OSSIAN BONNET

Questions sur les maxima et les minima

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 417-425
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__417_0>

QUESTIONS

Sur les maxima et les minima,

RESOLUES PAR M. OSSIAN BONNET,
ancien élève de l'Ecole polytechnique.

—

I

On sait que x et y *représentant deux variables dont la somme est constante*, *la fonction* $x^m y^n$ *est maximum*, *quand*

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Ce théorème que l'on démontre d'une manière très-simple, sans le secours du calcul differentiel, conduit à la solution d'un grand nombre de questions : on peut, par exemple, ainsi que je le ferai voir dans un autre article, en déduire les conditions de réalité des racines des équations trinômes.

Il existe un théorème analogue, dont on peut faire aussi un grand nombre d'applications, et qui consiste en ce que x et y *étant deux variables dont la différence est constante*, *la fonction* $\frac{x^m}{y^n}$ *est maximum ou minimum quand*

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Je commencerai par demontrer ce théorème qui, je crois, n'est pas assez connu des élèves.

Supposons d'abord $x>y$; posons

$$x-y=a,$$

a étant par conséquent positif. L'expression proposée deviendra

$$\frac{(a+y)^m}{y^n};$$

et il pourra se présenter deux cas (*) ·

1° $m > n$. Dans ce cas, pour $y=0$ et pour $y=\infty$, l'expression proposée devient infinie; cette expression admet donc un minimum pour une valeur positive de y. Cela étant, je fais

$$y = a\,\overline{\tan g}^2\varphi,$$

ce qui donne pour l'expression proposée

$$a^{m-n}\frac{\text{séc}^{2m}\varphi}{\overline{\tan g}^{2n}\varphi}=\frac{a^{m-n}}{\cos^{2(m-n)}\varphi\,\sin^{2n}\varphi};$$

or, $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$ étant constant, le maximum de $\cos^{2(m-n)}\varphi\,\sin^{2n}\varphi$, et par conséquent le minimum de l'expression proposée, a lieu quand

$$\frac{\cos^2\varphi}{m-n}=\frac{\sin^2\varphi}{n},\ \text{d'où}\ \overline{\tan g}^2\varphi=\frac{n}{m-n},$$

et

$$y=\frac{na}{m-n},\ x=a+y=\frac{ma}{m-n};$$

d'où, enfin,

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

2° $m < n$. Dans ce cas, l'expression devient infinie, pour $y=0$, et zéro pour $y=\infty$; elle n'admet donc ni maximum ni minimum pour les valeurs positives de y. Pour $y=-a$ l'expression devient zéro; d'ailleurs pour $y=-\infty$ elle devient aussi zéro; elle admet donc un maximum ou un minimum pour une valeur négative de y plus petite que $-a$. Cela étant, je fais

$$y=-a\,\text{séc}^2\varphi,$$

(*) Je ne considère pas le cas de $m=n$, car alors $x=y=\infty$ rend evidemment l'expression maximum ou minimum.

ce qui donne

$$(-1)^{m+n}\, a^{m-n} \sin^{2m}\varphi \cos^{2(n-m)}\varphi.$$

Or, $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ étant constant, le maximum de $\sin^{2m}\varphi$ $\cos^{2(n-m)}\varphi$, et par conséquent le maximum ou le minimum, suivant que $m+n$ est pair ou impair, de l'expression proposée, a lieu quand

$$\frac{\sin^2\varphi}{m} = \frac{\cos^2\varphi}{n-m} = \frac{1}{n}, \text{ d'où } \operatorname{séc}^2\varphi = \frac{n}{n-m},$$

et $$y = \frac{na}{m-n},\ x = a + y = \frac{ma}{m-n};$$

d'où, enfin, $$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, $x > y$; si au contraire on a $y < x$, on pose

$$y - x = a,$$

ce qui donne pour l'expression proposée :

$$\frac{x^m}{(a+x)^n} = \frac{1}{\frac{(a+x)^n}{x^m}},$$

Alors on déduit aisément de ce qui précède, que si n est $> m$, le maximum de l'expression proposée a lieu, quand

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n};$$

et que si n est $< m$, le minimum ou le maximum, suivant que $m+n$ est pair ou impair, de l'expression proposée a lieu encore quand

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

Le théorème se trouve donc complétement démontré. Nous devons seulement ajouter, pour la distinction du maximum et du minimum, que si la plus grande des variables est affectée du plus grand exposant, le maximum a lieu quand cette plus grande variable se trouve en dénominateur, et le minimum quand elle se trouve en numérateur; et que si la plus grande des variables est affectée du plus petit exposant, le maximum et le minimum sont déterminés comme dans le premier cas, ou inversement, selon que la somme des exposants est un nombre impair ou un nombre pair.

