RICHAND

Note relative au lieu des projections d’un point sur les tangentes à une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 436-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__436_1>

NOTE

relative au lieu des projections d'un point sur les tangentes à une courbe.

PAR M. RICHAND,
ancien élève de l'École polytechnique.

I

Théorème. Soit AB (*fig*. 83), une courbe plane quelconque ; P la projection du point D sur la tangente AP : je dis que si M est le milieu de AD, PM sera normale au lieu géométrique des points P.

Soit en effet A'P' une tangente voisine de AP, le cercle décrit sur DQ comme diamètre passera en P et P ; la ligne PP' est donc une sécante commune au cercle et au lieu des projections. Ainsi lorsque la tangente A'P' se rapprochera de AP, la sécante PP' tendra vers la tangente commune au cercle et au lieu géometrique des projections. Mais le cercle tend vers la circonférence décrite sur DA comme diamètre dont le centre est en M. On voit donc que PM est normale au lieu des points P

On verrait de la même manière que dans le cas où P serait une projection oblique, il suffirait pour avoir la normale au nouveau lieu, de joindre le point P au centre du cercle circonscrit au triangle DPA.

Corollaire 1. Le théorème précédent, appliqué au lieu des projections du foyer d'une conique sur les tangentes, conduit immédiatement à ce résultat connu que le lieu est le cercle décrit sur l'axe focal pour l'ellipse et l'hyperbole; et la tangente au sommet pour la parabole; on déduit donc de là cet autre théorème :

Si on projette le foyer d'une conique sur une tangente, la ligne qui joint la projection au milieu du rayon vecteur mené au point de contact de la tangente est un diamètre de la courbe.

Corollaire 2. Méthode graphique pour mener une tangente à la cissoïde par un point donné sur la courbe.

Soit en effet P (*fig.* 84), un point d'une cissoïde regardée comme étant le lieu des projections du sommet d'une parabole sur les tangentes, il suffira de mener par ce point P une tangente PM à une parabole dont le foyer sera déterminé par la condition SF = SK. Comme le point de contact M de cette tangente peut se déterminer graphiquement, la ligne PI menée au milieu de SM sera normale à la cissoïde.

Les constructions indiquées plus haut font voir pareillement que si on projette un point du plan sur les normales à une courbe, il suffira pour avoir la normale au nouveau lieu de joindre un point quelconque de ce lieu au milieu du rayon vecteur mené au centre de courbure de la courbe proposée, situé sur la normale considérée.

II

Méthode inverse des projections sur les tangentes.

On s'est déjà occupé de la recherche du lieu des projections d'un point du plan sur les tangentes à une courbe plane, il est également possible de traiter la question inverse, c'est-à-dire, de regarder une courbe plane comme étant le lieu des projections d'un point du plan sur les tangentes à une autre courbe et de trouver par là même cette autre courbe.

En effet, si MN (*fig.* 85), est la courbe donnée et P le point que l'on a projeté, il suffira de mener les divers rayons PA, PB,... et de chercher le lieu des points Q intersections successives des perpendiculaires AQ, BQ à ces rayons.

Applications. 1° Prenons pour la courbe MN une ligne droite OY, et pour le point P un point situé sur l'axe OX. Le rayon PA aura pour équation

$$y = -\frac{1}{m}(x-a),$$

comme l'ordonnée à l'origine OA $= \frac{a}{m}$ l'équation de la perpendiculaire AQ à ce rayon sera

$$y = mx + \frac{a}{m};$$

on reconnaît là l'équation de la tangente à une parabole dont P est le foyer et OY la tangente au sommet.

On peut au reste trouver le lieu des intersections successives des droites

$$(AQ) \quad y = mx + \frac{a}{m}, \qquad (BQ) \quad y = m'x + \frac{a}{m'}.$$

On a en effet pour l'abscisse du point commun à ces droites

$$(m - m')\,x = \frac{a\,(m - m')}{mm'}; \text{ et pour } \quad m = m', \ x = \frac{a}{m^2};$$

éliminant m, entre $x = \frac{m^2}{a}$ et $y = mx + \frac{m}{a}$, il vient pour le lieu des points Q,

$$y^2 = 4ax.$$

On retrouve donc la parabole.

