NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS YVON

Solution du problème 15 des questions d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 264-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__264_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 15 *des questions d'examen* (page 321, t. I).

PAR M. YVON (LOUIS),
Eleve du College royal Charlemagne.

Trouver le lieu des sommets des paraboles qui ont un point commun et le foyer commun.

On pourrait mettre le problème en équation en partant de l'énoncé, mais on peut le résoudre plus simplement en cherchant une autre génération du lieu.

Soit A le point commun et F le foyer commun (*fig.* 50).

La distance du point A à la directrice étant égale à AF dans toutes les positions de la parabole, il s'ensuit que si du point A comme centre avec AF comme rayon, on décrit une circonférence, la directrice, dans ses diverses positions, sera une tangente à cette circonférence, et si on imagine que, dans chaque position de la tangente au cercle, on abaisse une perpendiculaire sur cette dernière, le point milieu de cette perpendiculaire sera un point du lieu.

Ainsi, pour résoudre la question, on cherchera le lieu des projections du point F sur toutes les tangentes au cercle et on remplacera dans l'équation x par $\frac{x}{2}$ et y par $\frac{y}{2}$ (*). Je prends

(*) Ainsi le lieu cherché est une ligne *aplanétique*. Nous en traiterons prochainement. Tm.

le point F pour origine des coordonnées rectangulaires, et AF pour axe des x.

Soit AF $=$ R. L'équation d'une tangente est

$$y = m(x - R) \pm R\sqrt{1+m^2},$$

m étant la tangente de l'angle que fait la tangente au cercle avec l'axe des x.

L'équation de la perpendiculaire est $y = -\frac{1}{m}x$. De cette dernière équation on tire $m = -\frac{x}{y}$; substituant cette valeur dans la première équation et remplaçant y et x, par $\frac{y}{2}$ et $\frac{x}{2}$, il vient

$$\left.\begin{array}{r} y^4 + 2x^2 \\ -4Rx \\ -4R^2 \end{array}\right| \begin{array}{r} y^2 + x^4 \\ -4Rx^3 \\ \end{array} = 0. \qquad (a)$$

On pourrait résoudre cette équation par rapport à y et discuter la courbe; mais les coordonnées polaires permettant de trouver une équation beaucoup plus simple, on a FE $=$ R $-$ AG $=$ R $-$ R $\cos\omega =$ R $(1 - \cos\omega)$; mais FE $= 2\rho$, donc $\rho = \frac{R}{2}(1 - \cos\omega)$ou $\omega =$ FEN ; si on fait $\omega = 0$, on a $\rho = 0$; donc la courbe passe au point F. Si on on fait croître ω de $0°$ à $180°$, ρ va continuellement en augmentant de0 à R. Si on fait $\omega = 90$, on aura $\rho = \frac{R}{2}$, ce qui donne le point B.

On peut se proposer de trouver le point le plus éloigné de la ligne FR. Or, si on désigne par δ la distance d'un point quelconque de la courbe à cette ligne, on a $\delta = \rho\cos\omega$; remplaçant ρ par sa valeur, il vient $\delta = \frac{R}{2}\cos\omega\,(1 - \cos\omega)$, expression dont il faut trouver le maximum; or les deux facteurs variables $\cos\omega\ (1 - \cos\omega)$ ayant une somme constante et égale à 1, le maximum correspondra au cas où les deux facteurs seront égaux, auquel cas $\cos\omega$ sera $= \frac{1}{2}$ et $\omega = 60^\circ$, et par suite il viendra $\delta = \frac{R}{8}$ et $\rho = \frac{R}{4}$. On connaît donc les distances de ce point à la droite FR et au point F; on pourra donc déterminer ce point. Si maintenant on fait croître ω au delà de 90°, ρ augmente, et pour $\omega = 180$ on a $\rho = R$.

On peut aussi trouver le point le plus éloigné de AF. Soit donc δ' la distance d'un point quelconque à AF; on aura $\delta' = \rho \sin\omega = \frac{R}{2}(1 - \cos\omega) \sin\omega$, expression dont il faut trouver le maximum : mais ici la somme n'est pas constante, il faut donc tâcher de la rendre telle; il est clair que pour trouver le maximum de $(1 - \cos\omega)\sin\omega$, il suffit de trouver le maximum de

$$(1-\cos\omega)^2\sin^2\omega = (1-\cos\omega)^2(1-\cos^2\omega) = (1-\cos\omega)^3(1+\cos\omega);$$

ici la somme des facteurs égale $4 - 2\cos\omega$, il faudrait donc augmenter cette somme de $2\cos\omega$, ce qui pourra se faire en multipliant le facteur $(1 + \cos\omega)$ par 3, la question reviendra donc à trouver le maximum de $(1-\cos\omega)^3(3 + 3\cos\omega)$. Or, la somme étant constante et égale à 6, la valeur de $\cos\omega$ correspondante au maximum sera donnée par $3 + 3\cos\omega = \frac{3}{2}$, d'où $\cos\omega = -\frac{1}{2}$; $\omega = 120$; par suite $\sin\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ce qui donne $\delta' = \frac{3}{8}R\sqrt{3}$ et $\rho = \frac{3R}{4}$. On pourra donc aussi déterminer ce point. Si on donne à ω des valeurs comprises entre 180° et 360°, on repasse par les mêmes valeurs de ρ, donc la courbe est symétrique par rapport à la ligne AF. Prenons $FI = \frac{R}{8}$ et $AN = AN' = \frac{3}{8}R\sqrt{3}$, et par les points I, N, et N' menons des parallèles, la première à BR, les deux autres à AF, on formera un rectangle qui renfermera la courbe et dont tous les côtés seront des tangentes, car on pourrait s'assurer facilement que AN est une tangente. On pourrait voir de plus que AF est tangente au point F.

On voit que la courbe est limitée, ce que l'on pouvait prévoir, car EF est plus petit que le rayon, et si la tangente s'incline de l'autre côté E'F est plus petit que 2R, donc dans tous les cas ρ est $< 2R$. Donc la courbe est limitée. La perpendiculaire abaissée du point F sur la tangente en ce point est nulle ; donc le point F est un point du lieu. La ligne F'D étant tangente au point F', il s'ensuit que le point A, milieu de FF', devait appartenir à la courbe ; ce qui vérifie les résultats trouvés par le calcul.

Observation. Cette courbe a été construite par Euler (*Introd. ad Analys.*, tome II, § 415). On l'obtient en portant sur le rayon mobile d'une circonférence, à partir du centre, la moitié du sinus-verse de l'arc compris entre ce rayon et un rayon fixe.

Le périmètre de toute la courbe est égal au double du diamètre de la circonférence. L'aire de la courbe est égale aux $\frac{3}{8}$ de l'aire du cercle.

Comment démontrer par des moyens quelconques, cette proposition de Newton, qu'il n'existe aucune courbe algébrique *fermée* carrable. Cette proposition comprend-elle les courbes fermées qui font partie des courbes à branches infinies ?

Comment démontrer par des moyens quelconques, cette proposition d'Euler, qu'il n'existe aucune courbe algébrique dont le périmètre puisse être égal à un arc de cercle ? tandis qu'il existe une foule de courbes algébriques dont le périmètre est rectifiable. Au premier aperçu on est plutôt tenté d'admettre le contraire ; nouvel exemple, qui montre combien il faut se défier des premiers aperçus ! Tm.