NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HUET

Questions d'examen. Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 474-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__474_0>

QUESTIONS D'EXAMEN.

Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés.

(Fin. — V. p. 353.)

PAR M. HUET,

Regent de physique au college de Pamiers, ancien professeur de mathematiques speciales à l'ecole de Sorrèze

—

6° *Décagone* (fig. 88).

$$\text{vol}\,D = \text{vol}\,ABFG + 2\text{vol}\,FEDCB = \text{vol}\,R + 2\text{vol}\,K.$$

Or
$$\text{vol}\,K = \text{vol}\,FECB + \text{vol}\,EDC,$$
$$\text{vol}\,FECB = \text{vol}\,FECIB - \text{vol}\,BCI = \text{vol}\,T - \text{vol}\,T',$$
$$\text{vol}\,ECD = \text{vol}\,EDKI - \text{vol}\,DCIK = \text{vol}\,t - \text{vol}\,t'.$$

Préparation.

On trouve facilement $Om = \frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

D'ailleurs, on a

$$mn = c\sqrt{5+2\sqrt{5}} = BF\,;\quad \overline{OD}^2 = \frac{1}{4}c^2(6+2\sqrt{5}),$$

d'où
$$OD = \frac{c}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}},$$

ou, en vertu d'une formule connue,

$$OD = \frac{c}{2}(1+\sqrt{5})\,;$$

EC sous-tendant le $\frac{1}{5}$ de la circonférence est égal au côté du pentagone, on a donc

$$\overline{EC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{ED}^2 = \frac{c^2}{4}(6+2\sqrt{5}) + c^2 = \frac{c^2}{4}(10+2\sqrt{5}).$$

d'où $EC = \frac{c}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $EP = \frac{c}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $EI =$

$$= IP + EP = EP + On = \frac{1}{4}c\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{c}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{c}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right);$$

$$CI = PI - PC = On - EP = \frac{c}{4}\left(2\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right);$$

$$BI = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CI}^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{16}\left(30+10\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{70+30\sqrt{5}}\,} =$$

$$= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{16}\left(10-2\sqrt{5}\right)} = \frac{c}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{c}{4}\left(1+\sqrt{5}\right);$$

$$IK = PD = OD - OP = OD - (nB + BI) = \frac{1}{2}c\left(\sqrt{5}+1\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2}c + \frac{c}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{c}{2}\sqrt{5} - \frac{c}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) = \frac{c}{4}\left(\sqrt{5}-1\right);$$

$$DK = On = Om = \frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Cela posé, on a $\mathrm{vol}R = c.\pi c^2(5+2\sqrt{5}) = \pi c^3(5+2\sqrt{5})$;

$$\mathrm{vol}T - \mathrm{vol}T' = \frac{1}{3}\pi BI\left\{\overline{BF}^2 + BF.EI + \overline{EI}^2 - \overline{CI}^2\right\} = \frac{1}{3}\pi BI$$

$$\left\{\overline{BF}^2 + BF.EI + (EI+CI)(EI-CI)\right\} = \frac{1}{3}\pi BI$$

$$(\overline{BF}^2 + BF.EI + BF.EC) = \frac{1}{3}\pi BI.BF(BF + EI + EC) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}c^2\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left\{c\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}c\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{2}c\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi c^3\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\pi c^3\left(1+\sqrt{5}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{5}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{70+30\sqrt{5}}\right\} =$$

$$=\frac{1}{4}\pi c^3(1+\sqrt{5})\left\{\frac{1}{2}(5+2\sqrt{5})+\frac{1}{4}(5+3\sqrt{5})\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\pi c^3(1+\sqrt{5})(15+7\sqrt{5})=\frac{1}{16}\pi c^3(50+22\sqrt{5})=$$

$$=\frac{1}{8}\pi c^3(25+11\sqrt{5}).$$

$$\mathrm{Vol}t-\mathrm{vol}t'=\frac{1}{3}\pi \mathrm{IK}(\overline{\mathrm{EI}}^2+\overline{\mathrm{DK}}^2+\mathrm{EI.DK}-\overline{\mathrm{CI}}^2-\overline{\mathrm{DK}}^2-\mathrm{CI.DK})=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\mathrm{IK}\left\{(\mathrm{EI}+\mathrm{CI})(\mathrm{EI}-\mathrm{CI})+\mathrm{DK}(\mathrm{EI}-\mathrm{CI})\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\mathrm{IK}(\mathrm{BF.EC}+\mathrm{DK.EC})=\frac{1}{3}\pi.\mathrm{IK.EC}(\mathrm{BF}+\mathrm{DK})=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\,.\,\mathrm{IK}\,.\,\mathrm{EC}\,.\,3\mathrm{DK}=\pi\,.\,\mathrm{IK}\,.\,\mathrm{EC}\,.\,\mathrm{DK}=$$

$$=\pi\,.\,\frac{1}{4}c(\sqrt{5}-1)\,.\,\frac{1}{2}c\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,\frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{16}\pi c^3(\sqrt{5}-1)\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{1}{16}\pi c^3(\sqrt{5}-1)(5+3\sqrt{5})=\frac{1}{16}\pi c^3(10+2\sqrt{5})=\frac{1}{8}\pi c^3(5+\sqrt{5})$$

