BRETON (DE CHAMP)

Note sur la possibilité de trouver une courbe algébrique fermée qui soit carrable

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 351-353
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__351_1>

NOTE SUR LA POSSIBILITÉ

de trouver une courbe algébrique fermée qui soit carrable

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées

Comment démontrer, demande M. Terquem, p. 267, par des moyens quelconques cette proposition de Newton : *qu'il n'existe aucune courbe algébrique fermée carrable ?*

Il est à croire que l'illustre géomètre n'attachait pas à la

---

recherche des racines commensurables, la formation numérique des polynomes dérivés, la recherche des limites et le calcul de la séparation des racines réelles. Ch proposition dont il s'agit, un sens bien général ; car voici, ce nous semble, un exemple propre à éclaircir ce sujet.

Soit construite la courbe donnée par l'équation du quatrième degré,

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

que nous supposons rapportée à des coordonnées rectangulaires. On verra qu'elle est limitée dans tous les sens, et qu'elle se compose de deux branches ou boucles *fermées* réunies entre elles à l'origine.

Cette courbe paraît donc être dans les conditions que Newton aurait jugées incompatibles avec une exacte quadrature.

C'est pourtant ce qui n'arrive point, car l'application des règles les plus simples de calcul intégral conduit aux expressions suivantes :

Aire comprise entre l'origine et une parallèle quelconque à l'axe des y,

$$\frac{2}{3}a^2\left(1 - \frac{y^3}{x^3}\right) = \frac{2}{3}a^4\left\{1 - \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}\right\};$$

Aire comprise entre la même parallèle et le sommet qui se trouve sur l'axe des x dans la même branche,

$$\frac{2}{3}a^2\frac{y^3}{x^3} = \frac{2}{3}\frac{a^2 - x^2}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

courbe entière $\qquad \dfrac{4}{3}a^2.$

Toutes ces expressions sont, comme on sait, susceptibles d'être construites géométriquement avec la règle et le compas.

Note du rédacteur. Newton s'exprime ainsi : « Nulla exstat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri (Princip. Philos. Nat. Lib 1. Lemma XXVIII) »

Les raisonnements que fait Newton pour établir ce lemme exigent que l'*ovale* soit une courbe fermée et *entièrement* détachée des autres branches, et qu'il n'y ait pas de points multiples; ce qui n'a pas lieu dans la courbe proposée, espèce de lemniscate à deux branches fermées contiguës et ayant au point commun deux tangentes bissectrices des angles des axes.

Le lemme est terminé par cette observation · « De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus. »

Le théorème de M. Cauchy sur les contours fermés, relativement aux racines imaginaires (*V.* t. I, page 443, § 6), est sujet aux mêmes restrictions que le lemme cité et par les mêmes raisons.

Saurin a employé le même tour de raisonnement que Newton pour établir l'impossibilité de rectifier, soit le cercle, soit l'ellipse (Mém. de l'Acad. de Paris, 1720). Ce sont les premiers linéaments de cette logique *fonctionnelle* que Bernoulli (Jean) a mise en usage pour démontrer le parallélogramme des forces, et que de nos jours Legendre a appliquée aux théorèmes fondamentaux de la géométrie. Il semble qu'il reste là quelques nuages à faire disparaître. Tm.