa tion d'une cissoïde qui a pour cercle générateur un cercle symétrique au cercle C, relativement à l'axe des y.

Note. Le facteur $y^2+x^2+2Rx=0$ est l'enveloppe de la droite mobile. Lorsque R devient négatif, les circonférences se touchent intérieurement, et n'ont qu'une tangente commune; toutefois la cissoïde reste réelle; que signifie-t-elle alors? Si R est aussi variable et qu'on donne entre α et R, la relation F $(\alpha, R)=0$, il suffit, pour obtenir le lieu du point de contact sur le cercle α, de substituer dans la relation $\alpha=\frac{y^2+x^2}{2x}$ et $R=\frac{x(y^2+x^2)}{2y^2}$; ou bien $R=-\frac{y^2+x^2}{2x}$; $\alpha=\frac{x(y^2+x^2)}{2y^2}$, pour avoir le lieu relatif au cercle R. Tm.