NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité, et équations fondamentales relatives aux courbes de second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 425-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__425_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes de second degré.

(Suite, voir p. 106) (*)

Équation polaire. Foyers, directrices.

XXXIV. Soit z la distance d'un point de la courbe à l'ori-

(*) Voir pour les notations et les identités, t. I, p. 489.

gine; φ = angle que forme cette distance avec l'axe des x; φ' = angle que forme cette distance avec l'axe des y ; on a :

$$\varphi+\varphi'=\gamma\,;\ x\sin\gamma=z\sin\varphi'\,;\ y\sin\gamma=z\sin\varphi\,;$$

mettant ces valeurs de x et de y dans l'équation générale, il vient :

$$z^2\,[\mathrm{A}\sin^2\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi\sin\varphi'+\mathrm{C}\sin^2\varphi]+z\sin\gamma\,[\mathrm{D}\sin\varphi+\mathrm{E}\sin\varphi']+\mathrm{F}\sin^2\gamma=0. \qquad (24)$$

C'est ce qu'on appelle l'*équation polaire* de la courbe; ordinairement, on suppose $\gamma=1^q$ et alors $\sin\varphi'=\cos\gamma$; l'origine se nomme *pôle*, et l'axe des x est l'*axe polaire*.

XXXV. Résolvant l'équation générale polaire, on trouve

$$z=-\frac{1}{2}\sin\gamma\left[\frac{\mathrm{D}\sin\varphi+\mathrm{E}\sin\varphi'\pm\sqrt{l\sin^2\varphi+2n\sin\varphi\sin\varphi'+l'\sin^2\varphi'}}{\mathrm{A}\sin^2\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi\sin\varphi'+\mathrm{C}\sin^2\varphi'}\right]$$

Coroll. 1. Le dénominateur se décompose en deux facteurs réels inégaux, lorsque $m>0$; en deux facteurs réels égaux, lorsque $m=0$; en deux facteurs imaginaires, lorsque $m<0$; cette discussion ramène encore aux trois formes qu'affectent les coniques.

Coroll. 2. Si $n^2-ll'=0$. La quantité sous le radical devient un carré parfait; mais $n^2-ll'=4\mathrm{LF}$ (identités, p. 490) ; donc $\mathrm{F}=0$; alors z est rationnel, et l'une des valeurs de z est évidemment nulle ; ce que donne aussi immédiatement l'équation générale.

Relations correspondant à un foyer à l'origine.

XXXVI. Cherchons les relations qui rendent la quantité sous le radical, indépendante de l'angle variable φ; si cette indépendance est possible, il est évident que la quantité doit rester la même, quelque valeur qu'on donne à φ ; faisant donc successivement $\varphi=0$: $\varphi'=0$; $\varphi=\varphi=\frac{1}{2}\gamma$; on a . $l\sin^2\gamma=$

$l\sin^2\gamma = (l+l')\sin^2\frac{1}{2}\gamma + 2n\sin^2\frac{1}{2}\gamma$; d'où $l=l'$; $n=l\cos\gamma$ (2); admettant cette double relation, la quantité sous le radical devient :

$$l[\sin^2\varphi + \sin^2(\gamma-\varphi) + 2\cos\gamma\sin\varphi\sin(\gamma-\varphi)] =$$
$$l[\sin^2\varphi + \sin(\gamma-\varphi)[(\sin(\gamma-\varphi) + 2\cos\gamma\sin\varphi)] =$$
$$l[\sin^2\varphi + \sin(\gamma-\varphi)\sin(\gamma+\varphi)] = l\frac{[2\sin^2\varphi + \cos 2\varphi - \cos 2\gamma]}{2} =$$
$$l\frac{(1-\cos 2\gamma)}{2} = l\overline{\sin}^2\gamma.$$

Coroll. Si cette double relation subsiste, on a donc

$$z = -\frac{\frac{1}{2}\sin\gamma[\mathrm{D}\sin\varphi + \mathrm{E}\sin\varphi' \pm \sin\gamma\sqrt{l}\,]}{\mathrm{A}\sin^2\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi' + \mathrm{C}\sin^2\varphi'}$$

On voit donc que l doit être positif; $n^2 - ll' = l^2(\cos^2\gamma - 1) =$ 4FL; donc FL est négatif. Ainsi, l'origine dans ce cas est toujours dans l'intérieur de la courbe (XXII, p. 112).

