Lentheric

Discussion des cas douteux des triangles sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 32-34
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__32_1>

DISCUSSION

DES

CAS DOUTEUX DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

PAR M. LENTHERIC (neveu),
Professeur à l'Ecole du génie de Montpellier.

—

La discussion de l'un des deux cas douteux se ramenant à celle de l'autre par la considération du triangle polaire, je me bornerai à examiner celui où l'on connaît deux côtés a,b et l'angle A opposé à l'un d'eux a.

Construisons le fuseau dont l'angle serait A, sur un des arcs prenons, à partir du sommet, une longueur $AC=b$ et du point C abaissons l'arc CD perpendiculaire sur l'autre côté de l'angle. Dans le triangle sphérique rectangle ACD *l'arc perpendiculaire* CD *sera aigu ou obtus suivant que l'angle donné* A *sera lui-même aigu ou obtus* (*fig.* 1).

Si l'arc CD est aigu, il sera le plus court de tous les arcs qu'on pourrait mener du point C dans le fuseau aux divers points de l'arc ABA′ et les obliques augmenteront en *s'éloignant* du pied de l'arc perpendiculaire.

Si l'arc CD est obtus il sera au contraire le plus grand des arcs obliques menés au point C, et ces arcs obliques augmenteront en se *rapprochant* du pied de la perpendiculaire.

Cela posé : *Pour que le triangle proposé soit possible il faudra d'abord que le côté opposé* a *soit au moins égal à l'arc perpendiculaire, si l'angle donné* A *est aigu ; ou plus petit, si l'angle donné* A *est obtus.*

Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite lorsque l'angle donné A et le côté opposé a, aussi donné, sont de nature différente.

Si A et a étaient de même nature, le triangle rectangle ACD donnerait $CD = \frac{\sin A \sin b}{R}$, formule qui ferait connaître la valeur de CD, que l'on comparerait avec a pour s'assurer si la première condition de possibilité du triangle est satisfaite.

Je dis maintenant que :

A *et* a *étant de nature différente, le problème (s'il est possible) n'a qu'une solution.*

A *et* a *étant de même nature, le problème (s'il est possible) peut avoir une ou deux solutions.*

En effet, *soit* A *aigu et* a *obtus*, par exemple. Si l'on peut tracer dans le fuseau, par le point C, une oblique CB égale au côté a, elle ne pourra se trouver évidemment que du côté de celle des obliques extrêmes b ou $180°—b$ qui sera de même nature que a ; ainsi le problème ne peut avoir qu'une solution.

Cette solution existera pour $a <$ que celui des arcs b ou $180°—b$ de même nature ; *le triangle sera impossible* pour a au moins égal à celui des arcs b ou $180°—b$ de même nature.

Si l'on supposait A obtus et a aigu, on arriverait aux mêmes conclusions, seulement il faudrait renverser les signes parce que l'arc perpendiculaire CD serait obtus.

Soient A *et* a *aigus*. L'arc perpendiculaire CD étant alors aussi aigu, on voit qu'il pourra exister dans le fuseau une oblique CB' égale à a du côté de celui des arcs b ou $180°-b$ qui sera aigu et à fortiori qu'il en existera alors une autre CB du côté de celui des deux arcs b ou $180°-b$ qui sera obtus.

Ainsi le problème pourra avoir deux solutions.

Ces deux solutions existeront pour $a <$ que celui des arcs b ou $180°-b$ de même nature ; *une de ces deux solutions ne sera plus possible* pour a au moins égal à celui des arcs b ou $180°-b$ de même nature.

Le triangle sera impossible pour $a <$ que l'arc perpendiculaire CD.

Si l'on supposait A et a obtus on arriverait aux mêmes conclusions, seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc perpendiculaire CD serait obtus.