Nous aurons, dans la suite, plusieurs fois occasion d'appliquer le théorème précédent.

II.

Pr. *Trouver dans une parabole donnée la normale à laquelle correspond la plus petite partie intérieure à la courbe.*

Sol. Soit $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole, considérons une de ses normales, et soient x', y' les coordonnées du point où elle rencontre rectangulairement la courbe, et x'', y'' les coordonnées du point où elle rencontre obliquement la courbe; soit enfin δ la distance des deux points x', y' et x'', y''. Nous aurons

$$y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px',$$

$$y' - y'' = \frac{y'}{p}(x'' - x'), \quad \delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Les deux premières équations donnent

$$(y' - y'')^2 = 2p(x'' - x') + 2y'(y' - y''),$$

d'où l'on tire avec la troisième

$$x'' - x' = \frac{2p(p^2 + y'^2)}{y'^2}, \quad y' - y'' = \frac{2(p^2 + y'^2)}{y'},$$

et substituant dans la quatrième

$$\delta = \frac{2(p^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'^2}.$$

Or les deux quantités $p^2 + y'^2$ et y'^2 ont une différence constante, la plus grande placée au numérateur est d'ailleurs affectée du plus grand exposant, donc le minimum de δ a lieu, quand

$$\frac{2}{3}(p^2+y'^2)=y'^2;$$

on a alors

$$y'=\pm p\sqrt{2},\quad x'=p,\quad x''=4p,\quad y''=\pm 2p\sqrt{2},\quad \delta=3\sqrt{3p}.$$

Quant à l'équation de la normale elle est

$$y=\pm\sqrt{2}(x-2p).$$

Cette normale jouit de plusieurs propriétés remarquables : elle est tangente à la développee, au point $(4p, \pm 2p\sqrt{2})$, où elle rencontre obliquement la parabole ; elle est normale à la branche de la developpée située au-dessus de l'axe des x; elle est divisée par l'axe des x dans le rapport de 2 à 1, etc. Ces propriétés se verifient aisément; j'en dois la connaissance à une communication amicale de M. *Serret*.

Le problème que nous venons de résoudre, nous conduit au suivant, dont la solution offre un peu plus de difficulté et exige l'emploi d'une autre méthode.

III

Pr. *Trouver dans l'ellipse les normales auxquelles correspondent la plus grande et la plus petite partie intérieure.*

Sol. Soit $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, l'équation de l'ellipse donnée, considérons une de ses normales, et soient x', y', les coordonnées du point où elle rencontre rectangulairement la courbe, et x'', y'' les coordonnées du point où elle la rencontre obliquement ; soit enfin δ la distance des deux points x', y' et x'', y''. Nous aurons :

$$(1)\quad a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,\qquad (2)\quad a^2y''^2+b^2x''^2=a^2b^2,$$

$$(3)\ y'-y''=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x'-x''),\qquad (4)\ \delta^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(5) \quad a^2(y'-y'')^2+b^2(x'-x'')^2-2a^2y'(y'-y'')-2b^2x'(x'-x'')=0.$$

Des équations (3) et (4), on tire

$$\frac{y'-y''}{a^2y'}=\frac{x'-x''}{b^2x'}=\pm\frac{\delta}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},$$

d'où

$$y'-y''=\pm\frac{\delta a^2y'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},\quad x'-x''=\pm\frac{\delta b^2x'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'equation (5) et simplifiant, on a

$$(6) \qquad (a^6y'^2+b^6x'^2)\delta\mp2(a^4y'^2+b^4x'^2)^{\frac{3}{2}}=0,$$

où on ne doit évidemment prendre que le signe supérieur.

Pour simplifier cette équation appelons X, Y les coordonnees d'une des extrémités du diamètre conjugué de celui qui passe par le point x', y' et a' la demi-longueur de ce diamètre conjugué; nous aurons :

$$Y=\pm\frac{bx'}{a},\qquad X=\mp\frac{ay'}{b},$$

d'où $$X^2+Y^2=a'^2=\frac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2},$$

