NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FINCK

Limite de l'erreur des sinus naturels

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 329-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__329_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

LIMITE DE L'ERREUR DES SINUS NATURELS,

PAR M. FINCK,

Professeur de mathématiques au Collége et à l'École d'artillerie de Strasbourg, docteur ès sciences.

—

Je me propose de traiter cette question, en tenant compte de toutes les erreurs, et me servant de la formule connue

$$\sin(n+1)a = 2\cos a \sin na - \sin(n-1)a \qquad (1)$$

Je suppose qu'il s'agisse de calculer sur des arcs qui croissent de $10''$.

On sait que $\sin 10'' < 0,\ 00004\ 84813\ 68111$.

Retranchant de là, l'unité du dernier ordre et $\frac{1}{6}(\text{arc}\,10'')^3$ qui est $<$ 19 unités du même ordre, on a $\sin 10'' > 0,\ 00004\ 84813\ 68091$.

De sorte que $\sin 10''$ est connu à moins de $\frac{2}{10^{14}}$.

Au moyen de ces deux limites de $\sin 10''$, on peut en trouver deux pour $\cos 10''$, qui sont

$$\cos 10'' > 0,99999\ 9988\ 24778\ 47304$$

$$\cos 10'' < \text{ce même nombre} + \frac{1}{10^{17}}.$$

Soit α_n la valeur approchée de $\sin na$, e_n l'erreur, de sorte que

$$\sin na = \alpha_n + e_n \qquad (2)$$

$$\sin(n-1)a = \alpha_{n-1} + e_{n-1}.$$

etc.

Soit β la valeur approchée de $\cos a$, i l'erreur, on aura

$$\cos a = \beta + i \tag{3}$$

(1) devient

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} + e_{n+1} &= 2(\beta + i)(\alpha_n + e_n) - \alpha_{n-1} - e_{n-1} \quad (4) \\ &= 2\beta\alpha_n - \alpha_{n-1} + 2\cos a . e_n + 2i\alpha_n - e_{n-1}. \end{aligned}$$

Dans $2\beta\alpha_n - \alpha_{n-1}$ on ne conserve pas tous les chiffres; soit γ_n la partie négligée; il vient

$$e_{n+1} = 2e_n \cos a - e_{n-1} + \gamma_n + 2i\alpha_n \tag{5}$$

Je pose
$$\gamma_n + 2i\alpha_n = d_n \tag{6}$$

$$n - 1 = x, \quad e_{n-1} = y, \quad e_n = y_1, \quad e_{n+1} = y_2 \tag{7}$$

et (5) devient
$$y_2 - 2y_1 \cos a + y = d_{x+1} \tag{8}$$

équation aux différences finies, qu'il s'agit d'intégrer (*).

A cet effet, d'après la méthode connue, on prend l'équation auxiliaire

$$y_2 - 2y_1 \cos a + y = 0. \quad (9)\ (^{**})$$

Elle est satisfaite par $y = \cos ax$, $y = \sin ax$; son intégrale complète est donc

$$y = A\cos ax + B\sin ax \tag{10}$$

Faisant varier A et B, on aura

$$y_1 = A\cos a(x+1) + B\sin a(x+1) \tag{11}$$

avec
$$\Delta A . \cos a(x+1) + \Delta B . \sin a(x+1) = 0 \tag{12}$$

$$y_2 = (A + \Delta A)\cos a(x+2) + (B + \Delta B)\sin a(x+2). \tag{13}$$

Les valeurs (10), (11), (13), substituées dans (8) donnent

$$\Delta A . \cos a(x+2) + \Delta B . \sin a(x+2) = d_{x+1} \tag{14}$$

Cette équation jointe à (12) détermine les valeurs

$$\Delta A = -\frac{d_{x+1}\sin a(x+1)}{\sin a}, \quad \Delta B = \frac{d_{x+1}\cos a(x+1)}{\sin a} \tag{15}$$

(*) Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, nº 370 Tm

(**) C'est l'équation (1) en faisant $\sin na = y_1$ Tm

$$\left.\begin{aligned} \text{d'où } A &= -\frac{1}{\sin a}\,\Sigma \sin a\,(x+1).d_{x+1} + E \\ B &= \frac{1}{\sin a}\,\Sigma \cos a\,(x+1).d_{x+1} + F \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Par suite (10) devient

$$\left.\begin{aligned} y = E\cos ax + F\sin ax &- \frac{\cos ax}{\sin a}\,\Sigma\, d_{x+1} \sin a\,(x+1) \\ &+ \frac{\sin ax}{\sin a}\,\Sigma\, d_{x+1} \cos a\,(x+1) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

On peut commencer ces intégrales où l'on veut, pourvu que E, F soient déterminées en conséquence. Nous les ferons commencer à $x = 0$, et nous avons

$$\left.\begin{aligned} y &= E\cos ax + F\sin ax \\ &+ \frac{1}{\sin a}\Big[d_1 (\sin ax \cos a - \cos ax \sin a) \\ &\quad + d_2 (\sin ax \cos 2a - \cos ax \sin 2a) \\ &\quad + d_x (\sin ax \cos ax - \cos ax \sin ax)\Big] \\ &= E\cos ax + F\sin ax + \frac{1}{\sin a}\Big[d_1 \sin a(x-1) + d_2 \sin a(x-2) \\ &\quad + \ldots\ldots + d_{x-1} \sin a\Big] \\ &= E\cos ax + F\sin ax + \frac{1}{\sin a}\int d_z \sin a\,(x-z) \\ &\qquad z = 1, 2, \ldots\ldots (x-1) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Pour déterminer E, F, on sait que

si $x = 1$, $y = e_1$, erreur de $\sin a$,

si $x = 2$, $y = e_2$, erreur de $\sin 2a$.

