Nouvelles annales de mathématiques

Breton (de Champ)

Démonstration du théorème 39

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 312-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__312_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 39 (page 395, t. I^{er}).

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

NOTA. Cet article est disposé de manière qu'on puisse l'intercaler dans le texte du théorème sur les développées des ellipses et des hyperboles, dont il forme un 2e corollaire. (Voir p. 223.)

2e COROLLAIRE. — On peut démontrer ici d'une manière bien simple le théorème 39. Il s'agit de faire voir que *la courbe enveloppe* c'est-à-dire le lieu des intersections successives *d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande.*

Considérons :

Le rectangle construit sur les longueurs ξ, η interceptées par la droite mobile sur les deux axes ;

La circonférence de rayon γ ayant pour centre l'origine ;

Et celle de rayon $\frac{1}{4}\gamma$ ayant pour diamètre la demi-diagonale aboutissant au sommet opposé à ce point.

On vérifiera sans peine les circonstances suivantes :

1° Les deux circonférences sont tangentes entre elles ;

2° La plus grande est quadruple de l'autre ;

3° Cette dernière rencontre la génératrice en deux points, l'une étant le milieu commun des diagonales du rectangle, et l'autre le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la génératrice ;

4° Ce deuxième point est sur l'enveloppe (*), car on tire des données de la figure (que le lecteur est prié de faire) par la comparaison d'une suite de triangles rectangles, pour valeur de l'abscisse et de l'ordonnée, $x = \gamma \cos^3\psi$, $y = \xi \sin^3\psi$;

5° Les angles compris entre les rayons de la petite circonférence menés aux points correspondants du contact et de l'enveloppe (angles dont la somme équivaut à quatre angles droits) sont doubles des angles supplémentaires l'un de l'autre compris entre les diagonales, et ceux-ci sont doubles des angles formés avec les axes par la diagonale menée au point de contact ;

6° Enfin il résulte des relations ci-dessus entre les angles et du rapport des rayons que les arcs de la grande circonférence interceptés entre les axes et le point de contact, sont respectivement égaux à ceux de la petite interceptés entre le point de contact et celui de l'enveloppe. C. Q. F. D.

La coïncidence entre l'enveloppe et l'épicycloïde résulte de l'égalité et de l'*invariabilité* de longueur des diagonales et de la construction même au moyen de laquelle s'*obtient le point de l'enveloppe* sur chaque génératrice ou *enveloppée*.

Dans le cas où l'on a $\xi^2 - \eta^2 = \gamma^2$, les diagonales du *rectangle* étant encore égales entre elles (ou l'angle des axes étant droit) leur longueur varie d'une position à l'autre de l'enveloppée. Il

(*) Voir p. 289, 3

existe néanmoins alors un mode analogue de construction de l'enveloppe consistant dans le théorème suivant :

La perpendiculaire à la diagonale qui passe par l'origine menée par le sommet du rectangle opposé à ce point, rencontre l'autre diagonale ou l'enveloppée en un point qui appartient à l'enveloppe.