et $$a^2b^2(a^2X^2+b^2Y^2)=a^6y'^2+b^6x'^2.$$

l'equation (6) revient donc à

$$\delta(a^2X^2+b^2Y^2)=2aba'^3,$$

d'ailleurs on a

$$a^2Y^2+b^2X^2=a^2b^2,$$

multipliant cette dernière égalité par δ et l'ajoutant à la précédente, il vient

$$\delta(a^2+b^2)a'^2=2aba'^3+a^2b^2\delta,$$

ou enfin $$2aba'^3-\delta(a^2+b^2)a'^2+a^2b^2\delta=0. \qquad (7)$$

Maintenant pour avoir les limites de δ, il faut, comme l'on sait, chercher les conditions de possibilité du problème, où il s'agit de déterminer a', connaissant δ. Or ces conditions, sont évidemment que l'équation ci-dessus admette pour a' une valeur réelle comprise entre a et b; pour les exprimer analytiquement, changeons a' en $\frac{1}{x}$, et appliquons le théorème de M. *Sturm* à l'équation transformée, nous aurons pour la suite

$$X = x^3 - \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}x + \frac{1}{ab\delta},$$

$$X_1 = 3x^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$

$$X_2 = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}x - \frac{3}{ab\delta},$$

$$X_3 = \frac{(a^2+b^2)^3}{a^4b^4} - \frac{27}{\delta^2}.$$

On doit d'abord avoir

$$\frac{(a^2+b^2)^3}{a^4b^4} - \frac{27}{\delta^2} > 0, \quad \text{d'où} \quad \delta > \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}}.$$

En effet, cette condition est celle de la réalité des racines de l'équation transformée; or cette équation ayant une racine réelle négative, si elle en a une autre comprise entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, ce que nous voulons exprimer, elle en aura trois réelles.

Portons ensuite successivement $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, en place de x dans la suite; il vient, abstraction faite des facteurs positifs,

pour $\frac{1}{b}$: $2a-\delta$, $2a^2-b^2$, $\delta(a^2+b^2)-3ab^2$, $\delta^2(a^2+b^2)^3-27a^4b^4$,

pour $\frac{1}{a}$: $2b-\delta$, $2b^2-a^2$, $\delta(a^2+b^2)-3a^2b$, $\delta^2(a^2+b^2)^3-27a^4b^4$.

Les résultats provenant de la substitution de $\frac{1}{b}$ sont tous positifs, cela est évident pour les deux premiers et le quatrième de ces résultats, et pour le troisième cela résulte de

$$\delta > \frac{3a^2b^2\sqrt{3}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} > \frac{3a^2b}{a^2+b^2}.$$

Il suffit donc que les résultats provenant de la substitution de $\frac{1}{a}$, forment au moins une variation, cette condition est remplie, si l'on a $2b^2 - a^2 < 0$. Ainsi dans ce cas la condition cherchée se réduit a celle de la réalité des racines qui nous a donné

$$\delta > \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}};$$

si l'on a $2b^2 - a^2 < 0$, on aura aussi

$$\delta(a^2+b^2) - 3a^2b > 0.$$

Cela résulte de

$$\delta > \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}} > \frac{3a^2b}{a^2+b^2},$$

il faudra donc dans ce cas que l'on ait, avec la condition de la réalité des racines,

$$2b - \delta < 0 \quad \text{ou} \quad \delta > 2b.$$

Du reste, cette dernière condition comprend la premiere, ainsi qu'il est facile de le voir.

On conclut aisément de ce qui precède. le maximum de δ est toujours $2a$, ce qui est evident à priori, et le minimum est

$$\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad 2b,$$

selon que $2b^2 - a^2$ est $<$ ou $>$ 0

Dans le cas où

$$\delta = \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}},$$

l'equation (7) a deux racines égales, alors a' vérifie l'equation

$$3aba'^2 - \delta(a^2+b^2)a' = 0,$$

et par conséquent est égal à

$$\frac{\delta\,(a^2+b^2)}{3ab} = ab\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}}.$$

Dans le même cas

$$X = \pm\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}},\quad Y = \pm\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}},$$

$$x' = \pm\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}},\quad y' = \mp\frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}},$$

$$x'' = \pm\frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}},\quad y'' = \pm\frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On reconnaît aisément que les valeurs de x'' et de y'' vérifient l'équation de la développée de l'ellipse

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

On peut donc conclure que dans l'ellipse comme dans la parabole, la normale à laquelle correspond la plus petite partie intérieure est tangente à la développée de l'ellipse au point où cette développée rencontre l'ellipse, bien entendu lorsque cette rencontre a lieu, c'est-à-dire quand a^2-2b^2 est >0. Quand a^2-2b^2 est <0, la normale en question n'est autre que le petit axe de l'ellipse. (*La suite prochainement.*)