NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relation d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 26-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__26_0>

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, *voy.* t. I, p. 489.)

—

XIII. *Coordonnées des sommets :* ellipse et hyperbole.

En éliminant y entre les équations (2) et (8), on obtient une équation dont les racines sont les abscisses x des sommets, l'origine étant au centre. Effectuant l'élimination et ayant égard aux identités, il vient

$$mx^2\,[N^2+m\sin^2\gamma]\,[m^2x^2-4AL] = L^2\,(2A\cos\gamma-B)^2$$

changeant A en C, on aura l'équation en y.

Pour revenir à l'équation générale (1), où l'origine est quelconque, il faut remplacer x par $x-\frac{k}{m}$; faisant le calcul, et mettant au lieu de 4AL, sa valeur k^2-ml, l'équation résultante est divisible par m, et on obtient

$$(N^2+m\sin^2\gamma)\,[m^3x^4-4m^2kx^3+2mx^2\,(3k^2-2AL)$$
$$+4kx\,(2AL-k^2)] = L^2\,(2A\cos\gamma-B)^2-k^2l\,(N^2+m\sin^2\gamma) \quad (9)$$

changeant A en C et k, l en k', l' on a l'équation en y.

Observation 1. Pour le cercle $N^2+m\sin^2\gamma=0$ et $2A\cos\gamma-B=0$; l'équation se réduit à l'identité $0=0$ comme cela doit être; tous les points du cercle sont des sommets.

Observation 2. L'équation (9) combinée avec l'équation analogue en y, peut servir à trouver le lieu géométrique des sommets, lorsqu'on assujettit les coefficients de l'équation (1) à des relations données.

Observation 3. $\dfrac{N^2}{m \sin^2\gamma}$ est invariable pour la même courbe (X, corol. 2) ; ce qui est utile à considérer lorsqu'il s'agit de trouver le lieu géométrique des sommets d'une même conique, prenant diverses positions, d'après une loi assignée.

XIV. *Coordonnées du sommet, et équation de l'axe principal dans la parabole.*

Dans l'équation (9), si l'on fait $m = 0$, trois racines deviennent infinies, et la quatrième reste finie et donne l'abscisse du sommet de la parabole :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k^2 l N^2 - L^2 (2A\cos\gamma - B)^2}{2k^3 N^2} \\ \text{et l'ordonnée}\quad y &= \frac{k'^2 l' N^2 - L^2 (2C\cos\gamma - B)^2}{2k'^3 N^2} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Équation de l'axe principal $ky - k'x = ky' - k'x'$ (11)

y', x' sont les coordonnées du sommet ; les substitutions effectuées ne donnent pas de simplifications.

Observation. Connaissant le sommet, la direction de l'axe et le paramètre de la parabole (IX), on peut décrire la courbe d'un mouvement continu.

XV. *Expression de la grandeur des diamètres :* ellipse et hyperbole.

Plaçant l'origine au centre, soit $y = px$ l'équation d'un diamètre ; combinant cette équation avec celle de la courbe (2), on obtient, pour les coordonnées des points d'intersection des deux lignes,

$$x^2 = \frac{-L}{mP};\ y^2 = \frac{-p^2 L}{mP};\ xy = \frac{\pm pL}{mP};\ P = Ap^2 + Bp + C$$

dans l'ellipse, m étant négatif, le trinôme P n'ayant point de racines réelles, conserve toujours le signe de A, qui est positif; et L étant positif, x^2 et y^2 sont positifs, et par conséquent x et y ont toujours des valeurs réelles; et si p est positif, x et y sont de même signe et xy positif. Il faut donc, dans le cas de l'ellipse, et pour p positif, écrire

$$xy = -\frac{pL}{mP};$$

dans l'hyperbole où m est positif, le trinôme P a deux racines réelles, et par conséquent il change deux fois de signe, en passant par zéro; donc x^2 et y^2 changent aussi deux fois de signe, en passant par l'infini. Nous reviendrons sur ce sujet ci-dessous (XVII).

Soit D la grandeur du demi-diamètre; on a donc

$$D^2 = y^2 + x^2 + 2xy \cos\gamma\,;$$

mettant à la place de y et de x leurs valeurs, on aura

$$D^2 P m^2 = L^2(p^2 \pm 2p\cos\gamma + 1)\ (12).$$

Coroll. Résolvant l'équation (12) par rapport à p, et égalant à zéro la partie sous le radical, on trouve pour D, les mêmes valeurs que l'on a obtenues pour les diamètres principaux (VIII). On a ainsi une seconde manière de parvenir à l'équation fondamentale (3).

