LOUIS YVON

Démonstration du théorème 36

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 319-326
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__319_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 36 (tome I, p. 395).

PAR M. YVON (LOUIS),
Elève du College royal Charlemagne. (Institution Verdot.)

I. Si une équation $f(x)=0$ a m racines réelles, l'équation $f(x)-f'(x)=0$ a au moins $(m-1)$ racines réelles, en désignant par $f'(x)$ le polynôme dérivé de $f(x)$.

Je suppose d'abord que l'équation n'ait pas de racines égales, et je désigne par $a, b, c, d\dots.$ les m racines réelles de $f(x)=0$, rangées par ordre de grandeur, a étant la plus petite.

Soit h une quantité positive assez petite pour que $f'(x)=0$ n'ait aucune racine comprise entre a et $a+h$ ni entre $b-h$ et b.

On sait d'abord que $f(a+h)$ et $f'(a+h)$ sont de même signe, que $f(b-h)$ et $f'(b-h)$ sont de signes contraires; or $f(a+h)$ et $f(b-h)$ sont de même signe, car on peut toujours supposer h assez petit pour que $a+h$ et $b-h$ soient compris entre a et b, et par conséquent ne comprennent aucune racine de $f(x)=0$: donc $f'(a+h)$ et $f'(b-h)$ sont de signes contraires ; d'ailleurs $f'(a)$ et $f'(a+h)$ sont de même signe, puisque par hypothèse h est assez petit pour qu'il n'y ait aucune racine de $f'(x)$ comprise entre a et $(a+h)$; $f'(b-h)$ et $f'(b)$ sont de même signe pour la même raison, donc $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires.

Supposons maintenant que l'on substitue successivement a et b dans l'équation $f(x)-f'(x)=0$; comme a et b sont racines de $f(x)=0$, les résultats deviennent $-f'(a)$ et $-f'(b)$ qui sont de signes contraires; ainsi a et b comprennent au moins une racine de l'équation $f(x)-f'(x)=0$: on verrait de même que b et c comprennent au moins une racine de cette même équation..., donc cette équation a au moins $(m-1)$ racines réelles.

Considérons maintenant le cas où l'équation $f(x)=0$ aurait des racines égales, elle sera de la forme

$$Y(x-a)^n (x-b)^{n'} (x-c)\dots (x-d)\dots = 0$$

Y étant le produit des facteurs correspondants aux racines imaginaires. Nous supposons d'abord qu'il n'y ait que deux racines multiples. Soit k le nombre total des racines réelles de $f(x)=0$, chacune étant prise une seule fois, on aura $m = n + n' - 2 + k =$ le nombre des racines réelles de $f(x)=0$.

Divisons $f(x)$ et $f'(x)$ par leur plus grand commun diviseur, et en désignant par $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ les quotients, l'équation $f(x)-f'(x)=0$, prendra la forme

$$(x-a)^{n-1} (x-b)^{n'-1} [\varphi(x)-\varphi'(x)] = 0$$

Cette équation a d'abord $n+n'-2$ racines réelles en évidence : les racines réelles de $\varphi(x)=0$ sont a, b, c.... alors $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ n'ayant pas de racine commune, on verrait ici de même que tout à l'heure que $\varphi(x) - \varphi'(x) = 0$ a au moins $(k-1)$ racines réelles, car on sait que $\varphi(x)$ jouit aussi bien que la dérivée de $\varphi(x)$ des propriétés dont nous nous sommes servis pour établir le premier cas.

L'équation $f(x)-f'(x)=0$, a donc au moins $n+n'-2+k-1$ ou $(m-1)$ racines réelles.

J'ai supposé qu'il n'y avait que deux racines multiples a et b ; il est clair que la démonstration serait la même, s'il y en avait un plus grand nombre.

D'ailleurs cette équation étant du même degré que $f(x)=0$, ne peut avoir $(m-1)$ racines réelles sans en avoir m.

Ainsi on peut dire que $f(x)-f'(x)=0$ a au moins autant de racines réelles que $f(x)=0$.

Il suit de là que :

Si une équation $f(x)$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x) - f'(x)$ aura aussi toutes ses racines réelles.

II. Considérons maintenant l'équation

$$Rf(x) - xf'(x) = 0 \ (1), \qquad \text{R étant un nombre.}$$

Il est clair que ce qu'on a dit des racines réelles s'appliquerait ici aux racines positives séparément et aussi aux racines négatives ; car $af'(a)$ et $bf'(b)$ sont de signes contraires aussi bien que $f'(a)$ et $f'(b)$ quand a et b sont de même signe, positifs tous deux ou tous deux négatifs ; et on verrait aisément que si $f(x) = 0$ a n racines positives et n' racines négatives l'équation (1) a au moins $(n - 1)$ racines positives et $(n' - 1)$ racines négatives.