Donc, $\mathrm{vol}K=\frac{1}{8}\pi c^3(5+\sqrt{5})+\frac{1}{8}\pi c^3(15+11\sqrt{5})=$

$$=\frac{1}{8}\pi c^3(30+12\sqrt{5})=\frac{1}{4}\pi c^3(15+6\sqrt{5})=\frac{3}{4}\pi c^3(5+2\sqrt{5}).$$

Donc, $2\mathrm{vol}K=\frac{3}{2}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$;

ajoutant, $\mathrm{vol}R=\pi c^3(5+2\sqrt{5})$.

Donc enfin, $\mathrm{vol}D=\frac{5}{2}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$.

7° *Dodécagone* (fig. 89).

$$\text{Vol D} = \text{vol HGBA} + 2\text{vol GFEDCB} = \text{vol R} + 2\text{vol K}.$$
$$\text{Vol K} = \text{vol GFCB} + \text{vol FEDC}.$$
$$\text{Vol GFCB} = \text{vol GFIB} - \text{vol BCI} = \text{vol T} - \text{vol T}'.$$
$$\text{Vol FECB} = \text{vol FEKI} - \text{vol DKIC} = \text{vol } t - \text{vol } t'.$$

Préparation.

On trouve aisément $\mathrm{O}m = \frac{1}{2}c(2 + \sqrt{3})$; d'ailleurs

$mn = 2\mathrm{O}m = c(2+\sqrt{3})$; $\overline{\mathrm{OF}}^2 = \overline{\mathrm{OG}}^2 = \overline{\mathrm{O}m}^2 + \overline{m\mathrm{G}}^2 = c^2(2+\sqrt{3})$,

d'où $\mathrm{OF} = c\sqrt{2+\sqrt{3}} = c\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{c}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

FC est le côté du carré inscrit, il est égal à $\mathrm{FO}\sqrt{2}$, d'après le triangle rectangle FOC.

Donc, $\mathrm{FC} = \frac{1}{2}c(\sqrt{12}+2) = c(1+\sqrt{3})$; $q\mathrm{C} = \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3})$;

$\mathrm{CI} = q\mathrm{I} - q\mathrm{C} = \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}c$;

$\mathrm{BI} = \sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2 - \overline{\mathrm{CI}}^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3}$; $n\mathrm{I} = n\mathrm{B} + \mathrm{BI} =$

$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c\sqrt{3} = \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3}) = q\mathrm{C}$; $\mathrm{IK} = \mathrm{NK} - \mathrm{NI} = \mathrm{OP} - n\mathrm{I} =$

$= \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}c$; $\mathrm{FI} = \mathrm{FC} + \mathrm{IC} =$

$= \frac{c}{2} + c(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3})$; $\mathrm{EK} = \mathrm{EP} + \mathrm{PK} =$

$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}c(3+\sqrt{3})$; $\mathrm{DK} = \mathrm{PK} - \mathrm{PD} =$

$= \frac{1}{2}c(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3})$.

Cela posé,

$$\text{Vol R} = c.\pi.c^2(2+\sqrt{3})^2 = \pi c^3(7+4\sqrt{3}).$$

$$\mathrm{Vol\,T} - \mathrm{vol\,T'} = \frac{\pi}{3}\mathrm{BI}(\overline{\mathrm{BG}}^2 + \overline{\mathrm{FI}}^2 + \mathrm{BG.FI} - \overline{\mathrm{CI}}^2) = \frac{1}{3}\pi\mathrm{BI}$$

$$\{\mathrm{BG}(\mathrm{BG}+\mathrm{FI})+(\mathrm{FI}+\mathrm{CI})(\mathrm{FI}-\mathrm{CI})\} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{BI}\{(\mathrm{BG}+\mathrm{FI})\mathrm{BG}+$$

$$+\mathrm{BG.FC}\} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{BI.BG}(\mathrm{BG}+\mathrm{FI}+\mathrm{FC}) = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}c\sqrt{3}.c(2+\sqrt{3})$$

$$\{c(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3})+c(1+\sqrt{3})\} = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}c\sqrt{3}$$

$$c(2+\sqrt{3}).\frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\pi c^3(3+2\sqrt{3})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\pi c^3(21+12\sqrt{3}) = \frac{3}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}).$$

