NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

THIBAULT

Sur les formules qui donnent les expressions de $\sin(a \pm b), \cos(a \pm b)$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 309-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__309_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES FORMULES

qui donnent les expressions de sin (a±b), cos (a±b).

PAR M. THIBAULT,
Professeur de mathématiques.

Le but de cette note est de simplifier la discussion des formules qui donnent sin $(a \pm b)$, cos $(a \pm b)$. On n'a besoin d'y considérer aucune relation de grandeur entre a et b. Tous les cas possibles y sont ramenés seulement à trois dont l'enchaînement est des plus simples. Cette discussion d'ailleurs n'exige pas qu'on s'appuie sur les expressions de sin $(a-b)$, cos $(a-b)$ ni, par conséquent, que l'on établisse par une figure ces expressions dans aucun cas particulier.

Les formules qui expriment sin $(a-b)$ et cos $(a-b)$ rentrent dans celles qui donnent sin $(a+b)$ et cos $(a+b)$ en faisant b négatif; il suffit donc d'établir, pour toutes les valeurs possibles positives et négatives de a et b, ces deux dernières formules, qui sont :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (1)$$

1^er^ CAS. *a et b positifs et $< \frac{\pi}{2}$.*

Si on a $a+b < \frac{\pi}{2}$, les formules s'établissent directement par la figure connue.

Si on a $a+b > \frac{\pi}{2}$, soit $a = \frac{\pi}{2} - a'$, $b = \frac{\pi}{2} - b'$; il en résulte $a+b = \pi - (a'+b')$ et $a'+b' < \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\sin(a+b) = \sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos(a+b) = -\cos(a'+b') = -\cos a' \cos b' + \sin a' \sin b';$$

égalités dont les derniers membres deviennent ceux de (1) en y remplaçant les sinus et cosinus de a' b' par les cosinus et sinus de a, b.

2° CAS. *a et b positifs quelconques.*

Il suffit de prouver que si les formules (1) sont vraies quand on y remplace l'un des arcs a par $a - \frac{\pi}{2}$, elles le sont aussi quand on y laisse a tel qu'il est ; car par là on ferait dépendre de proche en proche les formules (1), a et b étant positifs quelconques, de ces mêmes formules dans lesquelles on aurait diminué a et b de tous les quadrants qu'ils peuvent contenir. Or, comme alors on retomberait sur le premier cas, le deuxième cas se trouvera aussi démontré.

Prenons $a - \frac{\pi}{2} = a'$, on a :

$$\sin(a+b) = \sin(\pi + a' + b) = \cos(a'+b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(\pi + a' + b) = -\sin(a'+b);$$

or, d'après notre hypothèse, les derniers membres de ces égalités sont égaux respectivement à

$$\cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$
$$-\sin a' \cos b - \cos a' \sin b,$$

expressions qui reviennent aux seconds membres de (1) à cause de $\sin a = \cos a'$, $\cos a = -\sin a'$.

3° CAS. *a et b quelconques positifs ou négatifs.*

En prenant les nombres entiers n, n' assez grands on peut toujours rendre positifs les arcs $2n\pi + a$, $2n'\pi + b$ que nous désignerons par a', b' ; on a donc

$$\sin(a+b) = \sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b'$$
$$\cos(a+b) = \cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'$$

égalités dont les derniers membres deviennent ceux de (1), en y remplaçant les sinus et cosinus de a', b' par ceux de a, b, qui leur sont équivalents.