XXXVII. Prenons des axes rectangulaires, alors $l=l'$; $n=0$; remplaçons dans l'équation générale de la courbe, les coefficients A,B,C,D,E,F, par leurs valeurs, tirées des identités, et ayant égard aux deux relations (2), cette équation devient :

$(k^2 - ml)y^2 - 2kk'xy + (k'^2 - ml)x^2 + 2l(k'y + kx) - l^2 = 0$; on peut la mettre sous cette forme :

$(ky + k'x)^2 + (k'y + kx)^2 - [k'y + kx - l]^2 - ml(x^2 + y^2) = 0.$

Développant et réduisant, on obtient

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2 - ml) = (k'y + kx - l)^2, \qquad (a)$$

la polaire de l'origine est $k'y + kx - l = 0$ (p. 113); donc $\frac{k'y + kx - l}{\sqrt{k^2 + k'^2}}$ est la distance d'un point de la courbe à cette polaire, et $\sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de ce même point à l'origine; or, l'équation (a) donne

$$\frac{k'y + kx - l}{\sqrt{k^2 + k'^2}\cdot\sqrt{y^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{k^2 + k'^2 - ml}{k^2 + k'^2}}.$$

Ainsi, la distance d'un point quelconque de la courbe à la polaire de l'origine, divisée par la distance de ce même point à l'origine, donne un quotient constant.

Observation. Ce quotient étant fondamental dans les coniques, nous le désignerons sous le nom spécial de *rapport focal.*

XXXVIII. M. Bret est le premier qui ait démontré directement qu'il existe dans l'intérieur de la parabole un point, et dans les deux autres coniques deux points seulement, tels, qu'en les prenant pour origine, les axes étant rectangulaires, l'équation de la courbe prend la forme (a). Ces points sont les *foyers*. Il établit cette proposition en discutant les équations de condition, qui ramènent l'équation générale à cette forme particulière. (*Annales de Gergonne*, t. VIII, p. 317, année 1817-18.) D'autres ont suivi la même marche, et, d'après un usage généralement suivi en France, sans jamais nommer l'auteur (*) ; c'est une raison pour que nous le nommions toujours.

XXXIX. *Équations des coordonnées des foyers*; *ellipse et hyperbole.*

Prenons l'équation générale, et γ pour angle des axes; transportons l'origine au centre; l'équation devient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \frac{L}{m} = 0.$$

Soient α, β les coordonnées du foyer relatives à ces diamètres pris pour axes; transférons-y derechef l'origine des coordonnées, on aura $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + [2A\beta + B\alpha]y + [2C\alpha + B\beta]x +$

$$+ A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + \frac{L}{m} = 0.$$

Pour que cette origine soit un foyer, on doit poser les deux relations (XXXVI)

(*) Nous devons maintenant excepter M. Cirodde. Voir sa Geometrie analytique, p. 387.

$$(2A\beta + B\alpha)^2 - 4A\left[A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + \frac{L}{m}\right] =$$

$$= (2C\alpha + B\beta)^2 - 4C\left(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + \frac{L}{m}\right),$$

$$(2A\beta + B\alpha)\,(2C\alpha + B\beta) - 2B\left(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + \frac{L}{m}\right) =$$

$$= \cos\gamma\left[(2A\beta + B\alpha)^2 - 4A\left(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + \frac{L}{m}\right)\right],$$

effectuant et réduisant, il vient

$$\alpha^2 - \beta^2 + \frac{4L}{m^2}(C - A) = 0\,, \qquad (b)$$

$$\alpha^2 \cos\gamma + \alpha\beta + \frac{2L}{m^2}(B - 2A\cos\gamma) = 0. \qquad (c)$$

Ces équations représentent deux hyperboles équilatères, concentriques.

Eliminant les quantités connues, il vient

$$2(A - C)\alpha\beta + \alpha^2[B - 2C\cos\gamma] + \beta^2[2A\cos\gamma - B] = 0\,.$$

équation du système de deux droites rectangulaires qui ne sont autres que les axes principaux de la conique (t. I, p. 496); donc les foyers sont sur les axes ou sur les intersections d'une hyperbole équilatère avec deux de ses diamètres rectangulaires; et dans ce cas, un diamètre rencontre toujours, et l'autre, jamais; par conséquent, il existe toujours deux foyers réels et deux foyers imaginaires.

