NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIDAL

Solution du problème 43

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 365-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__365_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 43 (p. 519, t. I).

PAR M. VIDAL,
Eleve au collége de Montpellier.

Lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont normaux à une conique donnée.

Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse, l'équation générale de la normale à cette courbe est

$$y = mx + \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}} \qquad (2)\ (*)$$

d'où l'on tire :

$$b^2x^2m^4 - 2b^2xym^3 + (a^2x^2 - b^2 - c^4)\ m^2 - 2a^2xym + \\ + a^2y^2 = 0 \qquad (2).$$

Supposons que dans cette équation x et y soient des quantités constantes, alors elle nous fera connaître les valeurs de m qu'il faut porter dans l'équation (1) pour avoir toutes les

---

(*) Forme très-commode indiquée par M. Comte, Traité élém. de géom. anal., p. 358.

normales qui passent par le point (x, y). Si j'exprime que le produit de deux racines de l'équation ci-dessus est égal à l'unité, j'aurai exprimé que par le point (x, y) il y a deux normales qui sont rectangulaires, cela me donnera une relation entre x et y qui sera le lieu demandé. Il n'y a donc plus qu'à exprimer que l'équation (2) a deux racines dont le produit est égal à -1 ; pour simplifier les calculs, je désignerai par a, b, c, d les coefficients de l'équation lorsque celui du premier terme est l'unité, et par p, q, r, s, les trois racines de l'équation ; nous aurons alors les relations suivantes :

$$p+q+r+s=-a.$$
$$rs+pq+pr+ps+qr+qs=b.$$
$$pqr+pqs+prs+qrs=-c.$$
$$pqrs=d.$$
$$pq=-1.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer p, q, r, s entre ces équations.

Je puis écrire la deuxième équation comme il suit :

$$(p+q)(r+s)+rs+pq=b;$$

la troisième :

$$rs(p+q)+pq(r+s)=-c.$$

Dans ces deux équations et dans la quatrième, remplaçons pq par sa valeur -1, elles donneront :

$$(p+q)(r+s)+rs-1=b.$$
$$rs(p+q)-(r+s)=-c.$$
$$rs=-d.$$

D'où

$$(p+q)(r+s)-d-1=b \ldots (3).$$
$$d(p+q)+(r+s)=c.$$

Ces deux équations réunies à l'équation

$$p+q+r+s=-a,$$

permettront facilement l'élimination de p, q, r, s; de la deuxième je tire

$$r+s=c-d\,(p+q);$$

remplaçânt dans la troisième $r+s$, par cette valeur, il vient

$$p+q+c-d\,(p+q)=-a.$$

D'où

$$p+q=-\frac{a+c}{1-d}.$$

Nous aurons parconséquent

$$r+s=\frac{c+ad}{1-d}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), nous trouvons que l'équation de condition cherchée est :

$$-\frac{(c+ad)\,(a+c)}{(1-d)^2}-(d+1)=b\,,$$

ou bien, en chassant le dénominateur,

$$(c+ad)\,(a+c)+(d+1)\,(1-d)^2+b\,(1-d)^2=0.$$

Il n'y a plus maintenant qu'à remplacer dans cette équation a, b, c, d, par leurs valeurs; or nous avons :

$$a=-\frac{2y}{x},\ b=\frac{a^2x^2+b^2y^2-c^4}{b^2x^2},\ c=-\frac{2a^2y}{b^2x},\ d=\frac{a^2y^2}{b^2x^2}.$$

En remplaçant dans l'équation de condition trouvée ci-dessus, il vient :

$$\left(\frac{2y}{x}+\frac{2a^2y}{b^2x}\right)\left(\frac{2a^2y}{b^2x}+\frac{2a^2y^3}{b^2x^3}\right)+\left(1+\frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right)\left(1-\frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right)^2+$$
$$\left(\frac{a^2x^2+b^2y^2-b^4}{b^2x^2}\right)\left(1-\frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right)^2=0;$$

d'où, en chassant les dénominateurs et réduisant, on obtient :

$$(a^2+b^2)\,(x^2+y^2)\,(a^2y^2+b^2x^2)^2=c^4\,(a^2y^2-b^2x^2)^2.$$

Voilà, en définitive qu'elle est l'équation du lieu géométrique cherchée. C'est une équation du sixième degré. On voit que la courbe est symétrique par rapport aux axes, ainsi que cela doit être par la nature de la question. Pour faciliter la discussion de la courbe, je vais passer de cette equation en coordonnées rectilignes, à la même équation en coordonnées polaires; pour cela il n'y a qu'à remplacer x par $\rho\cos\omega$, et y, par $\rho\sin\omega$, il vient :

$$\rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\;\frac{b^2-a^2\operatorname{tang}^2\omega}{b^2+a^2\operatorname{tang}^2\omega}$$

