NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CHEVILLARD

Note sur la variation des limites dans les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 343-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__343_1>

NOTE SUR LA VARIATION DES LIMITES

DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR A. CHEVILLARD,

Ancien élève à l'École polytechnique, professeur au collé e de Sorrèze

—

1. La représentation par une courbe parabolique des variations que subit le premier membre d'une équation algébrique entre les limites de ses racines réelles a suffi pour montrer simplement l'incertitude de la méthode d'approximation de Newton et pour faire imaginer des procédés plus exacts de séparation des racines incommensurables. L'examen des variations des limites mêmes permet de résoudre très-simplement plusieurs questions sur la croissance et la décroissance des polynômes, et comme ces questions ne sont pas examinées dans la plupart des traités, je n'ai pas cru inutile d'en parler. Je rappellerai qu'étant donné un polynôme algébrique $f(x)$, la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x, la touchante à la courbe $y=f(x)$ au point (x, y) est la dérivée première $f'(x)$, de sorte que $f'(x)=0$ donnera les abscisses des points maxima, minima, $f'' x = 0$ donnera les abscisses des points d'inflexion, etc., etc., et qu'en général les signes de ces deux dérivées indiqueront exactement la forme de la courbe aux environs du point (x, y).

2. *Étant donné un polynôme algébrique* $X = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots$, *on propose de trouver des valeurs positives de* x *qui rendent* X *de même signe que le premier terme, telles que des valeurs plus grandes produisent le même effet, et que par la croissance de ces valeurs, le polynôme* X *croisse numériquement autant qu'on voudra.*

Si l'on n'exigeait pas que la croissance des valeurs substituées entraînât celle du polynôme, la recherche d'une limite supérieure des racines positives d'une équation algébrique répondrait à la question. Car si A est positif, toute limite supérieure L des racines de $X=0$ rendra X positif, et tout nombre plus grand que L en fera autant, et si A est négatif, une limite supérieure des racines de $-X=0$ rendra toujours $-X$ positif, par conséquent X négatif, et tout nombre plus grand produira sur X le même effet.

3. Pour résoudre entièrement la question, il faudrait que $x >$ ou $= L$ pût faire croître numériquement X autant qu'on voudrait. Or, en ne choisissant pas L convenablement, le polynôme X pourrait croître, décroître, ... par les substitutions postérieures à L, comme il est évident, si l'on observe que les racines de $X=0$ sont les abscisses des points où la courbe $y = X$ rencontre l'axe des x. Il faudrait être sûr qu'après la limite L la courbe ne présente aucun point maximum, minimum, en d'autres termes que $x = L$ soit aussi limite supérieure des racines de $X'=0$; car alors la courbe ne sera que de l'une des deux formes suivantes, et l'ordonnée X croîtra sans limites pour $x=$ ou $>L$. Or, la limite supérieure de Newton jouit de cette propriété puisqu'elle est en même temps limite supérieure de toutes les dérivées égalées à 0. En effet, on a :

$$X_{x+h} = X + hX' + \frac{h^2}{2}X'' + \frac{h^3}{2.3}X''' + \ldots;\ X'_{x+h} = X' + hX'' + \frac{h^2}{2}X''' + \ldots;\ X''_{x+h} = X'' + hX''' + \frac{h^2}{2}X^{\text{IV}} + \ldots$$

de sorte que si une valeur $x=\lambda$ rend positives toutes les dérivées X^{m-1}, X^{m-2}, ... X'', X', X, toutes ces dérivées croîtront sans limites pour les valeurs plus grandes de x. Comme X'' croît toujours avec le signe $+$ au delà de $x=\lambda$, la courbe $y=X$ après $x=\lambda$ s'élève sans sinuosités, présentant sa concavité vers le haut; ce que j'exprime en disant qu'après λ la croissance du polynôme X est uniforme.

