GUILMIN

Problèmes d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 292-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__292_1>

PROBLÈMES D'EXAMEN.

(Fin, v. p. 205.)

SOLUTIONS DE M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

Du parallélogramme inscrit à une ellipse.

1. Les diagonales d'un parallélogramme inscrit à une ellipse sont des diamètres, car ce sont deux cordes se coupant mutuellement en deux parties égales ; ce qui ne peut arriver qu'à deux diamètres.

La réciproque est vraie. On obtient un parallélogramme inscrit à l'ellipse en joignant deux à deux les extrémités de deux diamètres; en effet la figure est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en deux parties égales.

2. Les côtés adjacents d'un parallélogramme inscrit sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués dirigés suivant les lignes qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés. En effet, chacune de ces lignes est un diamètre puisqu'elle joint les milieux de deux cordes parallèles, et les deux diamètres sont conjugués, car chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

3. Les côtés d'un rectangle inscrit sont parallèles aux axes. En effet, les diamètres conjugués auxquels ils sont respectivement parallèles, devant être perpendiculaires entre eux, ne sont autres que les axes de l'ellipse. De là, un moyen bien simple d'inscrire un rectangle; chacun des axes divise les deux côtés qu'il traverse en deux parties égales.

4. Si la figure est un carré, chaque sommet est à égale distance des deux axes. On obtiendra donc un carré inscrit dans une ellipse en menant les diamètres bissecteurs des angles des axes et joignant deux à deux leurs extrémités. Ce carré est le seul que l'on puisse inscrire.

5. Deux rectangles inscrits peuvent-ils avoir même surface? Soient R, R' deux rectangles qui satisfassent à cette condition, connaissant R, il faut construire R'; soient x, y, les coordonnées d'un sommet de R ; x', y' les coordonnées d'un sommet de R'; on a $R = 4xy$, $R' = 4x'y'$. On devra avoir $xy = x'y'$ (1) avec $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ (2), $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ (3). L'égalité (1) revient à $x^2y^2 = x'^2y'^2$. De (2) on tire

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}, \text{ d'où } x^2y^2 = \frac{b^2x^2(a^2 - x^2)}{a^2};$$

de même

$$x'^2y'^2 = \frac{b^2x'^2(a^2 - x'^2)}{a^2}, \quad \text{on doit donc avoir } x^2(a^2 - x^2)$$

$= x'^2(a^2 - x'^2)$, d'où $a^2x^2 - x^4 = a^2x'^2 - x'^4$ qui revient à $a^2(x^2 - x'^2) - (x^4 - x'^4) = 0$, égalité qui sera satisfaite en prenant $x^2 = x'^2$, d'où $x = \pm x'$, ou $a^2 - (x^2 + x'^2) = 0$, car elle peut s'écrire $(x^2 - x'^2)(a^2 - (x^2 + x'^2)) = 0$. En prenant $x' = \mp x$, on ne fera que passer d'un sommet de R à un autre sommet du même ; nous choisirons x' tel que $a^2 - (x^2 + x'^2) = 0$, d'où $x'^2 = a^2 - x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$. On trouverait de même $y' = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Ainsi, en partant du rectangle R pour en trouver un autre qui ait même surface, on en trouvera un et rien qu'un ; car $x' = \pm\frac{a}{b}y$, $y' = \pm\frac{b}{a}x$, ne donnent qu'un rectangle ; les permutations des signes faisant simplement passer d'un sommet à un autre du rectangle construit avec les premières valeurs adoptées.

Du losange inscrit.

6. Il suffit de tracer deux diamètres rectangulaires et de joindre les quatre extrémités deux à deux. Tous les losanges inscrits sont équivalents deux à deux, il y en a un maximum et un minimum, qui est le carré inscrit.

Du quadrilatère maximum inscrit.

7. On appelle ainsi un quadrilatère inscrit ayant la plus grande surface possible.

Dans une telle figure chaque diagonale doit être parallèle aux deux tangentes menées par les sommets opposés.

En effet soit IADC (*fig.* 46) un quadrilatère ne remplissant pas cette condition, la diagonale AC, par exemple, n'étant pas parallèle à la tangente en I. Je construis la tangente EF parallèle à AC et soit B son point de contact qui est par hypothèse différent de I ; joignons BA, BC ; le triangle BAC a évidemment une surface plus grande que IAC et le quadrilatère BADC est donc plus grand que IADC ; donc celui-ci qui ne remplit pas la condition indiquée n'est pas maximum. Cette condition est donc nécessaire.

Supposons que le quadrilatère BADC la remplisse ; les tangentes EF, GH menées aux sommets opposés B et D étant parallèles à la même droite AC, sont parallèles entre elles, par suite BD est un diamètre; il en est évidemment de même de AC ; tout quadrilatère qui remplit les conditions indiquées est donc un parallélogramme.