Donc si $f(x)$ a m racines réelles, l'équation (1) a au moins $(m - 2)$ racines réelles.

III. Cette remarque permet de trouver les conditions pour que l'équation $x^m + Px + Q = 0$ ait le plus grand nombre de racines réelles possible (*).

Examinons d'abord le cas de *m impair*.

On peut toujours supposer Q positif, car s'il est négatif, en changeant x en $-x$ on le ramènera à être positif, et il est clair que les racines réelles de la première équation donneraient les racines réelles de la seconde et réciproquement.

On peut aussi supposer P négatif, car s'il était positif, l'équation n'aurait évidemment qu'une racine réelle. Nous allons donc considérer seulement l'équation $x^m - Px + Q = 0$, P et Q étant positifs. La dérivée est $mx^{m-1} - P$; l'équation (1) devient alors, en faisant $R = m$, $-(m-1)Px + mQ = 0$. Cette équation étant du premier degré, l'équation proposée ne peut pas avoir plus de trois racines réelles : et si cette

(*) Voir *Mélanges d'analyse algébrique*, par de Stainville, p. 199. Tm. ·:., équation a trois racines réelles comme elle en a nécessairement une négative, et une seule, les deux autres seront positives.

De l'équation précédente on tire $x = \frac{mQ}{(m-1)P}$ quantité positive ; or, d'après ce que nous avons vu, cette quantité est comprise entre les deux racines positives b et c de l'équation proposée, en désignant par a, b,c les racines réelles de cette équation rangées par ordre de grandeur, a étant la racine négative.

Les racines b et c seront donc comprises, la première entre 0 et $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et la seconde entre $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et $+$ L en désignant par L la limite supérieure des racines positives : or, 0 donne un résultat positif, donc $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif : les racines sont alors séparées.

Je dis maintenant que réciproquement, si $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif, l'équation proposée a trois racines réelles. On sait d'abord qu'elle ne peut en avoir plus de trois, il y en a déjà une négative. De plus 0 et $+$ L donnent deux résultats positifs, donc l'équation a une racine comprise entre 0 et $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et une entre cette dernière quantité et $+$ L, l'équation a donc trois racines réelles et n'en a que trois.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée ait trois racines réelles est que $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif ; ce qui donne, en substituant cette quantité dans l'équation,

$$m^m Q^{m-1} < (m-1)\, m^{m-1}\, P^m,$$

et lorsque cette condition sera remplie, on pourra séparer les racines.

Si l'on suppose $m = 3$ la condition précédente se réduit à $27Q^2 < 4P^3$ qui est la condition pour que l'équation

$$x^3 \quad Px + Q = 0$$

ait toutes ses racines réelles, et lorsque cette condition sera remplie, la quantité $\frac{3Q}{2P}$ servira à séparer les racines.

Si l'équation du troisième degré était complète, on ferait disparaître le second terme ; ce qui ne changerait pas le nombre des racines réelles, et on obtiendrait une équation de la forme $x^3 + P'x + Q' = 0$ que l'on traiterait comme la précédente, après l'avoir ramenée à la forme convenable.

Supposons maintenant que m soit *pair*, l'équation

$$x^m + Px + Q = 0$$

ne pourra pas avoir plus de deux racines réelles, car elle ne peut pas en avoir trois. Or, on peut encore ici supposer P négatif, car s'il ne l'était pas on l'y ramènerait en changeant x en $-x$, et on n'altérerait pas ainsi le nombre des racines réelles. D'ailleurs on peut négliger le cas de Q négatif, car on sait qu'alors l'équation a toujours deux racines réelles, il n'y a donc pas lieu à chercher des conditions ; quant à la séparation, elle s'effectue immédiatement, puisqu'il y a une racine positive seulement et seulement une racine négative.

Supposons donc Q positif. L'équation est alors, en mettant les signes en évidence $x^m - Px + Q = 0$. Soient a et b ses racines qui sont positives ; et soit a la plus petite, l'équation $-(m-1)Px + mQ = 0$ aura sa racine $\frac{mQ}{(m-1)P}$ comprise entre a et b, donc a et b seront comprises, la première entre 0 et $\frac{mQ}{(m-1)P}$, la deuxième entre $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et $+L$; donc $\frac{mQ}{(m-1)P}$ substitué dans l'équation donnera un résultat négatif.