Les deux équations (b) et (c) combinées donnent aussi celle-ci

$$\beta^2\cos\gamma + \alpha\beta = \frac{2L}{m^2}(2C\cos\gamma - B).$$

Eliminant B entre les deux équations (b) et (c) on obtient

$$\alpha^4 \sin^2\gamma + \alpha^2[Q - 2Q'\cos\gamma] - Q'^2 = 0\,;$$

$$Q = \frac{4L}{m^2}(C - A)\,; \quad 2Q' = \frac{L}{m^2}(B - 2A\cos\gamma)\,.$$

d'où

$$2\alpha^2 \sin^2 \gamma = 2Q' \cos \gamma - Q + \sqrt{(2Q' \cos \gamma - Q)^2 + 4Q'^2 \sin^2 \gamma}.$$

On ne prend que le signe $+$, car le signe $-$ donne pour α^2 des valeurs négatives relatives aux foyers imaginaires, or

$$2Q' \cos \gamma - Q = \frac{4L}{m^2} [2A \sin^2 \gamma - N],$$

$$(2Q' \cos \gamma - Q)^2 + 4Q'^2 \sin^2 \gamma = 4Q'^2 - 2QQ' \cos \gamma + Q^2 =$$

$$= \frac{16L^2}{m^2} [(B - 2A \cos \gamma)^2 - 2(C - A)(B - 2A \cos \gamma) \cos \gamma + (C - A)^2]$$

$$= \frac{16L^2}{m^4} [(B - 2A \cos \gamma)(B - 2C \cos \gamma) + (C - A)^2] =$$

$$= \frac{16L^2}{m^4} (N^2 + m \sin^2 \gamma), \quad (V. \text{ t. I, p. } 489),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ainsi} & \alpha^2 \sin^2 \gamma = \dfrac{2L}{m^2} [2A \sin^2 \gamma - N + \sqrt{N^2 + m \sin^2 \gamma}] \\ \text{et} & \beta^2 \sin^2 \gamma = \dfrac{2L}{m^2} [2C \sin^2 \gamma - N + \sqrt{N^2 + m \sin^2 \gamma}] \end{array}\right\} . \quad (25)$$

Telles sont les coordonnées des foyers, relativement à deux diamètres quelconques pris pour axes. On voit que α a deux valeurs égales aux signes près; par conséquent les deux foyers sont à égales distances du centre; $\alpha \sin \gamma$ et $\beta \sin \gamma$ sont les distances du foyer aux deux diamètres pris pour axes. On a

$$\beta = \frac{2L}{m^2} \, \frac{2A \cos \gamma - B}{\alpha} - \alpha \cos \gamma,$$

ainsi, connaissant le signe de α, on a celui de β.

Si, dans l'ellipse, on prend le grand axe $2a$ pour axe des x, et le petit axe $2b$ pour axe des y, on trouve $\alpha^2 = a^2 - b^2$, $\beta^2 = 0$; donc les foyers sont sur le grand axe, et l'on a aussi (*V.* t. I, p. 493)

$$\alpha^2 \sin^2 \gamma = \frac{4AL \sin^2 \gamma}{m^2} - b^2,$$

$$\beta^2 \sin^2 \gamma = \frac{4CL}{m^2} \sin^2 \gamma - b^2$$

On démontre de même que dans l'hyperbole les foyers sont sur le diamètre principal $2a$ qui rencontre ; et l'on a, en général, $\alpha^2 \sin^2\gamma = \frac{4\mathrm{AL}\sin^2\gamma}{m^2} + b^2$,

$$\beta^2 \sin^2\gamma = \frac{4\mathrm{CL}}{m^2}\sin^2\gamma + b^2,$$

où b est le demi-diamètre principal qui ne coupe pas la courbe.

Observation. 1° Les coordonnées des foyers par rapport à des axes quelconques sont donc $\alpha - \frac{k}{m}$ et $\beta - \frac{k'}{m}$.

2° Lorsque les diamètres sont conjugués, l'on a

$$(\alpha^2 + \beta^2)\sin^2\gamma = \mathrm{C}^2 - b^2\cos^2\gamma$$

donc la somme des carrés des distances d'un foyer à deux diamètres conjugués, dans l'ellipse, est un maximum pour les axes principaux et un minimum pour les diamètres conjugués égaux ; dans l'hyperbole, cette somme est un minimum pour les axes principaux, et un maximum pour l'asymptote, considérée comme système de diamètres conjugués coïncidants.

