MIDY

Questions d'examen. Lieux géométriques dans la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 448-449
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__448_0>

QUESTIONS D'EXAMEN.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LA PARABOLE,

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

Première question. Trouver le lieu des foyers et celui des sommets de toutes les paraboles qui ont même directrice et une tangente commune. (V. t. I, p. 321, quest. 19.)

Première solution. Soient F (*fig.* 87) le foyer et S le sommet d'une des paraboles; OG la directrice et AT la tangente données. Prenons la première de ces droites pour axe des y, et pour axe des x la perpendiculaire à cette droite au point A, où elle est coupée par la tangente commune.

Cela posé, si M est le point de contact de la parabole avec AT, en menant MG parallèle a AX, les triangles MAG, MAF seront égaux, et GF sera perpendiculaire sur AM. C'est sur ces propriétés que repose la solution de la question.

Soit

$$y = \frac{1}{m}x \ldots \quad (1)$$

l'équation de AT, et désignons AG par β · l'équation de la perpendiculaire GF sera

$$y - \beta = -mx \ldots \quad (2);$$

la circonférence décrite du centre A et du rayon AG aura pour équation

$$y^2 + x^2 = \beta^2 \ldots \quad (3);$$

éliminant β entre (2) et (3), il viendra

$$y^2 + x^2 = (y + mx)^2,$$

qui équivaut à

$$x\,[(1-m^2)\,x-2my\,]=0.$$

Le facteur $x=0$ donne l'axe des y, sur lequel la droite et la circonférence se coupent toujours.

L'autre facteur

$$(1-m^2)\,x-2my=0 \qquad (5)$$

donne le lieu cherché c'est une droite ,qui passe par le point A.

Or l'abscisse du sommet est moitié de celle du foyer, et son ordonnée est la même. Il suffira donc de changer dans (5) x en $2x$ pour avoir le lieu des sommets. Par là, l'équation (5) devient

$$(1-m^2)\,x-2my=0. \;.\;.\;. \qquad 6).$$

C'est une seconde droite qui passe encore par le point A.

La géométrie conduit immédiatement à la même conséquence; car, pour toutes les paraboles considérées, le point A et l'angle MAG sont invariables, d'après l'hypothèse. Donc l'angle MAF l'est aussi ; donc tous les points F cherchés sont en ligne droite avec le point A, et puisqu'on a toujours $OS=\frac{1}{2}OF$, il est de même pour les points S.