NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. A. LE COINTE

Théorème sur les nombres combinés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 372-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__372_1>

THÉORÈME SUR LES NOMBRES COMBINÉS.

PAR L. A. LE COINTE.

Si on a un nombre pair $2m$ de quantités, toutes positives,

$$(1) \qquad a_1\ a_2\ a_3\, a_4\ .\ .\ .\ .\ a_m\ a_{m+1}\ a_{m+2}\ .\ .\ .\ .\ a_{2m},$$

rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, et si A_1 est le produit des m premières, et A_2 celui des m dernières, la quantité $A_1 + A_2$ sera maximum parmi toutes celles que l'on pourra former, en prenant les produits m à m des quantités de la suite (1), et ajoutant ces produits deux à deux.

Démonstration. Soit $B_1 + B_2$ une quantité analogue à $A_1 + A_2$, c'est-à-dire une quantité telle que B_1 est le produit de m des quantités de la suite (1) et B_2 celui des m autres, je dis que, B_1 et B_2 étant différents de A_1 et A_2, on aura

$$B_1 + B_2 < A_1 + A_2 ;$$

En effet, on a,

$$B_1 < A_2 \qquad B_2 < A_2,$$
$$B_1 > A_1 \qquad B_2 > A_1;$$

d'où il résulte, quel que soit le signe de $B_2 - B_1$,

$$(A_2 - A_1)^2 > (B_2 - B_1)^2 \ (1) ;$$

mais on a

$$4A_2A_1 = 4B_2B_1;$$

d'où, en ajoutant cette dernière égalité à l'inégalité (1), on aura

$$(A_2 + A_1)^2 > (CB_2 + B_1)^2;$$

d'où, attendu que $A_2 + A_1$ et $B_2 + B_1$ sont toujours deux quantités positives,

$$A_2 + A_1 > B_2 + B_1 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2. Le théorème précédent est un cas particulier de cet autre plus général, qu'il serait facile de démontrer.

Théorème. Si on a un nombre mn de quantités, toutes positives, rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, et formant ainsi une suite que nous désignons par S; si on divise la suite (à partir du commencement de cette suite) en n tranches, chacune composée de m de ces quantités;

Si A_1 est le produit des quantités renfermées dans la première tranche,

A_2, le produit des quantités renfermées dans la deuxième,

A_3, le produit des quantités renfermées dans la troisième, et ainsi de suite, et enfin ,

Si A_n est le produit des quantités renfermées dans la $n^{ième}$ tranche , la quantité

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

sera maximum parmi toutes celles que l'on pourra former en prenant les produits m à m des quantités de la suite S , en ajoutant ces produits n à n.

Observation. Le théorème existe aussi pour un nombre impair $2m + 1$; mais alors A_1 est le produit minimum des m premières quantités, et A_2 le produit maximum des $m + 1$ dernières quantités. Tm.