On verrait de même que tout à l'heure que si $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif, l'équation proposée a deux racines réelles, donc la condition nécessaire et suffisante est que

$$m^m Q^{m-1} < (m-1)^{m-1} P^m$$

qui est la même que la précédente; elle exprime donc la condition pour que l'équation $x^m + Px + Q = 0$ ait le plus grand nombre de racines réelles possible.

IV. On peut encore trouver les conditions pour que l'équation de degré *pair* $x^m + Px^2 + Qx + R = 0$ ait deux racines positives et deux racines négatives.

Je dis d'abord que R doit être positif; en effet supposons que R soit négatif ; on peut toujours supposer Q négatif, car s'il ne l'était pas, on l'y ramènerait en changeant x en $-x$, et il est clair que l'équation transformée aurait aussi deux racines positives et deux racines négatives ; mais Q et R étant négatifs, quel que soit le signe de P, le premier membre ne présenterait qu'une seule variation, l'équation n'aurait donc pas deux racines positives.

Il faut donc que R soit positif : supposons ensuite Q positif, *ce qui est toujours permis; car s'il est négatif on changera* x en $-x$, et alors si une des équations a deux racines positives et deux racines négatives, l'autre aura également deux *racines positives et deux racines négatives; il suffit donc de* traiter le cas où Q serait positif, alors P sera nécessairement négatif, sans quoi le premier membre ne présenterait pas de variation.

Généralement, la dérivée du premier membre de l'équation donnée étant $= mx^{m-1} + 2Px + Q$; l'équation (1) devient

$$(m-2)Px^2 + (m-1)Qx + mR = 0\ ;$$

équation qui a ses racines réelles, si la proposée a deux racines positives et deux racines négatives; par conséquent la condition est $(m-1)^2Q^2 > 4m(m-2)RP$.

D'ailleurs cette équation ne pouvant pas avoir plus de deux racines réelles, l'équation proposée ne peut pas avoir plus de quatre racines réelles.

Si donc on désigne par a, b, c, d les quatre racines réelles de l'équation proposée rangées par ordre de grandeur, a étant la plus petite, alors la racine négative de l'équation du second degré que je désigne par a' sera comprise entre a et b; et la racine positive b' sera comprise entre c et d.

Donc les racines a, b, c, d, sont comprises, la première entre $-L'$ et a', la deuxième entre a' et 0; la troisième entre 0 et b', et enfin la dernière entre b' et $+L$; en désignant par $-L'$ la limite inférieure des racines négatives et par L la limite supérieure des racines positives.

Or $-L'$ donne un résultat positif, donc a' doit donner un résultat négatif; 0 donne un résultat positif, b' donnera donc un résultat négatif.

Par conséquent on substituera a' et b' dans l'équation proposée et en écrivant que les deux résultats sont négatifs, on aura deux nouvelles conditions qui devront être satisfaites.

Je dis maintenant que réciproquement si les racines a' et b' sont réelles et de signe contraire et donnent deux résultats négatifs, l'équation proposée aura deux racines positives et deux racines négatives.

En effet $-L'$, a' et 0 donnant des résultats dont les signes sont $+-+$, l'équation proposée a au moins une racine réelle entre $-L'$ et a' et une entre a' et 0, donc elle a au moins deux racines négatives; on verrait de même que 0, b' et $+L$ donnant des résultats dont les signes sont $+-+$, l'équation a au moins aussi deux racines positives; d'ailleurs elle ne peut pas avoir plus de quatre racines réelles; donc elle a deux racines positives seulement, et seulement deux racines négatives.

Alors on exprimera que les racines a' et b' de l'équation du deuxième degré sont réelles et de signes contraires, ce qui exige que l'on ait $P<0$, puisque R est positif ; et

$$(m-1)^2 Q^2 > 4m(m-2)PR.$$

Or, cette dernière condition est évidemment satisfaite si l'on a $P<0$ et $R>0$.

On exprimera en outre que a' et b' donnent deux résultats négatifs, ce qui fournira deux conditions qui jointes à $P<0$ et $R>0$ donneront les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée ait deux racines positives et deux racines négatives.

Et quand ces conditions seront remplies, on aura deux quantités a' et b' qui permettront de séparer les racines

---

Après la réception de ce beau travail, M. Gautier (Alexandre), élève interne du collége Louis-le-Grand, nous a envoyé une démonstration du même théorème qui pour la première partie se rapproche de celle de M. Yvon ; d'ailleurs en construisant les deux lignes $y=f(x)$, $y=f'(x)$ et faisant attention au théorème de Rolle, la proposition devient d'une évidence intuitive. C'est ainsi que je l'ai trouvée. Tm.