NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FERRIOT

Démonstration très-élémentaire de la proposition de dynamique, connue sous le nom de conservation du mouvement du centre de gravité

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 241-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__241_0>

DÉMONSTRATION TRÈS-ELÉMENTAIRE

De la proposition de Dynamique, connue sous le nom de **Conservation du mouvement du centre de gravité.**

PAR M. FERRIOT,
Recteur honoraire de l'académie de Grenoble.

—

Cette proposition s'énonce ainsi :

« Le centre de gravité d'un système de corps dont chacun » se meut uniformément et en ligne droite, d'une manière » quelconque dans l'espace, se meut lui-même uniformé- » ment et en ligne droite, et la vitesse est exprimée par la » résultante divisée par la masse entière du système. »

En effet, soit un quadrilatère plan ou gauche ABCD dont les côtés AB et CD sont entre eux comme $p : q$; supposons en A un mobile dont la masse est a parcourant uniformément AB, dans le même temps qu'un autre mobile dont la masse est b, placé en D parcourt uniformément DC, et partageons les côtés AD et BC chacun en deux parties, de manière qu'on ait (*fig.* 48)

$$\mathrm{AF} : \mathrm{FD} :: b : a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{BE} : \mathrm{CE} :: b : a.$$

Supposons actuellement que les mobiles a et b se mettent en mouvement, et parviennent après l'unité de temps, l'un en G et l'autre en H, de manière qu'on ait

$$\mathrm{AG} : \mathrm{DH} :: p : q.$$

La droite GH coupera la droite EF (*), et cette intersection

(*) Voyez la Géométrie de Legendre, 12e edition, page 147.

aura lieu entre le point F et le point E. Si on remarque actuellement que le centre de gravité des masses a et b partage les droites AD et GH, et toutes leurs analogues, chacune en deux parties qui sont toujours dans le même rapport $b : a$, on verra que le centre de gravité g de ces deux mobiles parcourt uniformément la droite EF.

Supposons un troisième mobile dont la masse est c, placé partout où l'on voudra, parcourant encore uniformément une ligne droite de direction quelconque, on verra, comme précédemment, que le centre de gravité g, des mobiles a et b, combiné avec le troisième mobile c, donnera lieu à un nouveau centre de gravité g', parcourant uniformément une autre ligne droite analogue à EF.

Ce raisonnement pouvant s'étendre à tant de mobiles qu'on voudra, *la première partie du principe énoncé est démontrée.*

Venons maintenant à la vitesse du centre de gravité, qui est évidemment représentée par EF, quand on ne considère que les deux mobiles a et b.

Pour calculer cette ligne, représentons par 1 l'unité de force qui transporte l'unité de masse sur l'unité de ligne ; les forces qui, dans le même temps, transportent a sur AB, b sur CD et $(a+b)$ sur EF seront représentées par a.AB, b.CD et $(a+b)$ EF ; or, les forces a.AB et b.CD, appliquées l'une en A et l'autre en D, produisent le même effet que si elles étaient transportées parallèlement à elles-mêmes au point F ; donc la ligne EF prise $(a+b)$ fois est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont AB pris a fois et CD pris b fois ; donc enfin, en divisant ces trois forces par $(a+b)$, on voit que EF est la diagonale d'un parallélogramme dont les composantes sont respectivement parallèles aux côtés AB, DC et égales l'une à $\frac{a.\text{AB}}{a+b}$, l'autre à $\frac{b.\text{CD}}{a+b}$, la résultante étant $(a+b)$.EF, et la vitesse EF, cette vitesse est donc égale à la résultante divisée par la somme des masses (*).

Voilà donc la seconde partie du principe énoncé démontrée.

Remarque I. Chaque force que nous avons supposée, pouvant être considérée comme la résultante de tant de forces qu'on voudra, on peut concevoir que ces dernières se groupent de toutes les manières possibles, pour former de nouvelles résultantes partielles qui conduiront toujours à la même résultante générale ; ainsi, les solides pourront se heurter, sans que la proposition dont il s'agit cesse d'avoir lieu.

Remarque II. Si le système des corps en mouvement se réduit à deux, la ligne droite qui les joint et qui contient nécessairement leur centre de gravité, décrit un paraboloïde hyperbolique, car cette ligne GKH reste constamment parallèle à un même plan en glissant sur les directrices AB et DC, comme cela est évident d'après la nature de son mouvement.

Remarque III. Si on considère les trois lignes AB, CD, EF, ainsi que la figure (48) qu'elles concourent à former abstraction faite de toute idée de force, de masse et de vitesse, on sera conduit à un *théorème* qui renferme comme cas particulier cette proposition très-connue, savoir : Dans tout trapèze, la ligne menée à égales distances des deux bases est égale à la demi-somme de ces bases.

En effet, posons $a=b$, et imaginons AB parallèle à CD ; la diagonale EF sera, alors, égale à la somme des composantes $\frac{a.\mathrm{AB}}{a+b}$ et $\frac{b.\mathrm{CD}}{a+b}$ qui se réduisent à $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ et $\frac{\mathrm{CD}}{2}$ et donnent pour EF, $\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{CD}}{2}$.

Le théorème dont il s'agit a donc pour énoncé :

« Si dans un quadrilatère quelconque plan ou gauche, on

(*) Lorsque la résultante est un couple, le centre de gravité reste en repos. Tm.

» partage deux côtés opposés AD et BC, par exemple, chacun
» en deux parties, de manière qu'on ait

$$AF : FD :: BE : EC :: b : a.$$

» La ligne EF sera la diagonale d'un parallélogramme
» ayant pour côtés $\frac{a.AB}{a+b}$ et $\frac{b.CD}{a+b}$, l'un parallèle à AB,
» l'autre à CD, ou autrement faisant entre eux même angle
» que les côté AB et CD. »