Nouvelles annales de mathématiques

B. Amiot

Sur la détermination d'une courbe du 2e ordre, donnée par son équation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 272-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__272_0>

SUR LA
DÉTERMINATION D'UNE COURBE DU 2e ORDRE,
donnée par son équation.

PAR M. B. AMIOT,
Professeur de mathématiques au Collége de Saint-Louis.

---

1. Soit une courbe du deuxième ordre représentée par l'équation générale

$$\text{(A)} \qquad Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0,$$

que nous supposerons rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires.

Si nous posons

$$(1) \qquad (y-y')^2+(x-x')^2=(my+nx+p)^2$$

nous aurons l'équation d'une certaine courbe du deuxième ordre que nous supposerons rapportée aux mêmes axes de coordonnées. Le point qui a pour coordonnées x', y' est un foyer de cette courbe, et la droite qui a pour équation

$$(2) \qquad my+nx+p=0$$

en est une directrice. D'ailleurs si l'on pose $k^2=m^2+n^2$, k représente la valeur constante du rapport des distances d'un même point quelconque de la courbe au foyer et à la directrice (*).

2. Or on peut toujours disposer des quantités x', y', m, n et p de manière que la courbe représentée par l'équation (1)

(*) Voyez Théorie des foyers, par M. Roguet, page 131 du 1er volume de ce recueil. Tm.

coïncide avec la courbe donnée (A). Pour cela, après avoir développé et ordonné l'équation (1), ce qui donne

$$(3)\ y^2(1-m^2)-2mnxy+x^2(1-n^2)-2y(y'+mp)-2x(x'+np)+ y'^2+x'^2-p^2=0;$$

je la multiplie par un facteur indéterminé S, que j'appellerai *coefficient de réduction* et je l'identifie avec l'équation (A). J'obtiens ainsi, entre les six inconnues x', y', m, n, p et S les six équations.

$$(a)\left\{\begin{array}{l} S(1-m^2)=A \\ S(1-n^2)=C \\ Smn=-B \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{l} S(y'+mp)-=D \\ S(x'+np)=-E \\ S(y'^2+x'^2-p^2)=F \end{array}\right.$$

et par conséquent le problème est généralement déterminé.

3. Des équations (a) on déduit

$$(c)\ m^2=\frac{S-A}{S},\qquad n^2=\frac{S-C}{S}\ \text{et par suite,}$$

$$(d)\ (S-A)(S-C)=B^2,\ \text{ou bien}\ S^2-(A+C)S+AC-B^2=0,$$

d'où l'on déduit $S=\frac{1}{2}\left(A+C\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right)$.

Il est à remarquer que ces deux valeurs de S sont toujours reelles et que l'une au moins est différente de zéro; car si l'on avait à la fois $A+C=0$ et $B^2-AC=0$, il s'ensuivrait $A=0$, $C=0$ et $B=0$, et partant l'équation proposée cesserait d'être du deuxième degré.

Les valeurs de S, m et n étant ainsi connues, on pourrait tirer des équatious (b) x', y' et p; mais, au lieu de résoudre ces équations, éliminons p entre les deux premières, ce qui nous donne :

$$(e)\quad \frac{Sy'+D}{\sqrt{S-A}}=\frac{Sx'+E}{\sqrt{S-C}}\ \text{ou bien}\ \frac{Sy'+D}{S-A}=\frac{Sx'+E}{B},$$

m et n étant d'ailleurs remplacées par leurs valeurs (c).

Or si l'on considère dans cette équation x' et y' comme des coordonnées courantes, on aura, pour chacune des valeurs de S, une certaine droite qui sera un axe de la courbe. En effet si l'on suppose cette droite prise pour axe des x, on doit avoir $y' = 0$ quel que soit x', et par suite il faut que l'on ait $B = 0$, $D = 0$, et réciproquement.

4. Une fois que l'on aura déterminé une valeur du coefficient de réduction S en fonction des coefficients donnés A, B, C, cette valeur rendra l'équation (3) *identique* avec (A), et les deux courbes représentées par ces deux équations, continueront de coïncider quel que soit le système d'axes de coordonnées auquel on les rapporte ensuite simultanément. Or je suppose que, sans déplacer l'origine, on donne aux axes de coordonnées une direction telle que l'équation (A) soit débarrassée du rectangle des variables et devienne

$$\text{(M)} \qquad My^2 + Nx^2 + Py + Qx + F = 0\,;$$

alors l'équation (3), rapportée aux mêmes axes de coordonnées, devra aussi être débarrassée du rectangle des variables, et par conséquent on aura $mn = 0$, d'où résultera

$$(S - M)\,(S - N) = 0,$$

et par conséquent

$$S_1 = M \text{ et } S_2 = N.$$

Ainsi *les deux racines de l'équation* (d) *ne sont autre chose que les valeurs des coefficients des carrés* x^2 et y^2 *lorsque l'on suppose la courbe rapportée à un système de coordonnées parallèles à ses axes.*

