NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. E. PAGE

Détermination des axes principaux dans le cône du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 334-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__334_1>

DÉTERMINATION DES AXES PRINCIPAUX

DANS LE CONE DU SECOND ORDRE ;

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École d'artillerie de la Fère

---

1. Toute surface conique qui a pour directrice une courbe quelconque du second ordre, ne peut être coupée par un plan que suivant une autre courbe du second ordre (tome Ier page 228).

On appelle axe principal du cône, une droite menée par le sommet et qui est le lieu géométrique des centres de toutes les courbes qui résultent de l'intersection de la surface par des plans perpendiculaires à sa direction.

Dans toute surface conique ayant pour directrice une courbe quelconque du second ordre, il existe toujours trois axes principaux rectangulaires.

Les sections faites perpendiculairement à l'un de ces axes sont des ellipses, tandis que les sections faites perpendiculairement aux deux autres axes sont des hyperboles.

Pour démontrer ces propositions, nous commencerons par rappeler quelques théorèmes dont nous aurons besoin.

2. Si deux droites qui pivotent autour de deux points fixes

P et P′ (*fig*. 65) sont dirigées dans leurs mouvements par deux points A et B assujettis à glisser sur une droite fixe OX, de manière que les segments variables

$$OA = \alpha \text{ et } OB = \beta$$

compris entre les deux points mobiles et un point fixe quelconque pris sur la droite, soient liés entre eux par une équation de cette forme

$$k\alpha\beta + l\alpha + m\beta + n = 0 \qquad (C)$$

le lieu géométrique engendré par le point d'intersection de ces deux droites est une courbe du second ordre qui passe par les deux points fixes P et P′.

Réciproquement si les deux droites mobiles sont assujetties à se couper constamment sur une courbe du second ordre passant par les deux points fixes P et P′, les segments variables qu'elles forment sur une droite fixe, comptés à partir d'un point quelconque de cette droite sont liés entre eux par une équation de la forme (C).

Nous remarquerons d'abord que si dans l'équation (C) on pose

$$\alpha = \alpha' + h, \text{ et } \beta = \beta' + h,$$

on obtient une équation de même forme entre α et β', ce qui fait voir que l'équation ne change pas de forme en quelque point de la droite fixe que l'on transporte l'origine. Il s'en suit que, sans altérer en rien la généralité des résultats, nous pouvons prendre pour origine le point O où la droite P P′ vient rencontrer la droite fixe OX.

Prenant cette droite OX pour axe des x, la droite PP′ pour axe des y, représentant les distances fixes

OP par a, et OP′ par b,

les distances variables

OA par α et OB par β,

on a pour les équations des deux droites mobiles PA et P′B

$$\alpha y + ax = a\alpha \ (1) \text{ et } \beta y + bx = b\beta \ (2)$$

Éliminant α et β entre ces deux équations et l'équation (C), on aura entre x et y l'équation du lieu géométrique engendré par le point d'intersection des deux droites mobiles.

Des équations (1) et (2) on tire

$$\alpha = \frac{ax}{a-y} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{bx}{b-y},$$

mettant ces valeurs dans l'équation (C) il vient

$$kabx^2 + lax(b-y) + mbx(a-y) + n(b-y)(a-y) = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P', car elle est satisfaite par les couples de valeurs

$$\begin{bmatrix} x = 0 \\ y = b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = a \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, si les deux droites mobiles sont assujetties à se couper constamment sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P', les segments α et β seront liés entre eux par une équation de la forme (C).

En effet, supposons que dans l'équation (C) les coefficients k, l, m, n, soient indéterminés, il suffira pour les déterminer de connaître trois couples de valeurs des variables α et β; or, ces valeurs peuvent être choisies de manière que les droites se coupent en trois points F, G, H, de la courbe donnée. Maintenant, si l'on suppose que les droites se meuvent de manière que les variables α et β satisfassent à l'équation (C) dans laquelle les coefficients k, l, m, n, sont déterminés par cette condition, le point d'intersection des deux droites décrira une courbe du second ordre qui passera par les cinq points, F, G, H, P, P' et qui par conséquent se confondera avec la courbe donnée, puisque par cinq points on ne peut faire passer qu'une seule courbe du second ordre.

Le théorème a encore lieu lorsque la droite PP' est parallèle à la droite OX; pour le démontrer, il suffit de faire voir que si deux droites qui tournent autour de deux points fixes déterminent sur une droite des segments liés entre eux par l'équation (C), les segments qu'elles détermineront sur une autre droite faisant un angle quelconque avec la première seront liés entre eux par une équation de même forme.

3. Il peut arriver que les deux points P et P′ soient situés à l'infini ; dans ce cas, les deux droites se meuvent en restant chacune parallèle à une direction fixe, et la courbe engendrée par leur point d'intersection est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites mobiles.