$$\mathrm{Vol}\,t - \mathrm{vol}\,t' = \frac{1}{3}\mathrm{IK}.\pi(\overline{\mathrm{FI}}^2+\overline{\mathrm{EK}}^2+\mathrm{FI.EK}-\overline{\mathrm{CI}}^2-\overline{\mathrm{DK}}^2-\mathrm{CI.DK}) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\mathrm{IK}\{(\mathrm{FI}+\mathrm{CI})(\mathrm{FI}-\mathrm{CI})+(\mathrm{EK}+\mathrm{DK})(\mathrm{EK}-\mathrm{DK})+\mathrm{FI.EK}-$$

$$-\mathrm{CI.DK}\} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{IK}\{\mathrm{BG}(\mathrm{FC}+\mathrm{ED})+\mathrm{FI.EK}-\mathrm{CI.DK}\} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}c\{c(2+\sqrt{3})c(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3}).\frac{1}{2}c(3+\sqrt{3})-$$

$$-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3})\} = \frac{1}{6}\pi c^3\{(2+\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})\} =$$

$$= \frac{1}{6}\pi c^3\{7+4\sqrt{3}+\frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})\} = \frac{1}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}).$$

Donc, $\mathrm{vol\,K} = \frac{3}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}) + \frac{1}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}) =$

$$= \pi c^3(7+4\sqrt{3}) = \mathrm{vol\,R}.$$

Donc, $\mathrm{volD} = \mathrm{volR} + 2\mathrm{volK} = 3\mathrm{volR} = 3\pi c^3(7+4\sqrt{3})$.

8. Vérifions maintenant ces résultats en calculant ces mêmes volumes par le théorème de Guldin.

Le centre de gravité d'un polygone régulier est au centre du cercle inscrit dans ce polygone, et le rayon de la circonférence qu'il décrit autour d'un côté est l'apothème dont la valeur est

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4\,\mathrm{R}^2 - c^2}$$

La circonférence $2\pi r = \pi\sqrt{4R^2 - c^2}$; donc en général le volume V est donné par la formule

$$V = S\pi\sqrt{4R^2 - c^2},$$

S étant la surface du polygone générateur. Appliquons cette formule aux sept polygones que nous venons de considérer.

1° Pour le triangle on a

$$V = \frac{1}{4}\ c^2\sqrt{3}.\pi\ \frac{1}{2}\ c\sqrt{3} = \frac{1}{4}\ \pi c^3$$

2° Pour le carré on a

$$V = c^2.\pi\ c = \pi c^3.$$

3° Pour le pentagone on a

$$V = \frac{1}{4}\ c^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\quad \pi\ \frac{c}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{1}{4}\ \pi c^3,\ (5 + 2\sqrt{5}).$$

4° Pour l'hexagone on a

$$V = \frac{3}{2}\ c^2\sqrt{3}\quad \pi c\sqrt{3} = \frac{9}{2}\ \pi c^3$$

5° Pour l'octogone on a

$$V = 2c^2(1 + \sqrt{2}).\ \pi c\,(1 + \sqrt{2}) = \pi c^3(6 + 4\sqrt{2}) -$$
$$= 2\pi c^3(3 + 2\sqrt{3}).$$

6° Pour le décagone on a

$$V = \frac{5}{2}\ c^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.\ \pi c\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\ \pi c^3(5 + 2\sqrt{5}).$$

7° Pour le dodecagone on a

$$V = 3\ c^2(2 + \sqrt{3}).\ \pi c\,(2 + \sqrt{3}) = \pi\ (21 + 12\sqrt{3})\,c^3 =$$
$$= 3\pi c^3(7 + 4\sqrt{3}).$$

Résultats tout a fait identiques aux precedents

Cette dernière méthode suppose qu'on a calculé d'avance S pour chacun des polygones ci-dessus. Ce calcul n'offre aucune difficulté, je me dispenserai de le développer

Si on demandait les volumes précédents, en fonction de R ou en fonction de r, on les obtiendrait immédiatement en mettant dans les résultats que nous avons trouvés à la place de c, ou sa valeur en fonction de R, ou sa valeur en fonction de r, valeurs qu'on trouverait sans difficulté. On pourrait d'ailleurs suivre pour les trouver directement l'une des deux méthodes que nous avons suivies, et on trouverait par exemple pour les volumes en fonction de R :

1° Triangle, $V = \frac{3}{4} \pi R^3 \sqrt{3}$;

2° Carré, $V = 2 \pi R^3 \sqrt{2}$;

3° Pentagone, $V = \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$;

4° Hexagone, $V = \frac{9}{2} \pi R^3$;

5° Octogone, $V = 2 \pi R^3 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$;

6° Décagone, $V = \frac{5}{2} \pi R^3 \sqrt{5}$;

7° Dodécagone, $V = \frac{3}{2} \pi R^3 \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$.