2° Prenons pour la courbe MN un cercle, l'origine des axes rectangulaires au centre, et le point P sur l'axe des x.

Les équations du rayon PA, et du cercle étant

$$(\mathrm{PA}) \qquad y = -\frac{1}{m}(x-\alpha), \qquad y^2 + x^2 = \mathrm{R}^2,$$

on trouve pour les coordonnées des poins communs :

$$x = \frac{\alpha \pm m\sqrt{\mathrm{R}^2(m^2+1)-\alpha^2}}{m^2+1},$$

$$y = \frac{\alpha m \mp \sqrt{\mathrm{R}^2(m^2+1)-\alpha^2}}{m^2+1}.$$

D'après la valeur de ces coordonnées l'équation réduite de la perpendiculaire AQ au rayon PA sera

$$y = mx \mp \sqrt{m^2\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 - \alpha^2}.$$

On voit que c'est l'équation de la tangente à une conique à centre, dont les axes sont dirigés suivant les axes actuels de a courbe ; P est en outre le foyer, et l'axe focal est égal à R.

On trouve au reste pour le lieu des intersections successives de ces droites :

$$\mathrm{R}^2y^2 + (\mathrm{R}^2-\alpha^2)\,x^2 = \mathrm{R}^2\,(\mathrm{R}^2-\alpha^2),$$

équation d'une ellipse ou d'une hyperbole suivant que l'on a $\mathrm{R} \gtrless \alpha$ c'est-à dire suivant que le point donné est intérieur ou extérieur au cercle.

On retrouve le cercle lui même si $\alpha = 0$.

III

La méthode suivie dans les deux applications précédentes conduirait à des calculs interminables si la courbe primitive était d'un degré élevé ; on peut considérer la question sous un autre point de vue, et une intégration toujours possible conduira au résultat.

Soit $f(u, t) = 0 \ldots.$ (a) l'équation de la courbe primitive ;

$$u - y = p\,(t - x), \ldots.. \qquad (t)$$

l'équation de la tangente à la courbe cherchée ;

$$u-\beta=-\frac{1}{p}(t-\alpha),\ldots \qquad (p)$$

l'équation de la perpendiculaire abaissée du point $(\alpha,\ \beta)$ sur cette tangente. Il est évident que l'élimination de u et t entre les équations (a) (t) (p) conduira à l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Les équations (t) et (p) donnent

$$u=\frac{\frac{y}{p}-x+\alpha+\beta p}{p+\frac{1}{p}},\qquad t=\frac{px+\frac{\alpha}{p}+\beta-y}{p+\frac{1}{p}}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$f\left[\frac{y-px+\alpha p+\beta p}{p^2+1},\qquad \frac{\alpha+\beta p-p(y-px)}{p^2+1}\right]=0.$$

Appliquons ces résultats à la lemniscate

$$(y^2+x^2)^2+a^2y^2-a^2x^2=0.$$

Remplaçons y et x par les valeurs trouvées pour u et t et supposons $\alpha=\beta=0$, il vient pour l'équation différentielle de la courbe cherchée

$$\left[\frac{(y-px)^2+p^2(y-px)^2}{(p^2+1)^2}\right]^2+a^2\frac{(y-px)^2}{(p^2+1)^2}-a^2p^2\frac{(y-px)^2}{(p^2+1)^2}=0,$$

ou, après les reductions faites.

$$(y-px)^2=a^2(p^2-1) \quad \text{et} \quad y=px+a\sqrt{p^2-1},$$

d'ou, en différentiant,

$$0=x\,dp+\frac{ap}{\sqrt{p^2-1}};$$

la solution singulière donne

$$x=\frac{-ap}{\sqrt{p^2-1}},\quad y=\frac{-a}{\sqrt{p^2-1}},\quad p=\frac{x}{y},$$

et par suite

$$y^2-x^2=-a^2.$$

On voit donc que le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur les tangentes est une lemniscate dont les foyers sont aux points où les directrices de l'hyperbole rencontrent l'axe.

Les équations différentielles auxquelles conduira la méthode précédente seront toujours de la forme

$$y = px + F(p)$$

et on sait qu'il est toujours possible d'intégrer ces équations.

(Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, § 270.)