XL. *Distances des foyers au centre; ellipse et hyperbole rapportées au centre.*

Désignant cette distance par c, on a

$$c^4 = \frac{16\mathrm{L}^2}{m^4}[\mathrm{N}^2 + m\sin^2\gamma]. \qquad (26)$$

On parvient à cette expression en calculant le carré de la différence des racines dans l'équation (3) (t. I, p. 493).

XLI. *Coordonnées du foyer dans la parabole.*

Soient toujours α, β les coordonnées du foyer ; transportant l'origine au foyer, il vient

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+D'y+E'x+F'=0,$$
$$D'=2A\beta+B\alpha+D,$$
$$E'=2C\alpha+B\beta+E,$$
$$F'=A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F;$$

les relations focales (XXXVI) donnent

$$D'^2-4AF'=E'^2-4CF',\quad D'E'-2BF'=(D'^2-4AF')\cos\gamma;$$

développant, réduisant et ayant égard à l'équation $m=0$, il vient

$$2k'\beta-2k\alpha+l-l'=0,$$
$$k\beta+\alpha(k'+2k\cos\gamma)+n-l\cos\gamma=0,$$

il n'existe donc qu'un seul foyer, intersection de ces deux droites.

Ces équations donnent

$$\alpha=\frac{2k'l\cos\gamma+k(l-l')-2k'n}{2(k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma)},\ \beta=\frac{2kl'\cos\gamma+k'(l'-l)-2kn}{2(k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma)},$$
$$k(l'-l)-2k'n=k(l+l')-2kl'-2k'n=k(l+l')-4EL,$$
$$k'(l'-l)-2kn=k'(l+l')-4CL,$$
$$k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma=4NL,$$

donc

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{k(l+l')-4EL+2k'l\cos\gamma}{8NL}\\ \beta&=\frac{k'(l+l')-4DL+2kl'\cos\gamma}{8NL}\end{aligned}\right\},\ \text{coordonnées du foyer (27);}$$

rapportant la parabole aux axes principaux et prenant le diamètre principal pour axe des x, il vient $\beta=0$; donc le foyer est sur le diamètre principal.

XLII. *Équation de l'axe principal dans la parabole.*

Cette équation est

$$2Ay+Bx+D=2A\beta+B\alpha+D=\frac{k'+k\cos\gamma}{2N}.$$

En effet l'on a

$$2A\beta + B\alpha + D =$$

$$= \frac{(l+l')(2Ak'+Bk)-4L[2AD+BE-2(A+C)D]+\cos\gamma[4Akl'+2Bk'l+4Lkk'D]}{8NL},$$

$$2Ak'+Bk=0,\quad Bk'l=-2Ckl,$$

$$4Akl'+2Bk'l=4(Akl'-Ckl)=4k[Al'-Cl]=4k[L-Dk'],$$

donc $$2A\beta+B\alpha+D=\frac{k'+k\cos\gamma}{2N}. \qquad (28)$$

Observation. Cette equation de l'axe principal est plus simple que celle qu'on a donnée (XIV, p. 27).

