NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EDOUARD MERLIEUX

Élimination entre deux équations du 2e degré à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 34-35

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__34_1>

ÉLIMINATION

ENTRE DEUX ÉQUATIONS DU 2e DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

Soient les deux équations suivantes entre lesquelles il faut éliminer y ·

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

ou bien, ordonnant par rapport à y,

$$Ay^2 + (Bx + D)y + Cx^2 + Ex + F = 0$$
$$A'y^2 + (B'x + D')y + C'x^2 + E'x + F' = 0$$

Posant

$$M = Bx + D;\ \ M' = B'x + D';\ \ N = Cx^2 + Ex + F;$$
$$N' = C'x^2 + E'x + F',$$

on peut mettre ces équations sous la forme

$$Ay^2 + Mx + N = 0 \qquad A'y^2 + M'y + N' = 0$$

Multipliant la première par A′, la seconde par A, et retranchant le dernier résultat du premier, il vient

$$(MA'-AM')y+NA'-AN'=0 \qquad \text{d'où } y=\frac{AN'-A'N}{MA'-AM}$$

Remplaçant M, M′, N, N′, par leurs valeurs :

$$y=\frac{A(C'x^2+E'x+F')-A'(Cx^2+Ex+F)}{A'(Bx+D)-A(B'x+D')}$$

$$=\frac{(AC'-A'C)x^2+(AE'-A'E)x+(AF'-A'F)}{(A'B-AB')x+(A'D-AD')}$$

Désignons, avec Bezout, $(AC'-A'C)$ par la notation $[AC']$; de même $(AE'-A'E)$ par $[AE']$, et ainsi des autres ; on a

$$y=\frac{[AC']x^2+[AE']x+[AF']}{[A'B]x+[A'D]};$$

remplaçons y par sa valeur, dans la première équation, on aura

$$A\left[\frac{[AC']x^2+[AE']x+[AF']}{[A'B]x+[A'D]}\right]^2$$

$$+(Bx+D)\left[\frac{[AC']x^2+[AE']x+[AF']}{[A'B]x+[A'D]}\right]+Cx^2+Ex+F=0$$

$$A\,[[AC']x^2+[AE']x+[AF']]^2$$
$$+(Bx+D)\,[[AC']x^2+[AE']x+[AF']]\,[[A'B]x+[A'D]]$$
$$+(Cx^2+Ex+F)\,[[A'B]x+[A'D]]^2=0$$

Ordonnant par rapport à x, et simplifiant les coefficients, il vient, après avoir divisé par A,

$$[[AC']^2-[AB'][BC']]\,x^4$$
$$+[2[AC'][AE']-[AB']([BE']-[CD'])-[BC'][AD']]\,x^3$$
$$+[[AE']^2+2[AC'][AF']-[AB']([BF']+[DE'])-[AD']([BE']-[CD'])]\,x^2$$
$$+[2[AF'][AE']-[AD']([BF']+[DE'])-[AB'][DF']]\,x$$
$$+[[AF']^2-[AD'][DF']]=0\ (*).$$

(*) Bezout, *Théorie générale des équations*, p. 235. Dans le coefficient de x de cet auteur, il faut mettre ef' au lieu de ef'. Tm