4. On résout souvent la question proposée avec d'autres limites supérieures que celles de Newton. Soit Ax^m positif et F, G, H, ... les coefficients négatifs. Une seule valeur $x=L_1$, qui rendra $X_1=Ax^m-Fx^{m-f}-Gx^{m-g}-Hx^{m-h}$ nul ou positif, aura la propriété de rendre X toujours positif et croissant sans limites pour les substitutions suivantes. C'est qu'en effet de la supposition qu'une valeur de x fournisse

$$Ax^m \geqq Fx^{m-f}+Gx^{m-g}+Hx^{m-h}+\ldots.+T,$$

on conclut

$$mAx^{m-1} \geqq mFx^{m-f-1}+mGx^{m-g-1}+mHx^{m-h-1}+\ldots..+\frac{mT}{x}$$

et à fortiori

$$mAx^{m-1} > (m-f)Fx^{m-f-1}+(m-g)Gx^{m-g-1}+\ldots,$$

c.-à-d. que si l'on a $X_1 \geqq 0$, on en conclut $X_1' \geqq 0$, et par conséquent de même $X_1''>0$, $X_1'''>0$, etc. A fortiori, a-t-on alors $X>0$, $X'>0$, $X''>0$, ... car dans ces polynômes, les parties positives sont plus grandes que dans X_1, X_1', X_1'', ... et les parties négatives sont les mêmes. Il suit de là que, comme la limite de Newton, la limite L_1 jouit de la propriété de faire croître sans limites le polynôme X et toutes ses dérivées avec le signe $+$. Si A était négatif, F, G, H, ... seraient tous les coefficients positifs de X, et le polynôme X croîtrait numériquement sans limites avec le signe $-$.

5. Enfin si l'on voulait *des valeurs négatives de* x *qui croissant numériquement fissent croître sans limites le polynôme* X *avec le signe acquis par le* 1er *terme*, il suffirait de poser $x = -z$ dans X, d'où $Z = A(-z)^m + B(-z)^{m-1} + \ldots\ldots$ On trouvera, comme précédemment, des valeurs de z qui feraient croître numériquement Z avec le signe acquis par le 1er terme, et qui, substituées dans X avec le signe —, feront le même effet.

6. *Étant donné un polynôme algébrique* $X = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots$, *on propose de trouver des valeurs positives de* x *qui rendent* X *de même signe que le dernier terme, telles que des valeurs moindres produisent le même effet, et que par la décroissance de ces valeurs, la variation de* X *devienne uniforme.*

Il est visible qu'on ne peut exiger que le polynôme X décroisse autant qu'on voudra, à moins qu'il n'ait pas de terme constant. On posera

$$x = \frac{1}{z}\ ;\ \text{X sera}\ \frac{1}{z^m}(Tz^m + Sz^{m-1} + \ldots\ + Bz + A).$$

Le nombre L, qui, mis pour z, donne un résultat de même signe que T, correspond à $x = \frac{1}{L}$, qui produit le même effet sur X. On pourra choisir pour L une limite supérieure des racines de $Tz^m + \ldots\ldots = 0$, de manière à ce que le polynôme Z croisse sans limites pour $z \geqq L$; mais, bien que pour $x \geqq \frac{1}{L}$ le polynôme $X = T + \frac{S}{z} + \ldots\ldots + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{A}{z^m}$ conserve toujours le signe de son dernier terme T, et par les valeurs décroissante de x, s'approche de T autant qu'on voudra, on n'est pas sûr qu'il variera uniformément entre $x = \frac{1}{L}$ et $x = 0$, c.-à.-d. qu'il sera constamment croissant ou décroissant entre ces deux substitutions