Mais la ligne BOD joignant le centre au point de contact d'une tangente est le diamètre des cordes parallèles à cette tangente EF, laquelle est parallèle à AC ; donc pour un pareil parallélogramme les diagonales sont des diamètres conjugués. Soit BOA $=\gamma$. La surface du parallélogramme équivaut à quatre triangles tels que BOA. Donc si l'on pose BO$=b'$ AO$=a'$, on a ABCD$=4.\dfrac{a'b'\sin\gamma}{2}=2a'b'\sin\gamma=2ab$; (a,b), étant les demi-axes de l'ellipse. Les surfaces de tous les parallélogrammes satisfaisant à la condition indiquée sont égales ; donc chacun d'eux est un maximum (*).

Il est facile de voir que cette condition est remplie lorsque les deux diagonales du parallélogramme sont deux diamètres conjugués. La réciproque vient d'être prouvée, donc on peut dire : pour qu'un quadrilatère inscrit soit maximum, il faut et il suffit que les deux diagonales soient deux diamètres conjugués.

8. *Remarque.* Les quatre tangentes aux sommets d'un parallélogramme maximum forment un parallélogramme, et chacune d'elles est divisée en son milieu par le point de contact. En effet, EFGH est un parallélogramme, et DG $=$ FB ; de même, DG$=$BE, donc FB$=$BE.

La réciproque est vraie.

Si les côtés d'un parallélogramme circonscrit sont divisés

(*) De tous ces parallélogrammes équivalents, quel est celui dont le périmètre est un minimum ou un maximum? Tm.

en deux par les points de contact, le quadrilatère intérieur, formé en joignant ceux-ci deux à deux, est un parallélogramme maximum inscrit. En effet, en se servant toujours de la même figure, si l'on tire AC, on voit que FACE est un parallélogramme, puisque AF = EC. AC est donc un diamètre parallèle à FE et GH; donc le parallélogramme ABCD est tel que chacune de ses diagonales est parallèle aux tangentes menées par les sommets opposées ; donc, etc....

9. Les diagonales d'un rectangle étant égales, on obtiendra un rectangle maximum en employant un système de diamètres conjugués égaux. Comme ce système est unique, il n'y a qu'un rectangle maximum inscrit.

10. Le parallélogramme qui a les axes pour diagonales est un losange maximum.

11. Si on emploie les formules que nous avons trouvées pour chercher un rectangle équivalent au rectangle maximum, on trouve ce rectangle lui-même:

Il est à remarquer que deux rectangles quelconques inscrits équivalents entre eux ont leurs sommets placés symétriquement deux à deux, par rapport aux côtés de ce rectangle maximum.

12. Circonscrire à un parallélogramme une ellipse minimum.

Il suffit pour cela de construire une ellipse pour laquelle notre parallélogramme soit un parallélogramme inscrit maximum, et conséquemment, d'après ce qui a été dit, de construire nne ellipse pour laquelle les deux diagonales du parallélogramme soient deux diamètres conjugués.

Soit s la surface du parallélogramme ; a, b les demi-axes de l'ellipse dont nous venons de parler ; on a $s = 2ab$. Cette courbe étant déterminée par la condition qui a servi à la construire, le parallélogramme ne sera plus maximum pour aucune des autres ellipses circonscrites. Soit a', b' les demi-axes de l'une de ces dernières, on a $s < 2a'b'$, qui serait la surface de l'un des parallélogrammes maximum inscrits dans cette courbe. Donc $2ab < 2a'b'$, d'où $\pi ab < \pi a'b'$.

Donc la première ellipse est plus petite que la deuxième; donc, etc.

Du parallélogramme circonscrit.

13. Soit ABCD (*fig.* 47) un parallélogramme circonscrit. La ligne des contacts EH de deux tangentes parallèles est un diamètre; il en est de même de GF; donc le quadrilatère EFHG, obtenu en joignant deux à deux les points de contact des côtés adjacents, est un parallélogramme inscrit. La ligne IK qui joint les milieux de deux de ses côtés opposés EF, GH, est dirigée suivant un diamètre, puisqu'elle joint les milieux de deux cordes parallèles. Mais KOI, prolongée au delà du point I, ira passer au point B, puisque le point de concours de deux tangentes, le milieu de la ligne de leurs points de contact et le centre de l'ellipse sont toujours en ligne droite; KOI, prolongée au delà de H, ira de même passer en D. Donc la diagonale BD de ABCD est dirigée suivant un diamètre; il en est de même de AC. Mais GE, FH sont parallèles à BIKD, donc le diamètre dirigé suivant AC est le diamètre des cordes parallèles à celui qui est dirigé suivant BD; donc ces deux diagonales sont dirigées suivant deux diamètres conjugués.

