NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS IVON

Volume du tronc de cône par la méthode des coefficients indéterminés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 23-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__23_1>

VOLUME DU TRONC DE CONE

par la méthode des coefficients indéterminés.

PAR M. IVON (LOUIS),
Elève du collége Charlemagne.

On a vu, en géométrie élémentaire, que le volume d'un tronc de cône a pour expression $\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+Rr+r^2)$; on peut trouver ce volume par d'autres considérations et de la manière suivante.

Désignons par X le polynôme inconnu fonction de h, R et r qui doit exprimer le volume cherché; ce polynôme sera du troisième degré et homogène ; si on fait $h=o$, X doit devenir nul, quels que soient R et r, donc h est facteur commun à tous les termes de X ; ce facteur étant mis en évidence il viendra $X=hX'$.

Je dis maintenant que le nouveau polynôme X' ne contiendra plus h à aucun de ses termes.

Supposons un instant que R et r aient des valeurs particulières, et, ne considérant que h de variable, imaginons qu'on ordonne X' par rapport aux puissances décroissantes de h, il est facile de voir que le coefficient du premier terme devrait être positif ; car s'il était négatif on pourrait trouver une valeur positive de h assez grande pour que le résultat de sa substitution dans X' fut de même signe que le premier terme, et par conséquent négatif ; X', et par suite X qui est un volume, serait négatif, ce qui est impossible ; donc le coefficient du premier terme devrait être positif ; alors pour une valeur de h suffisamment grande X', surpasserait toute grandeur donnée, ce qui ne peut pas être ; en effet, imaginons un cylindre ayant pour rayon de la base le rayon constant de la plus grande base du tronc de cône, et dont la hauteur variable resterait toujours la même que celle de ce tronc, il est clair que le dernier volume sera toujours plus petit que le cylindre, on aura donc : $X<\pi hR^2$, et par suite $X'<\pi R^2$ valeur déterminée et constante puisque R est supposé invariable ; X' ne pourrait donc pas surpasser toute grandeur donnée ; donc X' doit être indépendant de h ; c'est par conséquent un polynôme homogène du second degré et de la forme $aR^2+bRr+cr^2$, car il ne peut évidemment renfermer de puissances négatives de R et r ; puisqu'une de ces quantités s'évanouissant, le volume deviendrait infini (*).

(*) Comment démontrer que cette expression ne renferme pas des termes de la forme $R^{\frac{4}{3}} r^{\frac{2}{3}}$, objection qu'on peut faire à ce genre de démonstration. Tm.

On a donc $X = h(aR^2 + bRr + cr^2)$; a, b et c étant des quantités qu'il s'agit de déterminer. Si on fait $r=0$ le volume se réduit à celui d'un cône et est $= \frac{\pi}{3} R^2 h$; mais X doit être égal à cette expression. On a donc la relation $haR^2 = \frac{\pi}{3} R^2 h$ qui détermine a, et il vient $a = \frac{\pi}{3}$. Si on fait $R=0$, on trouve de même la relation $hcr^2 = \frac{\pi}{3} r^2 h$ d'où l'on tir $c = \frac{\pi}{3}$. On voit que a est égal à c, ce qu'on pouvait voir *à priori*.

Il ne reste plus que b à déterminer : or, si on fait $R=r$, le tronc deviendra un cylindre et on aura la relation $h(a+b+c)\,R^2 = \pi R^2 h$ qui donne $a+b+c=\pi$, mais $a+c = \frac{2\pi}{3}$, donc $b = \frac{\pi}{3}$. On a donc, en substituant ces valeurs dans X,

$$X = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2)$$

qui est bien l'expression trouvée en géométrie.

Ce que l'on vient de faire dans ce cas particulier, pourrait s'appliquer pour trouver les expressions des autres volumes ; et il est clair que cela revient à ce problème d'algèbre : déterminer les coefficients d'un polynôme connaissant les valeurs qu'il prend dans certains cas particuliers (*).

Observation. Cette méthode a une utilité mnémonique ; elle peut servir à se rappeler des formules, obtenues par d'autres moyens. Considérée logiquement, la méthode n'a pas le degré de certitude désirable. Le volume ou l'aire cherchés, sont peut-être des fonctions non algébriques des données de la question. L'aire de l'ellipsoïde de révolution en offre un exemple, entre mille autres. Tm.

(*) *Voir* t. I, p. 117.