NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HUET

Questions d'examen. Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 353-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__353_1>

QUESTIONS D'EXAMEN.

Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés.

PAR M. HUET,
Regent de physique au college de Pamiers, ancien professeur de mathematiques speciales à l'ecole de Sorrèze.

Lorsqu'un polygone régulier tourne autour d'un de ses côtés, on peut se proposer de déterminer en fonction de son côté c le volume qu'il engendre.

Nous résoudrons cette question pour les polygones réguliers les plus simples : le triangle, le carré, le pentagone, l'hexagone, l'octogone, le décagone, le dodécagone.

Deux méthodes se présentent naturellement. La première consiste à calculer le volume d'après le théorème de Guldin, et la seconde à décomposer le volume engendré en plusieurs autres dont la géométrie élémentaire donne l'expression. Nous emploierons d'abord la seconde, et la première nous fournira ensuite une vérification pour les résultats.

Désignons par c le côté du polygone, par R le rayon du cercle circonscrit à ce polygone, et par r l'apothème.

1° *Triangle.*

On a évidemment

$$\text{vol}\,T = \frac{1}{3}AB.\pi\overline{CD}^2 = \frac{1}{3}c.\pi.\frac{3}{4}c^2 = \frac{1}{4}\pi c^3 \quad (\textit{fig. } 73)$$

2° *Carré.*

Ici, sans aucun calcul, on trouve $\text{vol}\,C = \pi c^3$

3° *Pentagone* (*fig.* 74).

Menons sur AB les perpendiculaires DG et CI ; joignons CE, EB et DB. On a évidemment $\text{vol}\,P = 2\,\text{vol}\,DCBG$. Or $\text{vol}\,DCBG = \text{vol}\,DCIG - \text{vol}\,BIC$.

Soit D la diagonale $DB = EC = EB$. Le quadrilatère inscrit BCDE donne $BD.EC = BC.DE + CD.BE$, ou $D^2 = c^2 + c.D$,

d'où $\quad D^2 - cD = c^2$, d'où $\quad D = \frac{1}{2}c(1 + \sqrt{5})$.

$$\overline{DG}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BG}^2 = D^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}).$$

$$GI = FC = \frac{D}{2} = \frac{c}{4}(1 + \sqrt{5}); \quad BI = GI - BG = \frac{c}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\overline{CI}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BI}^2 = c^2 - \frac{c^2}{16}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{c^2}{8}(5 + \sqrt{5}).$$

Cela posé, $\text{vol}\,DCIG = \frac{1}{3} GI.\pi(\overline{DG}^2 + \overline{CI}^2 + DG.CI) =$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{4}c.\pi(1 + \sqrt{5})\left\{\frac{c^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}) + \frac{c^2}{8}(5 + \sqrt{5}) + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{8}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}\right\} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}\pi c^3(1 + \sqrt{5})$$

$\left\{15 + 5\sqrt{5} + \sqrt{70 + 30\sqrt{5}}\right\}$ en simplifiant le radical $\sqrt{70 + 30\sqrt{5}}$ d'après une formule connue, on a

$$\text{vol}\,DCIG = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}\pi c^3(1 + \sqrt{5})\left\{15 + 5\sqrt{5} + 5 + 3\sqrt{5}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{8}\pi c^3(1 + \sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{8}\pi c^3(15 + 7\sqrt{5})$$

$$\text{vol}\,BCI = \frac{1}{3} BI.\pi\overline{CI}^2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}c(\sqrt{5} - 1)\pi\frac{c^2}{8}(5 + \sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{8}\pi c^3\sqrt{5},$$

donc

$$\text{vol}\,DCBG = \frac{1}{3}.\frac{1}{8}\pi c^3(15 + 6\sqrt{5}) = \frac{1}{8}\pi c^3(5 + 2\sqrt{5});$$

donc enfin $\qquad \text{vol}\,P = \frac{1}{4}\pi c^3(5 + 2\sqrt{5}).$

4° *Hexagone* (*fig.* 75).

Menons les droites AE, BD, FC; abaissons CI perpendiculaire sur AB, et représentons par H l'hexagone, par R le rectangle ABDE, par T le trapèze DCIB, par t le triangle DCB, et par t' le triangle BCI. On a évidemment

$$\text{vol}\,H = \text{vol}\,R + 2\,\text{vol}\,t = \text{vol}\,R + 2(\text{vol}\,T - \text{vol}\,t').$$

Or $\qquad \text{vol}\,R = AB.\pi\overline{AE}^2 = c\pi.3c^2 = 3\pi c^3$

$$\text{vol}\,t = \text{vol}\,T - \text{vol}\,t' = \frac{1}{3}\,BI\left(\overline{BD}^2 + \overline{CI}^2 + BD.CI - \overline{CI}^2\right)\pi =$$

$$= \frac{1}{3}\,BI\,.\,BD\,(BD + CI)\,\pi = \frac{1}{3}\,\pi BI\,.\,2CI\,.\,3CI = 2\pi BI\,.\,\overline{CI}^2 =$$

$$= c.\pi.\,\frac{3}{4}\,c^2 = \frac{3}{4}\,\pi c^3\,;$$

donc $$2\,\text{vol}\,t = \frac{3}{2}\,\pi c^3\,;$$

et partant $$\text{vol}\,H = 3\pi c^3 + \frac{3}{2}\,\pi c^3 = \frac{9}{2}\,\pi c^3.$$

5° *Octogone* (*fig.* 76).

$$\text{vol}\,O = \text{vol}\,ABEF + 2\,\text{vol}\,EDCB = \text{vol}\,R + 2\,\text{vol}\,K.$$

Or $\text{vol}\,K = \text{vol}\,EDIB - \text{vol}\,BIC = \text{vol}\,T - \text{vol}\,T'$.

On a d'ailleurs

$$qm = bB = bC = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}\,;\; BE = mn = 2om = 2(oq + qm) =$$

$$2\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\sqrt{2}\right) = c\,(1 + \sqrt{2})\,;\; BI = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}\,;$$

$$DI = DC + CI = c + \frac{c}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\,c\,(2 + \sqrt{2})\,;$$

cela posé, on a

$$\text{vol}\,R = AB.\pi\overline{BE}^2 = c.\pi.c^2\,(1 + \sqrt{2})^2 = \pi c^3\,(3 + 2\sqrt{2})\,;$$

$$\text{vol}\,K = \text{vol}\,T - \text{vol}\,T' = \frac{1}{3}\,\pi\,BI\left(\overline{BE}^2 + \overline{DI}^2 + BE.DI - \overline{CI}^2\right) =$$

$= \frac{1}{3}\,BI.BE.\pi\,(BE + DI + c)$, en observant que

$$\overline{DI}^2 - \overline{CI}^2 = (DI + CI)\,(DI - CI) = BE.c.$$

Ainsi donc $$\text{vol}\,K = \frac{1}{3}\,\pi.\frac{c}{2}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2})\left(3c + \frac{3c}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi c^3\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2})\,(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi c^3 (2 + \sqrt{2}) (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\pi c^3 (3 + 2\sqrt{2}).$$

Donc $2 \operatorname{vol} K = \pi c^3 (3 + 2\sqrt{2}) = \operatorname{vol} R$, résultat remarquable.

Donc $\operatorname{vol} O = 2\pi c^3 (3 + 2\sqrt{2})$.

(*La suite prochainement.*)