7. Cela ne laisse aucun doute si l'on observe que T est l'ordonnée à l'origine de la courbe parabolique (*fig.* 62)

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Sx + T.$$

On saisit nettement que si $\frac{1}{L} = 0G$, l'ordonnée X pour les valeurs inférieures à $\frac{1}{L}$ pourra, tout en conservant le signe de T, croître ou décroître plusieurs fois jusqu'à ce qu'elle devienne T pour $x = 0$. Mais on voit de plus qu'on pourra toujours, en diminuant suffisamment $\frac{1}{L}$, arriver à une limite inférieure OH, au-dessous de laquelle la variation de X soit uniforme. Si, par exemple, T est positif ; que pour $x = 0$, X' soit négatif, et X'' positif, on sera sûr que pour des valeurs suffisamment petites, savoir, $x =$ OH et au-dessous, le polynôme X est dans le cas de la *fig.* 63, c.-à.-d., va en croissant jusqu'à T. Si l'on trouve (chose souvent facile à voir) que pour $x \overset{=}{<} \frac{1}{L}$, X' conserve son signe, le polynôme X variera uniformément de $x = \frac{1}{L} =$ OH à $x = 0$; mais si de plus, X'' conservait aussi le même signe que $x \overset{=}{<} \frac{1}{L}$, il y aurait alors variation uniforme parfaite, c.-à.-d. sans serpentements, comme dans la *fig.* 64. Concluons de là que, *pour trouver des valeurs de* x *assez petites pour que* X *varie uniformément avec le signe de son dernier terme jusqu'à ce dernier terme*, il suffit d'avoir une limite inférieure de $X = 0$ qui soit en même temps limite inférieure de $X' = 0$. Si de plus, $X'' = 0$ avait la même limite inférieure, il y aurait alors pour X variation uniforme parfaite. Quant au sens de la variation, X'_0 et X''_0 l'indiqueront, dans tous les cas, comme je l'ai dit précédemment.

8. Supposons maintenant que le polynôme X n'ait pas de

terme constant ; on trouvera aisément des valeurs de x assez petites pour que X acquière le signe de son dernier terme, que toute valeur moindre produise le même effet et qu'en même temps X diminue numériquement autant qu'on voudra. Car pour $x=\frac{1}{z}$, $X=Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Sx$ devient $\frac{1}{z}(A+Bz+\ldots+Sz^{m-1})$; on cherchera une limite supérieure de $Z=A+Bz+\ldots Sz^{m-1}=0$, et en le diminuant convenablement $X=\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{S}{z}$ deviendra aussi petit qu'on voudra. Les caractères donnés plus haut (7), subsistent toujours et l'on résoudra complétement la question si la limite inférieure choisie convient aussi à $X'=0$. Je suppose d'ailleurs que le dernier terme de X soit du premier degré en x, ce qu'on pourra toujours faire.

9. Enfin on peut de même, par des substitutions négatives, résoudre la question proposée (6). Tout se réduira à trouver une limite inférieure des valeurs numériques des racines négatives de $X=0$, qui soit aussi limite inférieure pour $X'=0$. On imprimera ainsi à X une variation uniforme. Quoiqu'on puisse souvent procéder de même pour les polynômes à exposants fractionnaires, je n'en parle pas parce que leur dérivation n'est pas considérée dans les éléments d'algèbre.

Applications numériques.

10. 1° Quelles sont les valeurs positives de x qui rendent le polynôme $-9x^3+7x^2-15x+2$ de même signe que le premier terme, et à partir desquelles ce polynôme croît numériquement jusqu'à l'infini ?

Pour $9x^3-7x^2-2 \geqq 0$ on a $x \geqq 1$. Ainsi à partir de $x=1$, le polynôme proposé est toujours négatif et croît sans cesse avec ce signe jusqu'à l'infini.

2° Quelles sont les valeurs positives de x qui rendent

$-9x^3+7x^2-15x+2$, de même signe que le dernier terme, et à partir desquelles sa variation est uniforme ?

Toute limite inférieure des racines positives de $9x^3-7x^2+15x-2=0$, doit rendre le premier membre négatif (à cause du terme connu -2) ; il suffira qu'on ait $9x^3<7x^2$ on $9x<7$ et $15\ x<2$. Ainsi pour $x \underset{<}{=} \frac{2}{15}$, le polynôme proposé est toujours positif, mais sa variation sera-t-elle uniforme? Comme $X'=-27x^2+14x-15$, $X''=-54x+14$ et que les limites inférieures des racines positives de $27x^2-14x+15=0$, $27x-7=0$ seraient obtenues par $x \underset{=}{<} \frac{15}{14}$, $x \underset{=}{<} \frac{2}{27}$, $x=\frac{2}{15}$ sera aussi limite inférieure des racines positives de ces deux équations. Donc X jouit d'une variation uniforme parfaite pour $x \underset{<}{=} \frac{2}{15}$. De plus $X'_0=-15$, $X''_0=+14$; donc enfin pour $x \underset{<}{=} \frac{2}{15}$ le polynôme proposé croît continuellement avec le signe + jusqu'à ce qu'il devienne 2 pour $x=0$.