En effet, soit OX′ (*fig.* 66) la droite sur laquelle se meuvent les deux points directeurs ; par l'origine O, menons deux droites parallèles aux deux droites mobiles, et prenons-les pour axes coordonnés, il est facile de voir que l'on aura toujours

$$\alpha = fx \text{ et } \beta = gy\,,$$

les coefficients f et g étant constants. Mettant ces valeurs à la place de α et de β dans l'équation C il vient :

$$kfgxy + lfx + mgy + n = 0$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à deux axes parallèles à ses asymptotes.

4. L'équation (C) fournit un grand nombre de conséquences importantes, nous nous bornerons à en déduire le théorème suivant :

Si dans un triangle variable dont les trois côtés pivotent autour de trois points fixes, deux sommets sont assujettis à glisser sur deux courbes du second ordre qui passent par les points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents, le troisième sommet décrira aussi une courbe du second ordre qui passera également par les deux points autour desquels pivotent les deux côtés adjacents.

Soit le triangle ABC, (*fig.* 67) dont les trois côtés pivotent autour des points fixes P, P', P'', le sommet A est assujetti à glisser sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P'', le sommet B à glisser sur une autre courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P', le troisième sommet C décrira une courbe du second ordre qui passera par les points P' et P''.

En effet, menons dans le plan de ce triangle une droite fixe quelconque, représentons par α et γ les segments compris entre un point fixe pris sur cette droite et les points où elle est rencontrée par les côtés AC et AB ; puisque le point A intersection de ces deux droites glisse sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P'', les segments α et γ seront liés entre eux par une équation de la forme (C). Représentons par β le segment compris sur cette même droite entre le même point fixe et le point où elle est rencontrée par le côté BC. Puisque le point B, intersection des deux côtés AB et BC est assujetti à glisser sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P', les segments β et γ seront aussi liés entre eux par une seconde équation de la forme (C). Éliminant γ entre ces deux équations, il restera une équation de même forme entre les deux segments α et β; par conséquent, le point C intersection des deux côtes AC et BC décrit une courbe du second ordre qui passe par les deux points P' et P''.

Aux courbes du second ordre sur lesquelles glissent les sommets A et B on peut substituer des lignes droites; on retombe alors sur le théorème de Braikenridge, et par suite sur le théorème de Pascal. (V. tome I, p. 61.)

La démonstration reste la même pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, on a donc le théorème suivant :

Si dans un polygone quelconque, tous les côtés sont assujettis à tourner chacun autour d'un point fixe, et si tous les som-

mets, un seul excepté, sont assujettis à glisser chacun sur une droite fixe ou sur une courbe du second ordre passant par les deux points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents, le dernier sommet décrira une courbe du second ordre qui passera également par les deux points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents.

5. Maintenant considérons la surface conique engendrée par une droite assujettie à se mouvoir en passant constamment par un point fixe S (*fig.* 68), et en s'appuyant sur une courbe ABCD. Par le sommet S menons une droite quelconque qui rencontre le plan de la directrice en un point P ; construisons la droite GH polaire du point P par rapport à la courbe; enfin, par cette droite GH et par le sommet S, faisons passer un plan; ce plan est dit le *plan polaire* de la droite SP. Comme on peut toujours construire la polaire d'un point quelconque pris dans le plan d'une courbe du second ordre, il s'ensuit qu'on peut toujours construire le plan polaire d'une droite menée par le sommet d'un cône du second ordre.

Toute droite menée par le sommet d'un cône du second ordre, est le lieu géométrique des centres de toutes les courbes du second ordre qui résultent de l'intersection de la surface par des plans parallèles au plan polaire de cette droite.

En effet, supposons la surface du cône coupée par un plan parallèle au plan polaire de la droite SP, soit O le point de rencontre de cette droite avec le plan coupant. Pour démontrer que le point O est le centre de la courbe qui résulte de l'intersection de la surface par le plan, il faut faire voir que toute droite telle que *mn*, menée par le point O dans le plan coupant, est divisée par ce point en deux parties égales.

Par la droite *mn* et par le sommet, faisons passer un plan; ce plan coupe la surface suivant deux génératrices SA et SB, et le plan polaire suivant une droite SQ parallèle à *mn*. Les deux points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points A et B ; par conséquent les quatre droites SA, SB, SP, SQ forment un faisceau harmonique ; et la droite *mn*, parallèle à l'un des rayons de ce faisceau, est partagée par les trois autres en deux segments égaux.