Calculons la surface de ABCD. Soit $AOB = \gamma$, on a

$$ABCD = 4ABO = \frac{4.\,BO.\,AO}{2}\sin\gamma = 2BO\,.\,AO\sin\gamma.$$

Or, si nous désignons par a', b' les demi-diamètres conjugués dirigés suivant AO, BO, nous aurons

$$AO = \frac{a'^2}{OP},\ BO = \frac{b'^2}{OI};$$

donc $\quad \mathrm{ABCD} = \dfrac{2a'^2b'^2 \sin\gamma}{\mathrm{OI}.\mathrm{OP}} = \dfrac{2a'^2b'^2 \sin^2\gamma}{\mathrm{OI}.\mathrm{OP}\sin\gamma} = \dfrac{2a^2b^2}{\mathrm{OI}.\mathrm{OP}\sin\gamma}.$

Le dénominateur est la surface du parallélogramme IOPE, qui est contenu quatre fois dans le parallélogramme EGHF ;

donc $\mathrm{ABCD} = \dfrac{2a^2b^2}{\left(\dfrac{\mathrm{EGHF}}{4}\right)}$, d'où

$$\mathrm{ABCD} \times \mathrm{EGHF} = 8a^2b^2,$$

ce qui fait voir que le produit de la surface du parallélogramme circonscrit à une ellipse par celle du parallélogramme inscrit formé par les lignes de contact est un nombre invariable pour une ellipse donnée.

14. Par suite, ABCD sera minimum quand EFHG sera maximum ; donc, pour avoir un parallélogramme circonscrit minimum, il suffit de mener des tangentes aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques, car alors le parallélogramme inscrit correspondant est un maximum.

Soient R et r ces deux parallélogrammes, on a $\mathrm{R} \times r = 8a^2b^2$; mais nous avons trouvé $r = 2ab$, donc $\mathrm{R} = 4ab$. Donc la surface d'un parallélogramme circonscrit minimum quelconque est égale au rectangle des axes.

Du rectangle circonscrit.

15. Les côtés d'un tel rectangle étant des tangentes rectangulaires entre elles, les sommets en sont situés sur la circonférence décrite du centre de l'ellipse avec le rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. On construira donc cette circonférence. Par un point A quelconque de cette ligne, on mènera deux tangentes à l'ellipse, puis deux tangentes respectivement parallèles à celles-là ; les trois autres sommets se trouveront d'eux-mêmes sur la circonférence.

La surface d'un rectangle circonscrit est évidemment

$2(a^2+b^2)\sin\gamma$, en désignant par γ l'angle des demi-diagonales, dont chacune est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.

16. Le rectangle sera maximum pour $\sin\gamma = 1$, alors les diagonales sont dirigées suivant les axes. Le parallélogramme inscrit correspondant ayant alors ses côtés parallèles aux axes est un rectangle.

On a ici $R = 2(a^2+b^2)$, d'où $r = \dfrac{8a^2b^2}{2(a^2+b^2)} = \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$, ce qui est la surface du carré inscrit à l'ellipse. Il n'en faut pas conclure que ledit rectangle est le carré lui-même, il est facile de vérifier que c'est au contraire le rectangle inscrit de même surface que ce carré, et dont un sommet a pour coordonnées $x' = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y' = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

17. Le rectangle circonscrit sera minimum quand $\sin\gamma$ aura la valeur qui convient au plus petit angle de deux diamètres conjugués, c'est-à-dire $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. Par suite, la surface de ce rectangle est $2(a^2+b^2)\times\dfrac{2ab}{a^2+b^2} = 4ab$. On retrouve ici la surface d'un parallélogramme circonscrit minimum quelconque, ce qui devait être. On sait que les deux diamètres conjugués qui forment le plus petit angle sont les diamètres conjugués d'égale longueur ; donc le rectangle minimum circonscrit et le rectangle maximum inscrit se trouvent avoir les mêmes diagonales.

18. Le rectangle maximum est un carré, puisque c'est un rectangle dont les diagonales se coupent à angles droits. C'est le seul carré que l'on puisse circonscrire, car les axes étant les seuls diamètres conjugués rectangulaires, un carré circonscrit doit avoir ses sommets sur les axes et en même temps sur la circonférence, lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse, conditions qui ne peuvent être

remplies que par le rectangle dont nous nous occupons.

19. Inscrire dans un parallélogramme donné ABCD une ellipse maximum. On démontrerait, comme pour les autres problèmes analogues, qu'il suffit de construire une ellipse pour laquelle ABCD soit un parallelogramme circonscrit minimum.

Fig. 47. Supposons cette ellipse construite. Le parallélogramme EFHG, formé par les lignes des contacts consécutifs, doit être maximum ; donc ses diagonales doivent être des diamètres conjugués, et les points de contact E, F, H, G doivent être les milieux des côtés du polygone circonscrit. Pour construire cette ellipse, il faut donc joindre les milieux des côtés opposés du parallélogramme donné, et se servir de ces deux lignes comme d'un système de diamètres conjugués