MIDY

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 260-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__260_0>

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. MIDY,

Ancien Professeur de mathématiques spéciales dans les Colléges royaux.

Problème. *Trouver le lieu des foyers des hyperboles qui ont une asymptote commune et un sommet commun.*

1^re^ *Solution.* Supposons les hyperboles rapportées à des axes rectangulaires. Prenons l'asymptote commune pour axe des y et la perpendiculaire abaissée du sommet commun sur cette droite pour axe des x. Nommons d la distance du sommet à l'asymptote et désignant par α et β les coordonnées variables du foyer, nous aurons

$$x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(px+qy+r)^2=0 \quad (1)$$

pour l'équation des courbes considérées. Pour exprimer que l'axe des y est une asymptote commune à toutes ces courbes, nous ferons $x=0$ dans cette équation, et nous écrirons ensuite que les deux valeurs de y données par l'équation résultante sont infinies.

Cette équation est

$$(1-q^2)y^2-2(\beta+qr)y+\beta^2-r^2=0.$$

Nous y ferons

$$1-q^2=0$$
$$\beta+qr=0$$

Par suite, $q=1$ et $r=-\beta$

Ce qui change l'équation (1) en

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(px+y-\beta)^2=0$$

En la développant, elle se réduit à

$$2pxy+(p^2-1)x^2+2(\alpha-p\beta)x=\alpha^2 \quad (2)$$

Le sommet commun dont les coordonnées sont $y = 0$; $x=d$, étant sur chacune des hyperboles, l'on a

$$(p^2 - 1) d^2 + 2(\alpha - p\beta) d = \alpha^2 (3)$$

Mais le sommet est toujours aussi sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice dont l'équation est ici

$$px + y - \beta = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire est donc

$$y - \beta = \frac{1}{p}(x - \alpha)$$

et la condition de passer par le sommet donne

$$p\beta = \alpha - d (4).$$

L'élimination de p entre (3) et (4) donnera donc le lieu cherché.

Pour faciliter cette élimination, nous remarquerons que (4) donne

$$d = \alpha - p\beta$$

par suite (3) devient

$$(p^2 - 1) d^2 + 2 d^2 = \alpha^2$$

et se réduit à

$$d^2 (p^2 + 1) - \alpha^2 = 0$$

En y substituant la valeur de p tirée de (4), on trouve en ordonnant par rapport à β

$$\beta^2 (\alpha^2 - d^2) - d^2 (\alpha - d)^2 = 0$$

ou

$$(\alpha - d) \left[\beta^2 (\alpha + d) - d^2 (\alpha - d)\right] = 0.$$

Supprimant le facteur $\alpha - d$, évidemment étranger à la question, on trouve enfin

$$\beta^2 = \frac{d^2 (\alpha - d)}{\alpha + d}$$

pour l'équation du lieu cherché.

2^e^ SOLUTION (*Fig.* 49).

Mais la considération des propriétés géométriques de la figure donne une solution beaucoup plus prompte. En effet, l'on sait que si l'on mène SE perpendiculaire sur SF, CE sera égal à CF. C est le centre, S le sommet et F le foyer. Le point cherché sera donc à la fois sur la droite CF et sur la circonférence CE, et sera par conséquent donné par leur intersection.

Or, la droite SF a pour équation

$$y=m\,(x-d) \qquad (1)$$

et celle de la perpendiculaire SE sur cette droite est

$$y=-\frac{1}{m}(x-d). \qquad (2)$$

Par suite, les coordonnées du centre C sont

$$x=0,\quad y=-md$$

et celles du point E

$$x=0,\quad y=\frac{d}{m}.$$

D'où il suit que la circonférence décrite du rayon CE a pour équation

$$(y+md)^2+x^2=\frac{d^2(1+m^2)^2}{m^2}. \qquad (3)$$

L'élimination de m entre (1) et (3) donnera le lieu cherché.

Or (1) donne

$$y+md=mx$$

par suite (3) se simplifie et devient

$$m^2(x^2-d^2)-d^2=0$$

équation qui, par la substitution de la valeur de m, donne, comme précédemment,

$$y^2(x^2-d^2)-d^2(x-d)^2=0$$

ou
$$y^2 = \frac{d^2 (x-d)}{x+d}.$$

La comparaison des triangles semblables de la figure conduit plus aisément encore au même résultat; soit que l'on s'appuie sur l'égalité des droites CE et CF, ou sur celles des perpendiculaires ES, FK abaissées de l'extrémité de chacune d'elles sur l'autre.

Dans la première hypothèse, les triangles semblables SFP, SCO donnent

$$\mathrm{SF} : \mathrm{SC} :: \mathrm{SP} : \mathrm{SO}$$

ou

$$\mathrm{SF} : \mathrm{SC} :: x-d : d$$

d'où
$$\mathrm{SC} : \mathrm{CF} :: d : x$$

Mais les triangles semblables SFP, SCE donnent aussi

$$\mathrm{SC} : \mathrm{CE} :: \mathrm{FP} : \mathrm{SF} :: y : \sqrt{y^2 + (x-d)^2}.$$

Donc

$$d : x :: y : \sqrt{y^2 + (x-d)^2},$$

d'où on tire

$$y^2 = \frac{d^2 (x-d}{x+d}.$$

En s'appuyant sur la seconde égalité, les triangles semblables SFP, SOE donnent immédiatement

$$\mathrm{SE} : \mathrm{SO} :: \mathrm{SF} : \mathrm{FP}$$

ou

$$x : d :: \sqrt{y^2 + (x-d)^2} \ : y,$$

proportion déjà obtenue.

La discussion de cette courbe ferait connaître que conformément à la figure (49), elle se compose de trois branches distinctes qui ont pour asymptotes les droites GH, G'H', I' L' parallèles aux axes et menées à des distances de ces axes égales à OS, et que, tandis que le centre C de l'hyperbole variable parcourt l'asymptote donnée OY, le second sommet S′ mobile parcourt l'asymptote I′L′ de la courbe ; les foyers F et F′ décrivant, le premier, les branches situées à droite de l'axe OY, et le second, les deux branches situées à gauche. On peut de la même manière trouver le lieu géométrique du sommet, un foyer et une asymptote étant fixes (voir tome I, pag. 158).