Nouvelles annales de mathématiques

H. Bertot

Démonstration d'un théorème, sur les polygones réguliers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 239-240
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__239_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME

Sur les polygones réguliers,

PAR M. BERTOT (H.),
Elève du Collége royal Louis-le-Grand.

—

La différence des surfaces de deux polygones réguliers de 2n *côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, est moindre que le quart de la différence des surfaces des polygones réguliers de* n *côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.*

Soient AB, CD (*fig.* 43), les côtés des polygones réguliers de n côtés. Le rayon OI est perpendiculaire sur le milieu de AE, la droite AK est perpendiculaire sur OE ; donc, si l'on joint le point E au point H d'intersection de OI, et AK, la droite EH sera perpendiculaire au point M sur OA, puisque les trois hauteurs du triangle OAE se coupent en un même point.

La différence ABCD des triangles COD, AOB, sera la n^{ieme} partie de la différence des polygones de n côtés. La différence des surfaces de ces deux polygones sera

$$n\,.\,\mathrm{ABCD} = 2n\,.\,\mathrm{AKEC} = 2n\,.\,\mathrm{CEM}\,,$$

car les triangles rectangles AEM, AEK sont égaux.

La différence des surfaces des polygones de $2n$ côtés sera égal à

$$2n\,.\,\mathrm{AEFG} = 2n\,.\,\mathrm{AEN} = 2n\,.\,\mathrm{HEN}.$$

Il s'agit donc de démontrer que HEN $< \frac{1}{4}$. CEM.

Or, si l'on mène par le point L milieu de EA, une parallèle à AC, et terminée à la rencontre des droites EA, EM, il en résultera un triangle dont la surface sera égale à $\frac{1}{4}$ CEM, et qui sera plus grande que celle du triangle NEH. Car, le point L est sur la bissectrice EA de l'angle CEM, et l'on sait que de tous les triangles formés par des droites menées par un point de la bissectrice d'un angle et terminées aux côtés de cet angle, le minimum est le triangle isocèle. Ainsi, le triangle NEH est plus petit que le quart de CEM. C'est ce qu'il fallait démontrer.