Si dans cette expression nous faisons $\omega=0$, on a

$$\rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

La valeur de ρ est plus petite que c, cela détermine un point sur l'axe des x, le point D (*fig.* 71).

Lorsqu'on fait $\qquad \operatorname{tang}^2\omega=\frac{b^2}{a^2},$

la valeur du rayon vecteur est égale à zéro, mais cette condition sera satisfaite lorsqu'on aura la direction des diamètres conjugués égaux; il s'ensuit donc que suivant la directrice OG et la directrice OG', ρ est égal à zéro, la droite GG' est donc tangente à la courbe, à l'origine des coordonnées; il en sera de même de la droite HH', si nous faisons $\omega=\frac{\pi}{2}$, on a encore

$$\rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cela déterminera sur le petit axe de l'ellipse les deux points E, E', points où la courbe cherchée coupe le petit axe. Ces points sont hors de l'ellipse si $a^2>3b^2$; sur l'ellipse, si $a^2=3b^2$, et dans l'intérieur si $a^2<3b^2$.

Ainsi la courbe est inscrite dans le cercle concentrique à l'ellipse, et d'un rayon égal à

$$\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La courbe cherchée est donc composée de quatre parties symétriques par rapport aux axes de la courbe, et comprises dans les angles que les diamètres égaux font entre eux. Si dans l'équation de la courbe en change ω en $\pi + \omega$, la valeur de ρ ne change pas, cela nous montre donc que les parties de la courbe comprises dans les angles opposés au sommet des diamètres égaux, sont égales, mais les quatre parties ne sont pas égales entre elles, parce que la valeur de ρ change lorsqu'on change ω en $\pi - \omega$. Il y a quatre points d'inflexion à l'origine, la partie de la courbe qui est comprise dans l'intérieur des angles obtus des diamètres égaux, est plus ouverte que celle qui est comprise dans l'intérieur des angles aigus, on peut donc tracer la courbe qui aura la forme qu'on lui voit sur la figure (71). Si l'ellipse devenait un cercle, la courbe se réduirait à l'origine, ce que nous aurions pu facilement prévoir d'avance.

Pour avoir l'équation de la courbe dans le cas de l'hyperbole, il n'y a qu'à changer dans celle qui se rapporte à l'ellipse b^2 en $-b^2$, ce qui donne,

$$\rho = \frac{c^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \; \frac{(a^2 \tang^2\omega + b^2)}{a^2 \tang^2\omega - b^2}$$

pour que cette courbe existe, il faut que l'axe focal soit plus grand que son conjugué; cela étant, la discussion directe de la courbe nous montre qu'elle a les mêmes asymptotes que l'hyperbole, et qu'elle a la forme qu'on lui voit, sur la figure 72; cette courbe a quatre points singuliers à l'origine des coordonnées, et se compose de quatre branches infinies; une dans chaque angle des asymptotes, correspondante aux normales appartenant à une même branche ou à deux branches différentes de l'hyperbole, on ne l'a pas tracée.

Il ne faut pas croire cependant que ce sont là deux hyperboles conjuguées, comme il le semblerait.

Si $a = b$, c'est-à-dire si l'hyperbole devient équilatère, il reste $\rho = \infty$, ce qui donne un point situé à l'infini, car il est évident qu'alors il n'y a que les asymptotes qui soient des triangles rectangulaires, ce qui donne pour les normales rectangulaires un point situé à l'infini.

La marche que nous avons employée ponr l'ellipse pourrait s'appliquer avec beaucoup plus de facilité à la parabole, le lieu cherché est alors une parabole, ayant même axe que la parabole donnée, le sommet est à une distance $\frac{3}{2}p$ de l'origine, et le paramètre est le quart du paramètre de la parabole donnée (*).