Mais (5) et (6) donnent $e_2 = 2e_1 \cos a + d_1$ (19)

vu que e_0 est nul.

Ainsi, d'après (18) $e_1 = E\cos a + F\sin a$ (20)

$$2e_1 \cos a + d_1 = E\cos 2a + F\sin 2a + d_1\,;$$

d'où
$$E = 0$$
$$F = \frac{e_1}{\sin a} \tag{21}$$

et
$$y \text{ ou } e_x = \frac{e_1 \sin ax}{\sin a} + \frac{1}{\sin a}\int dz \sin a\,(x - z) \tag{22}$$
$$z = 1, 2, \ldots\ldots (x-1)$$

Si dans (5) on fait successivement $n = 0, 1, 2$, etc., qu'on exprime e_2, e_3, e_4 en e_1, on trouvera précisément les expressions que fournit (22) pour $x = 2, 3, 4$, etc. ; ce qui vérifie notre formule. Pour en faire usage, il faut connaître les valeurs de γ_1, γ_2, ... α_1, α_2, ... qui ne se trouvent que successivement par le développement du calcul. Néanmoins notre formule va nous servir à prouver que (1) peut être employée au calcul des sinus, de $10''$ en $10''$, jusqu'à $90°$, et que la plus forte erreur n'atteindra pas $\frac{15}{10^9}$. A cet effet, supposons que tous les calculs se fassent à 17 décimales ; les γ_1, γ_2 ..... seront $< \frac{1}{10^{17}}$, et $2i\alpha_z$ étant $< 2i$ ou $< \frac{2}{10^{17}}$, on a

$$d_z < \frac{3}{10^{17}}, \text{ et } e_x < \frac{e_1}{\sin a} + \frac{3}{10^{17} \sin a}\int \sin a\,(x - z) \tag{23}$$
$$z = 1, 2, \ldots\ldots (x-1)$$

On fera $a = \text{arc } 10''$, d'où $\sin a < 0{,}000048$.

Le maximum de l'erreur répond à $ax = 90°$, ou $x = \frac{90°}{10''}$ $= 32400$. Alors le signe $\int$ comprend $32400 - 1$ termes ; nous y renfermerons aussi le terme qni répond à $z = 0$, et nous diviserons cette somme en 10 autres, s'étendant chacune à 9 degrés, et comprenant par conséquent 3240 termes. Dans la somme partielle, depuis $\sin 10''$ à $\sin 9°$, chaque terme est $< \sin 9°$; donc cette somme est $< 3240.\sin 9°$. Raisonnant de même sur les autres, on voit que

$$\int \sin a\,(x-z) < 3240\,(\sin 9^\circ + \sin 18^\circ + \ldots\ldots + \sin 90^\circ)$$
$$< 3240 \times 6{,}85311$$

en vertu des valeurs de sin 9°, sin 18°, ... calculées directement.

Ce nombre vaut 22204,0764, et on a

$$e_x < \frac{2}{10^{14}.0{,}000048} + \frac{66612{,}2292}{10^{17}.0{,}000048} = \frac{1}{24}\left(\frac{1000+33306{,}1146}{10^{11}}\right)$$
$$< \frac{15}{10^9}.$$

Ainsi il est bien certain que tous les sinus seront calculés en moins, et à $\frac{15}{10^9}$ près, ce qui suffit pour en obtenir les logarithmes à moins de $\frac{5}{10^8}$. Les 17 chiffres décimaux qui expriment ces sinus ne font point obstacle à cela.

D'après cela, je rétracte de nouveau (V. t. I, p. 353) ce que j'ai avancé dans ma Trigonometrie sur l'insuffisance de la formule (1).

Je ferai d'ailleurs observer que c'est aussi par le calcul intégral aux différences que j'ai complété, dans ma Géométrie, 2e édition, la recherche du rapport de la circonférence au diamètre ; j'ai présenté cela sous forme élémentaire, et rien n'empêche d'en faire autant pour ce qui précède (*) ; de plus, je puis ajouter, car j'ai fait le calcul, que cette seconde manière n'est pas plus longue ; mais la première est plus directe, et c'est pour cela que je l'ai donnée.

Observation du Rédacteur. M. Finck est auteur d'ouvrages élémentaires, qui annoncent une science profonde ; auteur d'un traité de calcul différentiel, dont l'illustre Poisson faisait grande estime ; ancien examinateur pour l'école de Saint-

(*) C'est ce que nous essayerons par la suite Tm

Cyr, M. Finck, professeur d'une intégrité parfaite, d'une réputation intacte, était placé cette année dans les premiers sur la liste de présentation. Il est presque superflu d'ajouter qu'il n'a pas été choisi. On lui a préféré, qui? Espérons qu'un tel scandale ne se renouvellera plus. Tm.