5. Cela posé, nous distinguerons deux cas, suivant que les deux valeurs du coefficient de réduction S_1 et S_2 sont différentes de zéro, ou que l'une de ces valeurs est nulle, c'est-à-dire suivant que l'on aura $B^2 - AC \gtrless 0$ ou bien $B^2 - AC = 0$. Dans le premier, si l'on substitue successivement à S les deux valeurs S_1 et S_2 dans l'équation générale (e) on aura pour les équations des deux axes de la courbe,

$$(f) \qquad \frac{S_1 y' + D}{S_1 - A} = \frac{S_1 x'}{B} \text{ et } \frac{S_2 y' + D}{S_2 - A} = \frac{S_2 x' + E}{B}.$$

Il est aisé de vérifier que ces deux droites sont perpendiculaires, car on a

$$\frac{S_1 - A}{B} \times \frac{S_2 - A}{B} =$$

$$= \frac{\left(C - A + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right)\left(C - A - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right)}{4B^2} = 1.$$

Pour obtenir le centre de la courbe, on éliminera successivement x' et y' entre les deux équations (f), ce qui donnera pour les deux coordonnées de ce point

$$x_1 = \frac{BD - AE}{S_1 S_2} = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$$

$$y_1 = \frac{BE - CD}{S_1 S_2} = \frac{BE - CD}{AC - B^2}$$

Si nous supposons la courbe rapportée à son centre et à ses axes, elle aura pour équation

$$(g) \qquad S_1 y^2 + S_2 x^2 + F_1 = 0,$$

F_1 étant déterminé par la relation

$$F_1 = F + Dy_1 + Ex_1 = F + \frac{2BDE - CD^2 - AE^2}{AC - B^2}.$$

Si l'on a $F_1 = 0$, la courbe se reduira à un point dans le cas de S_1 et S_2 de même signe, et à deux droites, dans celui de S_1 et S_2 de signe contraire. Dans ce dernier cas, les deux droites auront pour équations

$$y = \pm x \sqrt{\frac{-S_2}{S_1}}.$$

Si F_1 est different de zéro la courbe sera une ellipse ou une hyperbole suivant que S_1 et S_2 seront de même signe ou de signe contraire, et les valeurs des axes seront données par les deux relations

$$a^2 = -\frac{F_1}{S_2} \quad \text{et} \quad b_2 = -\frac{F_1}{S_1}.$$

Dans le cas où S_1 et S_2, étant de même signe, seraient de signe contraire à F_1, la courbe serait visiblement imaginaire.

6. Passons à la 2^e hypothèse et supposons que l'une des deux valeurs du coefficient de réduction, soit nulle. On aura pour l'autre $S_1 = A + C$, et l'équation générale de l'axe (e) deviendra.

$$(h) \quad [x'(A+C)+E]\sqrt{C} = [y'(A+C)+D]\sqrt{A},$$

en supposant $B = -\sqrt{AC}$; si B était positif, on devrait changer le signe de l'un des deux membres.

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un certain point de l'axe (h), par exemple en celui qui a pour coordonnées

$$x_1 = -\frac{E}{A+C} \text{ et } y_1 = -\frac{D}{A+C}.$$

Pour cela nous substituons dans l'équation (A) à x et à y

$$x - \frac{E}{A+C} \text{ et } y - \frac{D}{A+C},$$

et nous avons

$$(k) Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 - 2\left(\frac{BE-CD}{A+C}\right)y - 2\left(\frac{BD-AE}{A+C}\right)x + F_1 = 0$$

avec la relation $F_1 = F - 2\left(\frac{D^2+E^2}{A+C}\right) + \left(\frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{A+C}\right)^2.$

L'équation de l'axe rapporté aux mêmes axes de coordonnées devient $y' = x'\sqrt{\frac{C}{A}}$, et l'on trouve pour les deux coordonnées du point d'intersection, avec la courbe, qui est le sommet de celle-ci,

$$\alpha = -\frac{F_1\sqrt{A}}{2(E\sqrt{A} + D\sqrt{C})}, \quad \beta = -\frac{F_1\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A} + D\sqrt{C})},$$

La courbe se réduirait à un système de deux droites parallèles, si ces valeurs de α et β étaient infinies, et à une droite unique si elles étaient indéterminées.

Dans le cas contraire, la distance de l'origine des coordonnées au sommet de la courbe sera donnée par la formule

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{F_1 \sqrt{A+C}}{2(E\sqrt{A} + D\sqrt{C})}.$$

Or si nous supposons que, sans déplacer de nouveau l'origine, on prend l'axe de la courbe pour axe des x, l'équation de celle-ci devient

$$S_1 y^2 + Qx + F_1 = 0.$$

et si l'on y fait $y=0$, on a $x = \delta = -\frac{F_1}{Q}$, d'ou $Q = -\frac{F_1}{\delta}$, et comme le paramètre $2p = -\frac{Q}{S_1}$, on trouve

$$p = \frac{E\sqrt{A} + D\sqrt{C}}{(A+C)\sqrt{A+C}}.$$

Dans le cas de $B > 0$, on aurait

$$p = \frac{E\sqrt{A} + D\sqrt{C}}{(A+C)\sqrt{A+C}},$$

et l'on a pour l'équation de la parabole rapportée à son axe et à son sommet

$$y^2 = 2px,$$

l'axe, le sommet et le paramètre étant complétement déterminés par les formules précédentes