ROCHE

Solution de la question 49

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 244-247

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__244_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 49 (page 520, tome I).

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'artillerie navale.

Problème.

Déterminer les racines réelles de l'équation

$$2(1-\cos x) = x \sin x.$$

Pour résoudre cette équation, il faut la ramener à une forme plus simple, en faisant $x = 2z$, ce qui donne

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 z,\ 1 - \cos x = 2\sin^2 z, \sin x = 2\sin z \cos z.$$

Substituant ces valeurs et réduisant, l'équation deviendra $\sin z = z \cos z$, ou, en divisant par $\cos z$,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} z = z.$$

Il est évident que si l'on ne considère que des arcs moindres que deux angles droits, il n'y a qu'une solution possible $z=0$, ou $x=0$; mais comme tous les arcs qui diffèrent d'un nombre exact de demi-circonférences ayant des tangentes égales à celles des arcs simples, peuvent satisfaire à la question, si, au lieu de z, on substitue $u + n\pi$, u désignant un arc plus petit que le quadrant et n un nombre entier quelconque, on aura, en substituant la valeur $z = u + n\pi$, l'é-tion générale

$$(2) \qquad \text{tang}\, u - u = n\pi = \text{F}\,(u).$$

Cette équation indéterminée fait voir que le problème a une infinité de solutions correspondantes aux valeurs entières et positives de n. Pour résoudre l'équation, je prendrai pour valeur approchée de u, une valeur u' déterminée par l'équation $\text{tang}\, u' = \frac{(2n+1)\pi}{2}$; u' sera plus grand que u, et je déterminerai la quantité δ qu'il faudra retrancher de u' pour avoir u par l'équation

$$\delta = \frac{\text{F}u' - n\pi}{\text{F}'u'} = \frac{\text{F}u' - n\pi}{\text{tang}^2\, u'},$$

Car, en désignant par $\text{F}u' = \text{tang}\, u' - u'$, on a,

$$\text{F}'u' = \frac{d\,(\text{F}u')}{du'} = \text{tang}^2 u', \text{ et } \text{F}u = \text{F}(u' - \delta) = n\pi = \text{F}u' - \delta \text{F}'u' + \text{etc.}$$

En négligeant dans le développement les termes affectés des puissances supérieures de u', on déduit la valeur de δ.

Premier cas. $n = 1$.

Dans ce cas, l'équation (2) devient tang $u \quad u = \pi$. Une première approximation donne $\text{tang}\, u' = \frac{3}{2}\pi$, dont le logarithme 0,6732421 répond à un arc $u' = 78°1'9'' = 280869''$. Cet arc, évalué d'après la longueur de l'arc d'une seconde, donne $u' = 1{,}361692$, $\text{F}u' - \pi = 0{,}209108$. On en déduit

$$\delta = 0{,}009417,$$

et par suite,

$$u' - \delta = 1{,}352275.$$

Cette valeur approchée de l'arc réduite en secondes, donne 77°28'47''. Prenant pour u' cette nouvelle valeur, on en déduit $Fu'-\pi=0{,}0092986$ et $\delta=0{,}000459$ et $u=1{,}351816$. Cette valeur, réduite en secondes, donnera $u=77°27'12''$, et $Fu=3{,}141569$, qui diffère très-peu, comme on voit, de la valeur de $\pi=3{,}141592$.

Second cas. $n=2$.

L'équation (2) devient tang $u-u=2\pi$. La première approximation donne tang $u'=\frac{\delta}{2}\pi$. Elle répond à un arc de $82°44'38''$, dont la longueur est $1{,}444153$. On a

$$Fu'-2\pi=0{,}126647, \text{ et } \delta=0{,}002053,$$

et par suite

$$u'-\delta=1{,}4421.$$

Cette valeur approchée répond à un arc de $82°37'34''$. En la prenant pour u', on aura $Fu'-2\pi=0{,}001856$, et $\delta=0{,}000031$ et $u'-\delta=1{,}442069$. Cette valeur correspond à un arc de $82°37'28''$. Une dernière approximation donnera $u=82°37'27''$.

Troisième cas. $n=3$.

L'équation (2) devient tang $u-u=3\pi$. La première approximation donne tang $u'=\frac{7}{2}\pi$. Elle répond à un arc de $84°48'13''$, dont la longueur $u'=1{,}480102$. On a

$$Fu'-3\pi=0{,}0906932, \ \delta=0{,}000750,$$

et par suite,

$$u'-\delta=1{,}479352.$$

Cette valeur répond à un arc de $84°45'38''$, valeur approchée de l'arc u à une seconde près.

Quatrième cas. $n=4$.

L'équation générale devient tang $u-u=4\pi$. La première approximation donne

$\text{tang}\, u' = \frac{9}{2}\pi$, $u' = 85°7'14''$, $Fu' - 4\pi = 0{,}07065$, $\delta = 0{,}0003535$,

et par conséquent

$$u' - \delta = u = 1{,}4997265,$$

et en degrés

$$u = 85°56'1''.$$

C'est la valeur de l'arc, à une seconde près.

Résumé.

Des valeurs de u, on déduira celles de $z = u + n\pi$ et celles de $x = 2z$, et l'on aura pour les cas examinés,

$$\begin{cases} u = 77°\,27'\,12'', & x = \text{circ} + 154°\,54'\,24'' \\ u = 84°\,45'\,38'', & x = 3\text{circ} + 169°\,31'\,16'' \end{cases}$$
$$\begin{cases} u = 82°\,37'\,27'', & x = 2\text{circ} + 165°\,14'\,54'' \\ u = 85°\,56'\,\;1'', & x = 4\text{circ} + 171°\,52'\,\;2'' \end{cases}$$

Les valeurs de u, comprises dans la première accolade, répondant aux valeur impaires de n, donnent des arcs z, compris dans le troisième quadrant; les autres, qui répondent aux valeurs paires de n, donnent des arcs qui diffèrent de u d'un nombre entier de circonférences et qui se trouvent dans le premier quadrant. Pour les valeurs $n = 5, 6$, etc., on aura par une première approximation, les valeurs de u, à quelques secondes près.

Nota. Cette question a été aussi résolue par Euler, *Introd. ad. analy.*, tom. II, ch XXII, prop. 9. Il y parvient par une voie plus longue, par le développement en séries.

Nous donnerons les valeurs trouvées par Euler dans un article spécialement consacré à toutes les principales valeurs numériques, formules et séries algébriques relatives au cercle et à la circonférence. Tm.