XVI. *Système de diamètres conjugués égaux ou simplement égaux dans l'ellipse. Origine au centre.*

Soient $y=px$, et $y=qx$, les équations de deux diamètres, et par conséquent l'équation du système de ces diamètres est

$$y^2 - (p+q)x + pq = 0,$$

les deux diamètres étant de même longueur, l'équation (12) donne celle-ci

$$\frac{p^2+2p\cos\gamma+1}{Ap^2+Bp+C}=\frac{q^2+2q\cos\gamma+1}{Aq^2+Bq+C};$$

cette équation est satisfaite en faisant $p=q$; ainsi après avoir chassé les dénominateurs, et avoir passé tous les termes dans un même membre, l'équation sera divisible par $p-q$; effectuant ces opérations, il vient

$$(2A\cos\gamma-B)pq+(A-C)(p+q)+B-2C\cos\gamma=0 \quad (13).$$

Combinant cette équation, qui appartient aux diamètres simplement égaux, avec l'équation (5) aux diamètres conjugués, on en déduit pour les diamètres conjugués égaux

$$p+q=\frac{m+2CN}{m+2AN};\ pq=\frac{-2(BN+m\cos\gamma)}{m+2AN}.$$

Observation 1. Ayant construit ces deux diamètres conjugués, le grand axe de l'ellipse est bissectrice de l'angle aigu et le petit axe est bissectrice de l'angle obtus. La position de chaque axe principal est donc complétement déterminée; et on connait aussi leurs grandeurs. On peut donc construire l'ellipse d'un mouvement continu.

Observation 2. L'équation (13) aux diamètres égaux jouit de propriétés importantes, que nous étudierons plus tard.

Observation 3. Dans deux ellipses semblables les angles que font entre eux les diamètres conjugués égaux, sont égaux et *vice versâ*.

XVII. *Système d'asymptotes ; hyperbole.*

Pour les asymptotes, on a

$$D=\infty \text{ et } Ap^2+Bp+C=0\text{ ; d'où } p=\frac{-B\pm\sqrt{m}}{2A}.$$

L'équation qui exprime le système des asymptotes est donc

$$(2Ay+Bx+x\sqrt{m})\,(2Ay+Bx-x\sqrt{m})=0,$$

l'origine étant au centre; revenant à une position quelconque de l'origine, l'équation de ce système devient

$$\left[2A\left(y-\frac{k'}{m}\right)+B\left(x-\frac{k}{m}\right)+\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]$$
$$\left[2A\left(y-\frac{k'}{m}\right)+B\left(x-\frac{k}{m}\right)-\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]=0,$$

ou bien, ayant égard à l'identité 10^{me}

$$\left[2Ay+Bx+D+\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]\left[2Ay+Bx+D-\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]=($$

$$(2Ay+Bx+D)^2-\left(x-\frac{k}{m}\right)^2 m=4A(Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex)$$
$$+D^2-\frac{k^2}{m}=0;$$

mais

$$D^2-\frac{k^2}{m}=D^2-4AF+4AF-\frac{k^2}{m};\ \frac{ml-k^2+4mAF}{m}=\frac{4mAF-4AL}{m};$$

ainsi l'équation au système d'asymptotes est

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=\frac{L}{m}\ (14).$$

Coroll. 1. Toutes les hyperboles qui ont les mêmes asymptotes, lorsqu'on les rapporte aux mêmes axes, ont donc des équations qui ne diffèrent que par la valeur du terme tout connu, et pourvu que la fonction L ait toujours des valeurs de même signe, toutes ces hyperboles sont semblables et semblablement placées.

Coroll. 2. Deux coniques semblables et semblablement placées étant coupées par une troisième conique, le point de moyenne distance des points d'intersection de la première conique avec la troisième est le même que le point de moyenne distance des points d'intersection de la deuxième conique avec la troisième; c'est un théorème que nous démontrerons comme une conséquence immédiate de la théorie de l'élimination; un cas très-particulier du théorème est énoncé dans les éléments. Savoir : les parties d'une sécante interceptées entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.

Coroll. 3. Résolvant l'équation (14), on trouve pour les équations des asymptotes

$$2A(my-k')+(B\pm\sqrt{m})(mx-k)=0,$$

ou bien

$$2C(mx-k)+(B\pm\sqrt{m})(my-k')=0.$$

XVIII. *Système de deux hyperboles conjuguées.*

L'équation (3) rapportée à une hyperbole, devient celle qui convient à l'hyperbole conjuguée, en y changeant le signe du second terme. Désignant par des lettres accentuées ce qui est relatif à cette seconde hyperbole, on aura

$$\frac{LN}{m^2}=-\frac{L'N'}{m'^2};\ \frac{L^2}{m^3}=\frac{L'^2}{m'^3};$$

Ces deux équations expriment que les hyperboles ont les mêmes axes, mais dans un sens inverse, l'axe réel de l'une est l'axe *imaginaire* de l'autre et *vice versâ*; on écrit que les deux courbes ont mêmes asymptotes; en exprimant que l'équation (14) leur est commune; ce qui donne ces équations de condition :

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\frac{D'}{D}=\frac{E'}{E}=\frac{m(m'F'-L')}{m'(mF-L)}.$$

Les deux précédentes équations peuvent être remplacées par celles-ci :

$$\frac{N^3}{L}=-\frac{N'^3}{L'};\ \frac{N^2}{m}=\frac{N'^2}{m'}.$$

Observation essentielle. Pour que deux hyperboles soient semblables, il faut donc outre la condition énoncée (X), que $\frac{N}{L}$ et $\frac{N'}{L'}$, ou ce qui revient au même, que NL et N'L' aient même signe. Alors les hyperboles sont dans le même angle des asymptotes. (*La suite prochainement.*)