3° Quelles sont les valeurs positives et négatives de x qui rendent le polynôme $-9x^3+7x^2-15x-2$ de même signe que son dernier terme et à partir desquelles sa variation est uniforme ?

Considérons d'abord les substitutions positives, elles seront limites inférieures des racines de $9x^3-7x^2+15x+2=0$, et devront rendre le premier membre positif à cause du terme constant $+2$. On posera $7x^2<2$ ou mieux $7x^2<15x$ d'où $x \underset{<}{=} 2$. Ainsi pour $x \underset{<}{=} 2$, le polynôme proposé est toujours négatif. $X'=-27x^2+14x-15$, $X''=-54x+14$. Comme on ne trouve pas que $x \underset{<}{=} 2$ soit limite inférieure pour $27x^2 - 14x + 15 = 0$, $54x - 14 = 0$, on n'est pas sûr que pour $x \leqq 2$ le polynôme X varie uniformément. Cependant si l'on observe que X″ change de signe entre $x = 0$, $x = 2$, mais que X′ reste toujours négatif parce que $X' = 0$ a des racines imaginaires, on admettra que pour $x \leqq 2$ le polynôme X décroît sans cesse avec le signe — et une variation uniforme imparfaite.

Considérons maintenant lés substitutions négatives de x. En posant $x = -z$, X devient $9z^3 + 7z^2 + 15z - 2$. Pour avoir une limite inférieure des racines positives de $9z^3 + 7z^2 + 15z - 2 = 0$, posons $z = \frac{1}{t}$ on aura $-2t^3 + 15t^2 + 7t + 9 = 0$ ou $2t^3 - 15t^2 - 7t - 9 = 0$ dont il faudra chercher une limite supérieure des racines positives.

$2t^3 - 15t^2 - 7t - 9$,			$6t^2 - 30t - 7$,	$12t - 30$.	
6...2	—		4...6	—	
7...2	—		5...6	0	—
8...2	1	1 —,	6...6	6	+
9...2	3	20 +,			

Tous les termes se trouvant negatifs après le premier, on cherchera la limite de Newton. La dernière dérivée est positive pour $t = 3$, mais non pas la précédente. Pour les essais de $t = 4, 5, \ldots$ sur la première dérivée et $2t^3 - 15t^2 - 7t - 9$, il sera court d'employer la division abrégée dont le reste est toujours le résultat de la substitution qu'on cherche, et cela d'autant mieux qu'on n'a presque jamais besoin, pour le signe final, du calcul de tous les coefficients numériques (*).

(*) Il est assez singulier qu'aucun traité officiel d'algèbre ne cite l'emploi de la division abrégée d'un polynôme par $x - a$, procédé qui simplifie tellement la

On voit aussitôt par ce procédé que 4, 5, rendent la première dérivée négative, mais que 6 la rend positive. Enfin $t = 6, 7, 8$ rendent la proposée négative et 9 la rend positive. Ainsi pour $x \overline{\gtrless} -\frac{1}{9}$ le polynôme $X = -9x^3 + 7x^2 - 15x - 2$ est constamment négatif. Pour reconnaître sa variation, il faudrait une limite inférieure numérique de racines négatives de X', c'est-à-dire de $27x^2 - 14x + 15 = 0$; mais comme cette fonction est du deuxième degré et que ses racines sont imaginaires, on conclut que X' reste négatif pour toute substitution. $X'' = 54x + 14$ ne change pas de signe entre $x = \frac{1}{9}$ et $x = 0$ et comme $X'_0 = -15$, $X''_0 = +14$, on voit enfin que le polynôme proposé X est constamment négatif, décroissant numériquement et d'une variation parfaite pendant que x varie de $x = -\frac{1}{9}$ à $x = 0$.