Il résulte de ce qui précède que toute droite perpendiculaire à son plan polaire, est le lieu géométrique des centres de toutes les courbes qui résultent de l'intersection de la surface par des plans perpendiculaires à sa direction ; par conséquent, le problème de la détermination des axes principaux revient au suivant : *Construire les droites qui sont perpendiculaires à leurs plans polaires.*

6. Soit QXVR (*fig.* 69) une courbe quelconque du second ordre servant de directrice à la surface du cône dont le sommet se projette en P sur le plan de cette courbe ; par le point P, faisons passer un diamètre, et par ce diamètre menons un plan perpendiculaire au plan de la courbe ; prenons ce plan pour plan vertical et le plan de la courbe pour plan horizontal de projection. Soit S le sommet du cône situé dans le plan vertical ; puisque la droite que nous cherchons doit être perpendiculaire à son plan polaire, il faut que les deux projections de cette droite soient perpendiculaires aux traces de son plan polaire. Comme cette droite doit toujours passer par le sommet, il suffit, pour la déterminer, de construire sa trace horizontale. Pour cela nous allons construire le lieu géométrique engendré par la trace horizontale d'une droite menée par le sommet, et qui se meut de manière que sa projection horizontale reste constamment perpendiculaire à la trace horizontale de son plan polaire : nous construirons de même le lieu géométrique engendré par la trace horizontale d'une droite menée par le sommet, et qui se meut de manière que sa projection verticale reste constamment perpendiculaire à la trace verticale de son plan polaire. Chaque point d'intersection de ces deux lieux géométriques donnera une solution du pro-

blème. Il faut en excepter cependant les points d'intersection qui peuvent se trouver sur la droite menée par le point P perpendiculairement à la ligne de terre. En effet, lorsque les deux projections d'une droite sont perpendiculaires à la ligne de terre et que les deux traces d'un plan sont parallèles à la même ligne, les projections de la droite sont perpendiculaires aux traces du plan sans qu'on puisse en conclure que la droite soit perpendiculaire au plan.

Par le point P menons une droite quelconque PC que nous considérons comme la projection horizontale d'une droite menée par le sommet, la trace horizontale de cette droite sera située sur la ligne PC; en faisant glisser cette trace sur cette ligne nous ferons varier la direction du plan polaire; il s'agit de trouver une position telle que la trace horizontale du plan polaire soit perpendiculaire à PC.

Or la trace horizontale du plan polaire d'une droite est la polaire de la trace horizontale de cette droite, et la polaire d'un point est parallèle à la direction conjuguée du diamètre qui passe par ce point. D'après cela, il nous faut prendre pour la trace horizontale cherchée le point de rencontre de la droite PC avec un diamètre tel que la direction conjuguée de ce diamètre soit perpendiculaire à PC.

Pour cela, par le point Q menons une droite QX perpendiculaire à PC, prenons le point B milieu de la corde QX; par ce point B, faisons passer un diamètre, ce diamètre sera conjugué à la direction de la corde QX, et par conséquent la rencontre de ce diamètre avec la droite PC sera la trace cherchée.

En faisant tourner la droite PC autour du point A et construisant de la même manière pour chaque position de cette droite la trace horizontale correspondante, on aura le lieu géotrique cherché.

Les deux droites PC et QA qui pivotent autour des deux points P et Q sont toujours perpendiculaires l'une à l'autre ; par conséquent leur point d'intersection décrit une circonférence dont PQ est le diamètre.

Le diamétre BC doit toujours passer par le milieu de la corde mobile Q, par conséquent le point B intersection des deux droites mobiles QX et BC décrit une ligne qui est le lieu géométrique des milieux des cordes menées du point Q à tous les points consécutifs de la directrice QRVX. Or, ce lieu géométrique est une courbe semblable à la courbe QRVX et semblablement placée, le point Q étant le centre de similitude des deux figures. Il s'ensuit que le point B est assujetti à glisser sur une courbe du second ordre.

On voit que dans le triangle variable ABC les trois côtés pivotent autour des trois points fixes O, P, Q, les deux sommets A et B glissent sur deux courbes du second ordre qui passent par les points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents ; par conséquent le troisième sommet C doit décrire une courbe du second ordre passant par les deux points Q et P autour desquels pivotent les côtés AC et BC.

Il est facile de voir en outre, que cette courbe passe par le point L où le diamètre conjugué à la direction PO vient rencontrer la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point P.

Lorsque la ligne PC devient parallèle à l'un des axes principaux de la directrice, on trouve pour le point C deux positions correspondantes situées à l'infini de part et d'autre du point P. On en conclut que la courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la directrice. Le lieu géométrique cherché est donc parfaitement déterminé puisque c'est une hyperbole dont on connaît trois points et la direction des asymptotes. (Tome Ier, page 68.)

Dans le cas où la directrice est une parabole, le point O est situé à l'infini, le lieu géométrique cherché est encore une hyperbole qui passe par le point P, l'une des asymptotes se confond avec l'axe même de la parabole, l'autre asymptote est perpendiculaire à cet axe. Cette hyperbole est donc encore complétement déterminée.

(*La fin prochainement.*)