XLIII. *Équation de la directrice dans la parabole.*

La directrice étant la polaire du foyer, l'équation de la directrice est

$$D'y+E'x+D\beta+E\alpha+2F=0,$$

or $$D'=\frac{k'+k\cos\gamma}{N},\quad E'=\frac{k+k'\cos\gamma}{N},$$

$$8NL(D\beta+E\alpha)=(l+l')(Dk+Ek)-4L(D^2+E^2)+2\cos\gamma(Dkl'+Ek'l),$$

les identités donnent $Dk'+Ek=2L$,

$$Dkl'+Dk'n=2DEL,$$

$$Ek'l+Ekn=2DEL,$$

d'où $$Dkl'+Ek'l=2L[2DE-n],$$

ou $$4N[D\beta+E\alpha]=l+l'-2(D^2+E^2)+2\cos\gamma[2DE-n],$$

$$4N[D\beta+E\alpha+2F]=l+l'-2(D^2+E^2)$$

$$+B(A+C)F+2\cos\gamma[2DE-n-4BF]=-l-l'+2n\cos\gamma.$$

Ainsi l'équation de la directrice est

$$2y(k'+k\cos\gamma)+2x(k+k'\cos\gamma)=l+l'-2n\cos\gamma.$$

XLIV. *Coordonnées du point d'intersection du diamètre principal et de la directrice.*

α et β étant les coordonnées du foyer, on a
Equation du diamètre principal

$$2Ay+Bx=2A\beta+B\alpha, \qquad (a)$$

Équation de la directrice

$$y(2A\beta+B\alpha+D)+x(2C\alpha+B\beta+E)=-D\beta-E\alpha-2F,$$

ou bien

$$\beta(2Ay+Bx)+\alpha(By+2Cx)+Dy+Ex=-D\beta-E\alpha-2F.$$

et encore

$$\beta(2Ay+Bx)+\frac{B\alpha}{2A}(2Ay+Bx)+Dy+Ex=-D\beta-E\alpha-2F.$$

Cherchant les intersections du diamètre principal et de la directrice, il vient

$$Dy+Ex=-D\beta-E\alpha-2F-\beta(2A\beta+B\alpha)-\frac{B\alpha}{2A}(2A\beta+B\alpha),$$

ou bien

$$Dy+Ex=-2A\beta^2-2B\alpha\beta-2C\alpha^2-D\beta-E\alpha-2F,$$

combinant cette équation avec l'équation (a), on en tire

$$x=-\frac{4A}{k}(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F)+\alpha,$$

$$y=\frac{2B}{k}(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F)+\beta,$$

car $$-\frac{4C}{k'}=\frac{2B}{k}:$$

on a l'identité

$$A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F=\frac{1}{4A}[(2A\beta+B\alpha+D)^2+2k\alpha+l],$$

$$2k\alpha=\frac{k^2(l+l')-4kEL+2kk'l\cos\gamma}{4NL};\ \text{or}\ k^2=4AL,\ 2kk'=-4BL,$$

donc $$2k\alpha=\frac{A(l+l')-kE-Bl\cos\gamma}{N},$$

$$2k\alpha-l=\frac{A(l+l')-kE-Bl\cos\gamma-Nl}{N},$$

remplaçant dans le numérateur N par sa valeur

$A+C-B\cos\gamma$, il vient $2k\alpha-l=-\dfrac{L}{N}$, et $$2A\beta+B\alpha+D=\frac{k'+k\cos\gamma}{2N},$$

donc

$$A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F=\frac{1}{4A}\left[\frac{k'^2+2kk'\cos\gamma+k^2\cos^2\gamma-4LN}{4N^2}\right]$$
$$=-\frac{L\sin^2\gamma}{4N^2}.$$

Pour parvenir à ce résultat il faut remplacer k'^2, kk', k^2, N, par leurs valeurs, et mettre $\cos^2\gamma=1-\sin^2\gamma$;

donc $$\left.\begin{aligned} x&=\frac{LA}{kN^2}\sin^2\gamma+\alpha=\frac{k\sin^2\gamma}{4N^2}+\alpha \\ y&=\frac{k'\sin^2\gamma}{4N^2}+\beta \end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

XLV. *Coordonnées du sommet de la parabole.*

Le sommet étant au milieu de la distance du foyer à la directrice, on a donc

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha+\frac{k\sin^2\gamma}{8N^2} \\ y&=\beta+\frac{k'\sin^2\gamma}{8N^2} \end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

XLVI. *Distance du sommet au foyer.*

Désignant cette distance par p; l'on a

$$p^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\gamma,$$

où x et y sont les coordonnées du sommet; substituant les valeurs trouvées ci-dessus, on a

$$p^2=\frac{L\sin^4\gamma}{N^3}.\qquad(32)$$

Ainsi deux paraboles sont égales lorsque $\frac{L\sin^4\gamma}{N^3}$ a la même valeur pour les deux; confirmation de ce qui a été trouvé (tome I, p. 493).

XLVII. *Rapport focal dans l'ellipse et l'hyperbole.*

Désignant ce rapport par u, on trouve au moyen de l'équation aux rapports des diamètres principaux

$$u = \frac{2N'(\pm N + N')}{m \sin^2 \gamma}, \qquad N'^2 = N^2 + m \sin^2 \gamma,$$

où N' est positif, dans l'ellipse, on prend $-N$, dans l'hyperbole $\pm N$ où les deux rapports focaux appartiennent aux hyperboles conjuguées. (*La suite prochainement.*)