

L. A. LE COINTE

Théorème sur les nombres combinés

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 372-374

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__372_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES NOMBRES COMBINÉS.

PAR L. A. LE COINTE.

Si on a un nombre pair $2m$ de quantités, toutes positives,

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{2m},$$

rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, et si A_1 est le produit des m premières, et A_2 celui des m dernières, la quantité $A_1 + A_2$ sera maximum parmi

toutes celles que l'on pourra former, en prenant les produits m à m des quantités de la suite (1), et ajoutant ces produits deux à deux.

Démonstration. Soit $B_1 + B_2$ une quantité analogue à $A_1 + A_2$, c'est-à-dire une quantité telle que B_1 est le produit de m des quantités de la suite (1) et B_2 celui des m autres, je dis que, B_1 et B_2 étant différents de A_1 et A_2 , on aura

$$B_1 + B_2 < A_1 + A_2;$$

En effet, on a,

$$B_1 < A_2, \quad B_2 < A_1,$$

$$B_1 > A_1, \quad B_2 > A_2;$$

d'où il résulte, quel que soit le signe de $B_2 - B_1$,

$$(A_2 - A_1)^2 > (B_2 - B_1)^2 \quad (1);$$

mais on a

$$4A_2A_1 = 4B_2B_1;$$

d'où, en ajoutant cette dernière égalité à l'inégalité (1), on aura

$$(A_2 + A_1)^2 > (B_2 + B_1)^2;$$

d'où, attendu que $A_2 + A_1$ et $B_2 + B_1$ sont toujours deux quantités positives,

$$A_2 + A_1 > B_2 + B_1, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

2. Le théorème précédent est un cas particulier de cet autre plus général, qu'il serait facile de démontrer.

Théorème. Si on a un nombre mn de quantités, toutes positives, rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, et formant ainsi une suite que nous désignons par S ; si on divise la suite (à partir du commencement de cette suite) en n tranches, chacune composée de m de ces quantités;

Si A_1 est le produit des quantités renfermées dans la première tranche,

A_2 , le produit des quantités renfermées dans la deuxième,

A_3 , le produit des quantités renfermées dans la troisième, et ainsi de suite,

et enfin ,

Si A_n est le produit des quantités renfermées dans la $n^{ième}$ tranche , la quantité

$$A_1 + A_2 + A_3 + . . . + A_n .$$

sera maximum parmi toutes celles que l'on pourra former en prenant les produits m à m des quantités de la suite S , en ajoutant ces produits n à n .

Observation. Le théorème existe aussi pour un nombre impair $2m + 1$; mais alors A_1 est le produit minimum des m premières quantités , et A_2 le produit maximum des $m + 1$ dernières quantités. Tm.